ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Агаловян М.Л.

Ключевые слова: общая анизотропия, полоса, свободные колебания, частота, асимптотика.
Key words: general anisotropic, strip, free vibration, frequence, asimptotics.

Մ.Լ.Աղալովյան
Անիզոտրոպ շերտի սեփական տատանումների ասիմպտոտիկան

Ուսումնասիրված են իր հարթության մեջ ընդհանուր անիզոտրոպիայով օժտված շերտի սեփական տատանումները, երբ շերտի երկայնական նիստերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ հակադիր նիստը ազատ է, կամ կոշտ ամրակցված: Ասիմպտոտիկ մեթոդով արտածված են բնութագրիչ հավասարումներ սեփական տատանումների հաճախությունները որոշելու համար: Ապացուցված է, որ շերտում կարող են առաջանալ երկու տիպի սեփական տատանումներ: Սակայն, ի տարբերություն իզոտրոպ և օրթոտրոպ շերտերի, տատանումները չեն հանդիսանում մաքուր սահքային և երկայնական: Որոշված են տատանումների ձևերը: Ցույց է տրված, որ յուրաքանչյուր դեպքի համար սեփական ֆունկցիաները կազմում են օրթոնորմալ համակարգ:

M.L.Aghalovyan
Asimptotics of free vibrations of anisotropic strip

Free vibrations of strip which has general anisotropy in his plane are investigated, then one of the faces is rigidly fastened, the opposite free, or rigidly fastened. Characteristic equations for determining frequencies of free vibrations are derived by the asymptotic method. It′s proved that two types of own vibrations are arising in the strip. But in contrast to isotropic and ortotropic strips vibrations are not purely shear and purely longitudinal. The forms of own vibrations are determined. It′s shown that for each case eigenfunctions formed ortonormalized system.

Исследованы собственные колебания полосы, обладающей общей анизотропией в своей плоскости, когда одна из лицевых граней жестко закреплена, а противоположная грань свободна или жестко закреплена. Асимптотическим методом выведены характеристические уравнения для определения частот собственных колебаний. Доказано, что в полосе возникают два типа собственных колебаний. Однако, в отличие от изотропных и ортотропных полос, колебания не являются чисто сдвиговыми или чисто продольными. Определены формы собственных колебаний. Показано, что при каждом случае собственные функции образуют ортонормированную систему.

1.Основные соотношения и постановка задач. Для решения динамических задач теории упругости для тонких тел (балки, пластины, оболочки) в последние десятилетия широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Этим методом решен ряд задач о собственных и вынужденных колебаниях ортотропных балок, пластин и оболочек [1-4]. В [5,6] рассмотрены вынужденные колебания пластин с общей анизотропией при серии граничных условий на лицевых поверхностях пластинки.

В работе рассмотрены собственные колебания полосы, обладающей общей анизотропией в своей плоскости.

Требуется найти в области $D=\{(x,y): 0\le x\le l\ ,\ -h\le y\le h\ ,\ h\ll l\}$ ненулевые решения динамических уравнений теории упругости:
уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \qquad (1.1)$$

соотношения упругости

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{16}\sigma_{xy}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}=a_{12}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{26}\sigma_{xy} \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=a_{16}\sigma_{xx}+a_{26}\sigma_{yy}+a_{66}\sigma_{xy}$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u_x\left(y=-h\right)=0,\quad u_y\left(y=-h\right)=0 \qquad (1.3)$$

$$\sigma_{xy}\left(y=h\right)=0,\quad \sigma_{yy}\left(y=h\right)=0 \qquad (1.4)$$

или

$$u_x\left(y=h\right)=0,\quad u_y\left(y=h\right)=0 \qquad (1.5)$$

2. Общий интеграл поставленных задач на собственные значения. Решение сформулированных задач будем искать в виде

$$\sigma_{xx},\sigma_{xy},\sigma_{yy}=\left(\sigma_{11}\left(x,y\right),\ \sigma_{12}\left(x,y\right),\ \sigma_{22}\left(x,y\right)\right)\exp\left(i\omega t\right),$$

$$u_x,u_y=\left(\bar{u}_x\left(x,y\right),\ \bar{u}_y\left(x,y\right)\right)\exp\left(i\omega t\right). \qquad (2.1)$$

Переходя к безразмерным переменным $\xi=x/l,\ \zeta=y/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u=\bar{u}_x/l, v=\bar{u}_y/l$, решения задач сводятся к решению сингулярно-возмущенной малым параметром $\varepsilon=h/l$ системы

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2 u=0$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2 v=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{16}\sigma_{12} \qquad (2.2)$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{26}\sigma_{12}$$

$$\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_{11}+a_{26}\sigma_{22}+a_{66}\sigma_{12}\quad,\ \omega_*^2=\rho h^2\omega^2\ ,$$

где ω – искомая частота собственных колебаний, a_{ik} – постоянные упругости, ρ – плотность.

Решение системы (2.2) представим в виде [7]

$$\sigma_{ij}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ij}^{(s)}\ ,\ i,j=1,2\ ,\ (u,v)=\varepsilon^{s}\left(U^{(s)},V^{(s)}\right)$$
$$\omega_*^2=\varepsilon^k\omega_{*k}^2\ ,\ k=\overline{0,N} \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.2), применив правило Коши умножения рядов, получим следующую рекуррентную систему для определения неизвестных коэффициентов $\sigma_{ik}^{(s)}$, $U^{(s)}$, $V^{(s)}$, ω_{*k}^2

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_{*k}^2U^{(s-k)}=0 \qquad k=\overline{0,s}$$
$$\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s)}}{\partial\zeta}+\omega_{*k}^2V^{(s-k)}=0$$
$$\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22}^{(s)}+a_{16}\sigma_{12}^{(s)} \tag{2.4}$$
$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{12}\sigma_{11}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22}^{(s)}+a_{26}\sigma_{12}^{(s)}$$
$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{16}\sigma_{11}^{(s)}+a_{26}\sigma_{22}^{(s)}+a_{66}\sigma_{12}^{(s)}$$

$Q^{(m)}\equiv 0$ при $m<0$, обозначение $k=\overline{0,s}$ всегда означает, что по немому (повторяющемуся) индексу „k” происходит суммирование в пределах целочисленных значений $0,s$.

Из последних трех уравнений системы (2.4) напряжения можно выразить через перемещения

$$\sigma_{11}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[A_{26}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{22}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{26}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$
$$\sigma_{22}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[A_{66}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{16}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{16}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right] \tag{2.5}$$
$$\sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left[A_{11}\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{16}\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{26}\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{11}\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]$$

$A_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, $A_{22}=a_{22}a_{66}-a_{26}^2$, $A_{66}=a_{11}a_{66}-a_{16}^2$, $A_{12}=a_{12}a_{66}-a_{16}a_{26}$, $A_{16}=a_{11}a_{26}-a_{12}a_{16}$, $A_{26}=a_{12}a_{26}-a_{16}a_{22}$, $\Delta=A_{11}a_{66}-A_{16}a_{26}+A_{26}a_{16}$

Подставив (2.5) в первые два уравнения (2.4), для определения $U^{(s)},V^{(s)}$ получим систему

$$A_{11}\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}-A_{16}\frac{\partial^2V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\omega_{*k}^2U^{(s-k)}=R_u^{(s)}\ ,\ k=\overline{0,s}$$
$$-A_{16}\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+A_{66}\frac{\partial^2V^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\omega_{*k}^2V^{(s-k)}=R_v^{(s)} \tag{2.6}$$

где

$$R_u^{(s)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial \xi} - A_{26} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - A_{11} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta}$$
$$R_v^{(s)} = -\Delta \frac{\partial \sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial^2 U^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{16} \frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \qquad (2.7)$$

Для ортотропной полосы

$$A_{16} = 0\ ,\ A_{26} = 0\ ,\ A_{66} = a_{11}a_{66}\ ,\ \Delta = A_{11}a_{66} \qquad (2.8)$$

и система (2.6) распадается на два независимых при $s = 0$ уравнения

$$\frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}\omega_{*k}^2 U^{(s-k)} = \frac{1}{A_{11}} R_u^{(s)} \qquad (2.9)$$

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{A_{11}}{a_{11}}\omega_{*k}^2 V^{(s-k)} = \frac{1}{A_{66}} R_v^{(s)} \qquad (2.10)$$

Этот случай подробно рассмотрен в [7].

В частности, установлено, что условиям (1.3), (1.4) соответствуют собственные главные значения частот

$$\omega_{*on}^{I} = \frac{\pi}{4\sqrt{a_{66}}}\left(2n+1\right),\ \omega_{*on}^{II} = \frac{\pi}{4\sqrt{B_{11}}}\left(2n+1\right),\ n \in N$$
$$B_{11} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} = \frac{A_{11}}{a_{11}} \qquad (2.11)$$

и собственные функции

$$\psi_n^{I,II} = \sin\frac{\pi}{4}\left(2n+1\right)\left(1+\zeta\right) \qquad (2.12)$$

которые составляют ортонормированную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$.

Условиям (1.3), (1.5) относительно u_x соответствуют характеристические уравнения и главные значения $(s = 0)$ частот:

а) $\cos\sqrt{a_{66}}\,\omega_{*0} = 0,\quad \omega_{*0n}^{I} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a_{66}}}\left(2n+1\right) \qquad n \in N$ (2.13)

(симметричная задача)

б) $\sin\sqrt{a_{66}}\,\omega_{*0} = 0,\quad \omega_{*0n}^{I} = \dfrac{\pi n}{\sqrt{a_{66}}} \qquad n \in N$ (2.14)

(задача изгиба).

Собственными функциями являются

а) $\psi_n^I\left(\zeta\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta$, б) $\varphi_n^I\left(\zeta\right) = \sin \pi n \zeta$, (2.15)

которые также составляют ортонормированные системы.

Условиям $u_y\left(\pm h\right) = 0$ соответствуют

а) $\sin \omega_{*0}\sqrt{B_{11}} = 0,\quad \omega_{*0n}^{II} = \dfrac{\pi n}{\sqrt{B_{11}}}$, $n \in N$ (симметричная задача) (2.16) б) $\cos\omega_{*0}\sqrt{B_{11}}=0,\quad \omega_{*0n}^{II}=\dfrac{\pi(2n+1)}{2\sqrt{B_{11}}}\quad,\qquad n\in N$ (задача изгиба) (2.17)

и собственные функции $\varphi_n^I\left(\zeta\right)$ и $\psi_n^I\left(\zeta\right)$.

Частотам (2.13), (2.14) соответствуют собственные сдвиговые, а частотам (2.16), (2.17) – продольные колебания.

Будем считать, что $A_{16}\neq 0$, $A_{26}\neq 0$. Тогда система уравнений (2.6) должна быть решена совместно. Из этой системы $V^{(s)}$ можно выразить через $U^{(s)}$ по формуле

$$\Delta\omega_{*0}^2V^{(s)}=-\frac{A_{11}A_{66}-A_{16}^2}{A_{16}}\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{A_{66}}{A_{16}}\Delta\omega_{*0}^2U^{(s)}+$$
$$+\frac{A_{66}}{A_{16}}\left(R_u^{(s)}-\Delta\omega_{*m}^2U^{(s-m)}\right)+R_v^{(s)}-\Delta\omega_{*m}^2V^{(s-m)}\ ,\ m=\overline{1,s} \tag{2.18}$$

Подставив (2.18) в первое уравнение (2.6), получим уравнение для определения $U^{(s)}$

$$\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)\frac{\partial^4U^{(s)}}{\partial\zeta^4}+\left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta\omega_{*0}^2\frac{\partial^2U^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta^2\omega_{*0}^4U^{(s)}=$$
$$=\Delta\omega_{*0}^2\left(R_u^{(s)}-\Delta\omega_{*m}^2U^{(s-m)}\right)+A_{66}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(R_u^{(s)}-\Delta\omega_{*m}^2U^{(s-m)}\right)+ \tag{2.19}$$
$$+A_{16}\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(R_v^{(s)}-\Delta\omega_{*m}^2V^{(s-m)}\right),\ m=\overline{1,s}$$

Рассмотрим приближение $s=0$, ему соответствует

$$\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)\frac{\partial^4U^{(0)}}{\partial\zeta^4}+\left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta\omega_{*0}^2\frac{\partial^2U^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\Delta^2\omega_{*0}^4U^{(0)}=0 \tag{2.20}$$

Решением уравнения (2.20) является

$$U^{(0)}=A^{(0)}\sin\alpha_1\zeta+B^{(0)}\cos\alpha_1\zeta+C^{(0)}\sin\alpha_2\zeta+D^{(0)}\cos\alpha_2\zeta \tag{2.21}$$

где

$$\alpha_1=\beta_1\sqrt{\Delta}\omega_{*0}\ ,\ \alpha_2=\beta_2\sqrt{\Delta}\omega_{*0} \tag{2.22}$$

$$\beta_1^2=\frac{A_{11}+A_{66}-\sqrt{\left(A_{11}-A_{66}\right)^2+4A_{16}^2}}{2\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)},\ \beta_2^2=\frac{A_{11}+A_{66}+\sqrt{\left(A_{11}-A_{66}\right)^2+4A_{16}^2}}{2\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^2\right)}$$

β_1, β_2 – вещественные числа.

Согласно формулам (2.5), (2.18)

$$\sigma_{12}^{(0)}=\frac{1}{\Delta}\left[\left(A_{11}+A_{66}\right)\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta}+\frac{A_{11}A_{66}-A_{16}^2}{\Delta\omega_{*0}^2}\frac{\partial^3U^{(0)}}{\partial\zeta^3}\right]$$
$$\sigma_{22}^{(0)}=-\frac{1}{\Delta A_{16}}\left[A_{66}\frac{A_{11}A_{66}-A_{16}^2}{\Delta\omega_{*n}^2}\frac{\partial^3U^{(0)}}{\partial\zeta^3}+\left(A_{66}^2+A_{16}^2\right)\frac{\partial U^{(0)}}{\partial\zeta}\right] \tag{2.23}$$

$$\Delta\omega_{*0}^2 V^{(0)} = -\frac{1}{A_{16}}\left[\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial\zeta^2} + A_{66}\Delta\omega_{*0}^2 U^{(0)}\right]$$

Используя формулы (2.21), (2.23), удовлетворим условия (1.3), (1.4):

$$\sigma_{12}^{(0)}\left(\zeta = 1\right) = 0,\ \sigma_{22}^{(0)}\left(\zeta = 1\right) = 0,\ U^{(0)}\left(\zeta = -1\right) = 0,\ V^{(0)}\left(\zeta = -1\right) = 0 \quad (2.24)$$

получим следующую алгебраическую однородную систему:

$$\begin{aligned}
&A^{(0)}\sin\alpha_1 - B^{(0)}\cos\alpha_1 + C^{(0)}\sin\alpha_2 - D^{(0)}\cos\alpha_2 = 0\\
&A^{(0)}c_1\cos\alpha_1 - B^{(0)}c_1\sin\alpha_1 + C^{(0)}c_2\cos\alpha_2 - D^{(0)}c_2\sin\alpha_2 = 0\\
&A^{(0)}c_3\cos\alpha_1 - B^{(0)}c_3\sin\alpha_1 + C^{(0)}c_4\cos\alpha_2 - D^{(0)}c_4\sin\alpha_2 = 0\\
&A^{(0)}c_5\sin\alpha_1 - B^{(0)}c_5\cos\alpha_1 + C^{(0)}c_6\sin\alpha_2 - D^{(0)}c_6\cos\alpha_2 = 0
\end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned}
&c_1 = \beta_1\left(A_{11} + A_{66} - \beta_1^2 b_1^2\right), \quad c_2 = \beta_2\left(A_{11} + A_{66} - \beta_2^2 b_1^2\right),\\
&c_3 = \beta_1\left(A_{66}^2 + A_{16}^2 - A_{66}b_1^2\beta_1^2\right),\ c_4 = \beta_2\left(A_{66}^2 + A_{16}^2 - A_{66}b_1^2\beta_2^2\right),\\
&c_5 = \left(b_1^2\beta_1^2 - A_{66}\right),\ c_6 = \left(b_1^2\beta_2^2 - A_{66}\right),\ b_1^2 = A_{11}A_{66} - A_{16}^2.
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Систему (2.25) можно свести к двум алгебраическим системам относительно $A^{(0)}$, $B^{(0)}$ и $C^{(0)}$, $D^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
&A^{(0)}\sin\alpha_1 - B^{(0)}\cos\alpha_1 = 0\\
&A^{(0)}\cos\alpha_1 - B^{(0)}\sin\alpha_1 = 0
\end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
&C^{(0)}\cos\alpha_2 - D^{(0)}\sin\alpha_2 = 0\\
&C^{(0)}\sin\alpha_2 - D^{(0)}\cos\alpha_2 = 0
\end{aligned} \quad (2.28)$$

Для существования ненулевых решений систем (2.27) и (2.28) необходимо, чтобы их определители были равны нулю. В результате будем иметь следующие уравнения и соответствующие им значения частот:

$$\cos 2\alpha_1 = 0,\ \alpha_1 = \frac{\pi}{4}\left(2n+1\right),\ \omega_{*0n}^{I} = \frac{\pi}{4\beta_1\sqrt{\Delta}}\left(2n+1\right),\ n \in N, \quad (2.29)$$

$$\cos 2\alpha_2 = 0,\ \alpha_2 = \frac{\pi}{4}\left(2m+1\right),\ \omega_{*0m}^{II} = \frac{\pi}{4\beta_2\sqrt{\Delta}}\left(2m+1\right),\ n \in N \quad (2.30)$$

Учитывая (2.29), (2.30), из (2.27) и (2.28) будут следовать

$$B_n^{(0)} = A_n^{(0)} tg\alpha_1 = A_n^{(0)} tg\frac{\pi}{4}\left(2n+1\right) = \left(-1\right)^n A_n^{(0)}$$

$$C_m^{(0)} = \left(-1\right)^m D_m^{(0)} \quad (2.31)$$

Таким образом, в полосе с общей анизотропией возникают два типа собственных колебаний с частотами, соответственно (2.29), (2.30), которым будут соответствовать собственные функции

$$U_{nI}^{(0)} = A_n^{(0)}\left(\xi\right)\psi_n\left(\zeta\right),\ \psi_n\left(\zeta\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\frac{\pi}{4}\left(2n+1\right)\zeta + \left(-1\right)^n\cos\frac{\pi}{4}\left(2n+1\right)\zeta\right]$$

$$U_{nII}^{(0)} = C_n^{(0)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin \alpha_2 \zeta + \left(-1\right)^n \cos \alpha_2 \zeta \right] = C_n^{(0)} \psi_n \left(\zeta\right) \tag{2.32}$$

Легко убедиться, что функции $\psi_n\left(\zeta\right)$ составляют ортонормированную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$.

Отметим, что в отличие от случая ортотропной полосы, собственные колебания анизотропной полосы в силу (2.29), (2.30), (2.22), (2.5) не являются чисто сдвиговыми или чисто продольными.

Напряжения и перемещения $V^{(0)}$ будут определены по формулам (2.5), (2.23).

3. **О приближениях** $s \ge 1$. При $s = 1$ необходимо решать уравнение (2.19) для каждой из групп значений, собственных частот ω_{*0n}^{I} , ω_{*0n}^{II}. Для $s = 1$ уравнение (2.19) записывается

$$\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)\frac{\partial^4 U^{(1)}}{\partial\zeta^4} + \left(A_{11} + A_{66}\right)\Delta\omega_{*0}^2 \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial\zeta^2} + \Delta^2\omega_{*0}^4 U^{(1)} + \tag{3.1}$$

$$+\Delta\omega_{*1}^2 \left(\Delta\omega_{*0}^2 U^{(0)} + A_{66}\frac{\partial^2 U^{(0)}}{\partial\zeta^2} + A_{16}\frac{\partial^2 V^{(0)}}{\partial\zeta^2} \right) = \Delta\omega_{*0}^2 R_u^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(A_{66}R_u^{(1)} + A_{16}R_v^{(1)}\right)$$

где

$$R_u^{(1)} = -\Delta\frac{\partial\sigma_{11}^{(0)}}{\partial\xi} - \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\left(A_{26}U^{(0)} + A_{11}V^{(0)}\right),$$

$$R_v^{(1)} = -\Delta\frac{\partial\sigma_{12}^{(0)}}{\partial\xi} + \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\left(A_{12}U^{(0)} + A_{16}V^{(0)}\right), \tag{3.2}$$

$$\sigma_{11}^{(0)} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[A_{26}U^{(0)} - A_{12}V^{(0)}\right],\quad \sigma_{12}^{(0)} = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[A_{11}U^{(0)} - A_{16}V^{(0)}\right]$$

Пусть $\omega_{*0n} = \omega_{*0n}^{I} = \dfrac{\pi}{4\beta_1\sqrt{\Delta}}\left(2n+1\right)$.

Уравнение (3.1) запишем в виде

$$\left(A_{11}A_{66} - A_{16}^2\right)\frac{\partial^4 U_{nI}^{(1)}}{\partial\zeta^4} + \left(A_{11} + A_{66}\right)\Delta(\omega_{*0n}^{I})^2 \frac{\partial^2 U_{nI}^{(1)}}{\partial\zeta^2} + $$

$$+\Delta^2(\omega_{*0n}^{I})^4 U_{nI}^{(1)} + \Delta(\omega_{*1n}^{I})^2 \cdot f_{nI}^{(0)} = R_{uvnI}^{(1)} \tag{3.3}$$

$$f_{nI}^{(0)} = \Delta(\omega_{*0n}^{I})^2 U_{nI}^{(0)} + A_{66}\frac{\partial^2 U_{nI}^{(0)}}{\partial\zeta^2} + A_{16}\frac{\partial^2 V_{nI}^{(0)}}{\partial\zeta^2}$$

$$R_{uvnI}^{(1)} = \Delta(\omega_{*0n}^{I})^2 R_{unI}^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\left(A_{66}R_{unI}^{(1)} + A_{16}R_{vnI}^{(1)}\right) \tag{3.4}$$

Используя формулы (2.23), (2.32), (3.2), (3.4), будем иметь

$$f_{nI}^{(0)} = \left(\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2 - \frac{A_{11}A_{66} - A_{16}^2}{\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^2}\alpha_{1n}^4 \right) A_n^{(0)}\left(\xi\right)\psi_n\left(\zeta\right)$$

$$R_{uvnI}^{(1)}=\frac{1}{A_{16}}\Big\{\Big[A_{66}\left(A_{11}-A_{12}\right)-2A_{16}A_{26}\Big]\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{2}+$$

$$+\Big[\left(A_{11}-A_{12}\right)\left(2A_{16}^{2}-A_{11}A_{66}-A_{66}^{2}\right)+2A_{16}A_{66}\left(A_{26}+A_{16}\right)\Big]\alpha_{1n}^{2}+ \tag{3.5}$$

$$+\frac{1}{\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{2}}\Big[A_{66}\left(A_{11}-A_{12}\right)-2A_{16}^{2}\Big]\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^{2}\right)\alpha_{1n}^{4}\Big\}\cdot\Big[A_{n}^{(0)}\left(\xi\right)\Big]'\psi_{n}'\left(\zeta\right)$$

Поскольку функции $\left\{\psi_n\left(\zeta\right)\right\}$ составляют ортонормированную систему, $U_{nI}^{(1)}$ будем искать в виде ряда по этим функциям [8,9]:

$$U_{nI}^{(1)}=a_{mn}^{(1)}\left(\xi\right)\psi_m\left(\zeta\right)\quad m=\overline{0,\infty} \tag{3.6}$$

Подставив (3.6) в (3.3), умножив обе части полученного уравнения на $\psi_k\left(\zeta\right)$ и проинтегрировав в пределах $-1\le\zeta\le 1$, с учетом (3.5), получим

$$\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^{2}\right)a_{mn}^{(1)}\alpha_{1m}^{4}\delta_{mk}-\left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{2}a_{mn}^{(1)}\alpha_{1m}^{2}\delta_{mk}+ \tag{3.7}$$

$$+\Delta^{2}\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{4}a_{mn}^{(1)}\delta_{mk}+\Delta\left(\omega_{*1n}^{I}\right)^{2}\left[\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{2}-\frac{A_{11}A_{66}-A_{16}^{2}}{\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{2}}\alpha_{1n}^{4}\right]A_{n}^{(0)}\delta_{nk}=\left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_{k}$$

где δ_{mk} – символ Кронекера, а

$$\left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_{k}=\int_{-1}^{1}R_{uvnI}^{(1)}\psi_k\left(\zeta\right)d\zeta \tag{3.8}$$

При $k\neq n$ в (3.7) четвертое слагаемое обращается в нуль и имеем

$$a_{kn}^{(1)}=\frac{\left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_{k}}{\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^{2}\right)a_{1k}^{4}-\left(A_{11}+A_{66}\right)\Delta\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{2}a_{1k}^{2}+\Delta^{2}\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{4}} \tag{3.9}$$

При $k=n\neq m$ из (3.7) вытекает

$$\left(\omega_{*1n}^{I}\right)^{2}=\frac{\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{2}\left(R_{uvnI}^{(1)}\right)_{n}}{\left[\Delta^{2}\left(\omega_{*0n}^{I}\right)^{4}-\left(A_{11}A_{66}-A_{16}^{2}\right)\alpha_{1n}^{4}\right]A_{n}^{(0)}} \tag{3.10}$$

Таким образом, определены $a_{kn}^{(1)}$ при $k\neq n$ и $\omega_{*1n}^{(I)}$. Остается определить $a_{nn}^{(1)}$. Для его определения используем условие нормировки [8,9] :

$$\frac{1}{\left\|U_{nI}^{(0)}\right\|^{2}}\int_{-1}^{+1}\left(U_{nI}^{(0)}+\varepsilon U_{nI}^{(1)}\right)^{2}d\zeta=1 \tag{3.11}$$

из (3.11) следуют условия

$$\frac{1}{\left\|U_{nI}^{(0)}\right\|^{2}}\int_{-1}^{1}\left(U_{nI}^{(0)}\right)^{2}d\zeta=1 \tag{3.12}$$

$$\int_{-1}^{1} U_{nI}^{(0)} U_{nI}^{(1)} d\zeta = 0 \tag{3.13}$$

Условие (3.12) выполняется тождественно, а (3.13) записывается в виде

$$\int_{-1}^{1} a_{nn}^{(1)} \psi_n \psi_n d\zeta = 0 \tag{3.14}$$

откуда следует, что $a_{nn}^{(1)} = 0$.

Из (3.5), (3.8) следует, что $(R_{uvnI}^{(1)})_k \neq 0, \quad (R_{uvnI}^{(1)})_n \neq 0$.

Следовательно, $U_{nI}^{(1)} \neq 0$, $\omega_{*1n}^{(I)} \neq 0$.

Ограничившись первыми двумя приближениями, будем иметь

$$U_{nI} = U_{nI}^{(0)} + \varepsilon U_{nI}^{(1)} \quad , \quad \omega_{*n}^{(I)} = \omega_{*0n}^{I} + \varepsilon \omega_{*1n}^{I} \tag{3.15}$$

Отметим, что для ортотропной полосы [7] $U_{nI}^{(1)} = 0$, $\omega_{*1n}^{I} = 0$, т.е. поправка имеет порядок $0\left(\varepsilon^2\right)$, в то время, как в случае общей анизотропии поправка порядка $0\left(\varepsilon\right)$.

Аналогичным образом рассматриваются приближения $s \geq 2$, а также случаи, соответствующие значениям ω_{*0n}^{II}.

4. Основные соотношения, соответствующие условиям (1.3), (1.5). Используя формулы (2.21), (2.23), удовлетворим условиям (1.3), (1.5).

Удовлетворение этим условиям приводит к решению следующих алгебраических систем

$$\begin{cases} A^{(0)} \sin\alpha_1 + C^{(0)} \sin\alpha_2 = 0 \\ c_5 A^{(0)} \sin\alpha_1 + c_6 C^{(0)} \sin\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} B^{(0)} \cos\alpha_1 + D^{(0)} \cos\alpha_2 = 0 \\ c_5 B^{(0)} \cos\alpha_1 + c_6 D^{(0)} \cos\alpha_2 = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Из (4.1) следуют:

а)
$$\begin{gathered} \sin\alpha_1 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_1 = \pi n, \ \ \omega_{*on}^{I} = \frac{\pi n}{\beta_1 \sqrt{\Delta}} \ , \ n \in N \\ U_I^{(0)} = A^{(0)} \sin \pi n \zeta \ , \quad B^{(0)} = C^{(0)} = D^{(0)} \equiv 0 \end{gathered} \tag{4.3}$$

б)
$$\begin{gathered} \sin\alpha_2 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_2 = \pi m, \ \ \omega_{*om}^{II} = \frac{\pi m}{\beta_2 \sqrt{\Delta}} \ , \ m \in N \\ U_{II}^{(0)} = C^{(0)} \sin \pi m \zeta \ , \quad A^{(0)} = B^{(0)} = D^{(0)} \equiv 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

а из (4.2) имеем

в)
$$\begin{gathered} \cos\alpha_1 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}(2n+1), \ \ \omega_{*on}^{III} = \frac{\pi}{2\beta_1 \sqrt{\Delta}}(2n+1) \ , \ n \in N \\ U_{III}^{(0)} = B^{(0)} \cos\alpha_1 \zeta = B^{(0)} \cos\frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta, \ \ A^{(0)} = C^{(0)} = D^{(0)} \equiv 0 \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\cos\alpha_2 = 0 \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2}(2m+1), \quad \omega_{*om}^{IV} = \frac{\pi}{2\beta_2\sqrt{\Delta}}(2m+1), \; m \in N$$

г) (4.6)

$$U_{IV}^{(0)} = D^{(0)} \cos\frac{\pi}{2}\left(2m+1\right)\zeta, \; A^{(0)} = B^{(0)} = C^{(0)} \equiv 0$$

Функции $\left\{\sin \pi n\zeta\right\}$ составляют ортонормированную систему на интервале $-1 \le \zeta \le 1$. Таким же свойством обладают функции $\left\{\cos\frac{\pi}{2}\left(2n+1\right)\zeta\right\}$.

Приближения $s \ge 1$ рассматриваются изложенным в п.3 способом.

Качественная картина напряженно-деформированного состояния аналогична.

Аналогичным образом рассматриваются собственные колебания анизотропной полосы, порожденные другими вариантами граничных условий при $y = \pm h$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.//Изв. ВУЗ-ов РФ, Северо-Кавказский регион. Естеств.науки. 2000. №3. С.8-11.
2. Агаловян Л.А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. //Междунар. научн. журнал. Прикл. Механика. 2002. Т.38. №7. С.3-24.
3. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин.//В сб.:Механика оболочек и пластин (Тр.XIX Международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд. Нижегородского университета. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
4. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. //ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
5. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией. //В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд.„Гитутюн” НАН Армении. Ереван. 2006. С.42-49.
6. Агаловян М.Л. О характере вынужденных колебаний пластин при общей анизотропии. //В сб.: XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды. Изд. Саратовского университета. 2007. С.14-18.
7. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы. //Докл. НАН Армении. 2003. Т.103. №4. С.296-300.
8. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир,1976. 455с.
9. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
5.05.2009