ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

АНТИПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОГО ПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНАМИ ПРИ СМЕШАННЫХ УСЛОВИЯХ

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Акопян Л.В.

Ключевые слова: антиплоское напряженное состояние, сингулярное интегральное уравнение.
Key words: anti-plane stress state, singular integral equation.

Վ.Ն.Հակոբյան, Լ.Լ.Դաշտոյան, Լ.Վ.Հակոբյան
Ճաք պարունակող բաղադրյալ տարածության հակահարթ լարվածային վիճակը խառը պայմանների դեպքում

Ուսումնասիրված է առաձգական կիսատարածությունից և մեկ այլ նյութից պատրաստված երկու քառորդ տարածություններից կազմված բաղադրյալ տարածության լարվածային վիճակը, երբ նրանց միացման հարթության մեջ առկա է վերջավոր երկարությամբ ճաք, որի ափերին տրված են խառը պայմաններ:

Խնդիրը բերվել է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների և կառուցվել է նրա փակ լուծումը:

V.N.Hakobyan, L.L.Dashtoyan, L.V.Hakobyan
On Anti-plane Stress State of Compound Space with Crack Under Mixed Conditions

In present work the anti-plane stress state of compound space, consisting of elastic half-space and two quarter-spaces is considered. There is a finite-length crack under mixed conditions on banks, in junction plane of half-space and quarter-spaces.

The problem is reduced to singular integral equations and the closed solution is built.

В настоящей работе методом сингулярного интегрального уравнения построено замкнутое решение задачи об антиплоском напряженном состоянии составного пространства, полученного при помощи соединения упругого полупространства с двумя одинаковыми четверть-пространствами, когда на плоскости стыка полупространства с четверть-пространствами имеется магистральная трещина конечной длины, на берегах которой заданы смешанные условия.

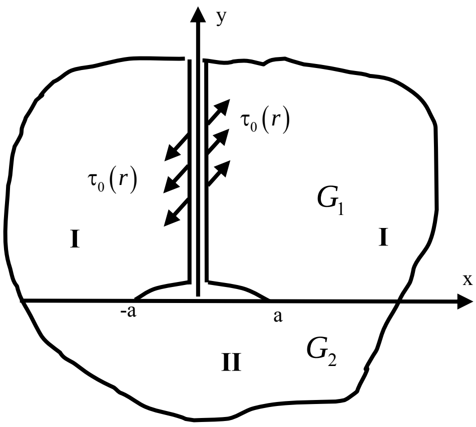
Исследованию напряженно-деформируемого состояния однородных и составных массивных тел с трещинами, когда на берегах трещины заданы условия смешанного типа, посвящен ряд работ, среди которых отметим [3-5], непосредственно связанных с нижерешенной задачей.

1. Постановка задачи и вывод определяющей системы уравнений. Пусть составное пространство, состоящее из упругого полупространства и двух одинаковых четверть-пространств, изготовленных из другого материала, на плоскости стыка полупространств с четверть-пространствами содержит конечную магистральную трещину длиной $2a$, симметрично расположенную по отношению свободных краев четверть-пространств.

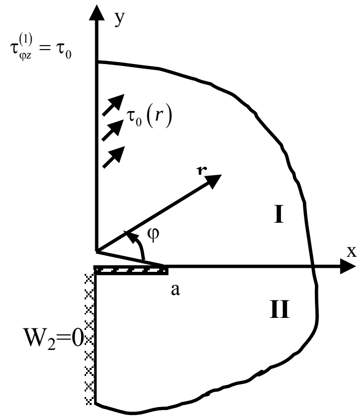
Считается, что нижний берег конечной трещины жестко защемлен, верхний берег свободен от напряжений, а составное пространство деформируется под воздействием одинаковых, противоположно направленных касательных нагрузок $\tau_0(r)$, действующих на свободных граничных полуплоскостях четверть-пространств (фиг.1).

Учитывая кососимметричность поставленной задачи относительно оси OY, рассмотрим только правое полупространство $\{\ 0 \le x, y \le \infty, \quad -\infty < z < \infty\ \}$ (фиг.2).

Тогда поставленную задачу в полярной системе координат можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:



Фиг.1



Фиг.2

$$\begin{aligned}
&\tau_{\varphi z}^{(1)}\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=\tau_0(r),\ W_2\left(r,-\frac{\pi}{2}\right)=0 && (0<r<\infty)\\
&\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0),\ W_1(r,0)=W_2(r,0) && (a<r<\infty) \qquad (1.1)\\
&\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=0,\quad W_2(r,0)=0 && (0<r<a)
\end{aligned}$$

Здесь $W_j(r,0)$ $(j=1,\,2)$ – компоненты смещения точек соответственно верхнего и нижнего четверть-пространств, каждая из которых в области своего определения удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 W_j}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial W_j}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W_j}{\partial \varphi^2}=0$$

$\tau_{\varphi z}^{(j)}(r,\varphi)$ – компоненты касательных напряжений, действующие в четверть-пространствах и связанные со смещениями по известным формулам:

$$\tau_{\varphi z}^{(j)}(r,\varphi)=-\frac{G_j}{r}\frac{\partial W_j(r,\varphi)}{\partial \varphi}, \qquad (1.2)$$

где G_j –модули сдвига соответствующих четверть-пространств.

Ставится задача: определить раскрытие конечной трещины и коэффициент интенсивности напряжений в ее концевой точке.

Для решения поставленной задачи введем в рассмотрение функции скачков напряжений и разности смещений берегов трещины:

$$\begin{gathered}
\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)-\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0)=\begin{cases}\tau(r), & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}\\
W_1(r,0)-W_2(r,0)=\begin{cases}W(r), & 0<r<a\\ 0, & r>a\end{cases}
\end{gathered} \qquad (1.3)$$

Добавим к (1.3) первые четыре условия (1.1) и выразим напряжения и смещения через функции скачков напряжений $\tau(r)$ и разности смещений берегов трещины $W(r)$.

Для этого решения уравнений Лапласа в соответствующих четверть-пространствах представим в виде интегралов Меллина:

$$W_j\left(r,\varphi\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[A_j\sin\varphi s+B_j\cos\varphi s\right]r^{-s}ds$$

$$\left(-1<c<0;\;\; j=1,2\right)$$

Удовлетворяя первым четырем условиям (1.1), неизвестные коэффициенты A_j и B_j $\left(j=1,\,2\right)$ выразятся через функции скачков напряжений $\tau\left(r\right)$ и разности смещений $W\left(r\right)$.

Затем, удовлетворяя последним двум условиям (1.1), первоначально дифференцируя второе из них по r, для определения функций $\tau\left(r\right)$ и $W^{/}\left(r\right)$ придем к следующей системе сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{G_1}\displaystyle\int\limits_0^a K_{11}\left(r,r_0\right)\tau\left(r_0\right)dr_0-\int\limits_0^a K_{12}\left(r,r_0\right)W^{/}\left(r_0\right)dr_0=f_1\left(r\right)\\ \displaystyle\int\limits_0^a K_{12}\left(r,r_0\right)\tau\left(r_0\right)dr_0-G_1G\int\limits_0^a K_{11}\left(r,r_0\right)W^{/}\left(r_0\right)dr_0=f_2\left(r\right)\end{cases}\qquad(1.4)$$

$$\left(0<r<a\right),$$

где

$$K_{11}\left(r,r_0\right)=\frac{1}{4\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sin\pi s}{\Delta\left(s\right)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^s ds,$$

$$K_{12}\left(r,r_0\right)=\frac{1}{2\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi s}{2}}{\Delta\left(s\right)}\left(\frac{r_0}{r}\right)^s ds,$$

$$f_1\left(r\right)=\frac{1}{2\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\overline{\tau_0}\left(s\right)\sin\frac{\pi s}{2}}{G_1\Delta\left(s\right)}r^{-s}ds,$$

$$f_2\left(r\right)=\frac{G}{2\pi ir}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\overline{\tau_0}\left(s\right)\cos\frac{\pi s}{2}}{\Delta\left(s\right)}r^{-s}ds,$$

$$\overline{\tau_0}\left(s\right)=\int\limits_0^\infty\tau_0\left(r\right)r^s ds,$$

$$\Delta\left(s\right)=G\cos^2\frac{\pi s}{2}-\sin^2\frac{\pi s}{2},\qquad G=\frac{G_2}{G_1}.$$

Полученную систему нужно рассматривать совместно с условиями

$$W\left(a\right)=0,\quad W\left(0\right)<\infty,\qquad \tau\left(0\right)<\infty.\qquad(1.5)$$

2. Решение системы определяющих уравнений. Перейдем к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.4).

С этой целью, следуя работе [6], второе из этих уравнений умножим на $\lambda \neq 0$ и просуммируем с первым.

Получим

$$\int_0^a K_{11}(r,r_0)\left[\tau(r_0)-\lambda G W_*^/(r_0)\right]dr_0 + \\ +\lambda\int_0^a K_{12}(r,r_0)\left[\tau(r_0)-\frac{1}{\lambda}W_*^/(r_0)\right]dr_0 = G_1 f_1(r)+\lambda f_2(r) \tag{2.1}$$

$$\left(W_*^/(r)=G_1 W^/(r) \right).$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при $W_*(r)$ были равны, т.е. $\lambda G = \dfrac{1}{\lambda}$.

Тогда, приняв в (2.1) поочередно $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{G}}$ и $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}$, придем к следующим двум независимым интегральным сингулярным уравнениям:

$$\int_0^a \left[K_{11}(r,r_0) \pm \left(\sqrt{G}\right)^{-1} K_{12}(r,r_0)\right]\varphi_\mp(r_0)\,dr_0 = F_\mp(r),\ 0<r<a \tag{2.2}$$

где
$$F_\mp(r) = G_1 f_1(r) \pm \sqrt{G}^{-1} f_2(r),$$
$$\varphi_\mp(r) = \tau(r) \mp \sqrt{G} W_*^/(r).$$

После ряда математических выкладок уравнения (2.2) примут следующий вид:

$$\varphi_-(r) + \frac{2\sqrt{G}}{\pi}\int_0^a \frac{r^{1-\alpha} r_0^{\alpha}\varphi_-(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0 = -(G+1)\sqrt{G}F_-(r), \tag{2.3}$$

$$\varphi_+(r) - \frac{2\sqrt{G}r^{\alpha-1}}{\pi}\int_0^a \frac{r_0^{2-\alpha}\varphi_+(r_0)}{r_0^2-r^2}dr_0 = (G+1)\sqrt{G}F_+(r). \tag{2.4}$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1-G}{1+G}.$$

При этом, решения уравнений (2.3) и (2.4) должны быть ограниченными в точке $r=0$. Переходя в (2.3) и (2.4) к новым переменным по формулам

$$r_0^2 = a^2 s;\ \ r^2 = a^2 x$$

и вводя функции

$$\psi_-(x) = x^{\frac{\alpha-1}{2}} \varphi_-\left(a\sqrt{x}\right),$$

$$\psi_+(x) = x^{\frac{1-\alpha}{2}} \varphi_+\left(a\sqrt{x}\right),$$

$$x^{\frac{\alpha-1}{2}} (G+1)\sqrt{G} F_-\left(a\sqrt{x}\right) = F_-^*(x),$$

$$x^{\frac{1-\alpha}{2}} (G+1)\sqrt{G} F_+\left(a\sqrt{x}\right) = F_+^*(x),$$

уравнения (2.3) и (2.4) можно записать в виде

$$\psi_-(x) + \frac{\sqrt{G}}{\pi} \int_0^1 \frac{\psi_-(s)}{s-x} ds = -F_-^*(x), \tag{2.5}$$

$$\psi_+(x) - \frac{\sqrt{G}}{\pi} \int_0^1 \frac{\psi_+(s)}{s-x} ds = F_+^*(x). \tag{2.6}$$

При этом, $\psi_\pm(0) < \infty$.

Решения уравнений (2.5) и (2.6), ограниченные в точке $x = 0$, запишутся в следующем виде [1]:

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{1-q_\pm^2} \left\{ \pm F_+^*(x) \pm \frac{q_\pm \omega_\pm(x)}{\pi i} \int_0^1 \frac{F_\pm^*(s)\, ds}{\omega_\pm(s)(s-x)} \right\}, \quad (0 < x < 1), \tag{2.7}$$

где $\quad q_\pm = \pm i\sqrt{G}$, $X_j(z) = \left(\dfrac{z}{z-1} \right)^{1-\gamma_j}$

$$\omega_+(x) = X_1^+(x), \quad \omega_-(x) = X_2^+(x)$$

$$\gamma_j = \frac{\ln|g_i|}{2\pi i} + \frac{\vartheta_j}{2\pi}, \quad g_1 = \frac{1+q_+}{1-q_+}, \quad g_2 = \overline{g_1}$$

$$0 \le \vartheta_j = \arg g_j \le 2\pi \quad (j = 1, 2).$$

После определения функций $\psi_\pm(x)$ легко найти функцию скачка напряжений $\tau(r)$ и производную функции раскрытия трещины по формулам

$$\tau(r)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha-1}\psi_+\left(\frac{r^2}{a^2}\right)+\left(\frac{r}{a}\right)^{1-\alpha}\psi_-\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{G}\left(F_+(r)-F_-(r)\right)}{2}+ \tag{2.8}$$

$$+\frac{G}{\pi}\int_0^a\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_+^*(r)F_+(r_0)}{\omega_+^*(r_0)}+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_-^*(r)F_-(r_0)}{\omega_-^*(r_0)}\right\}\frac{r_0dr_0}{r_0^2-r^2},$$

$$W'(r)=\frac{1}{2G_1\sqrt{G}}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^{\alpha-1}\psi_+\left(\frac{r^2}{a^2}\right)-\left(\frac{r}{a}\right)^{1-\alpha}\psi_-\left(\frac{r^2}{a^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{F_+(r)+F_-(r)}{2\sqrt{G}\cdot G_1}+ \tag{2.9}$$

$$+\frac{1}{\pi G_1}\int_0^a\left\{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_+^*(r)F_+(r_0)}{\omega_+^*(r_0)}-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\alpha}\frac{\omega_-^*(r)F_-(r_0)}{\omega_-^*(r_0)}\right\}\frac{r_0dr_0}{r_0^2-r^2}.$$

Здесь

$$\omega_+^*(r)=-\sqrt{g_1}\left(\frac{r^2}{a^2-r^2}\right)^{1-\gamma_1};\quad \omega_-^*(r)=-\sqrt{g_2}\left(\frac{r^2}{a^2-r^2}\right)^{1-\gamma_2}.$$

Отсюда при помощи интегрирования, учитывая условие $W(a)=0$, для функции раскрытия трещины получим следующее выражение:

$$W(r)=\int_r^a W'(r)\,dr. \tag{2.10}$$

Далее, чтобы определить коэффициент интенсивности контактных напряжений в концевой точке трещины, выразим напряжения при помощи функций $\psi_\pm(x)$.

Тогда, имеем

$$\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=-\frac{\sqrt{G}}{2\pi(G+1)}\left[x^{\frac{\alpha-1}{2}}\int_0^1\frac{\psi_+(s)ds}{s-x}+x^{\frac{1-\alpha}{2}}\int_0^1\frac{\psi_-(s)ds}{s-x}\right]+f_2(r)$$

$$\left(x=\frac{r^2}{a^2};\ r>a\right). \tag{2.11}$$

Пусть $G<1$, тогда $1-\gamma_1>1-\gamma_2$. Следовательно, в точке $x=1$ доминирующим является первое слагаемое в (2.11).

Тогда, подставляя значение $\psi_+(x)$ из формулы (2.7) в (2.11) и проделав некоторые математические упрощения, получим

$$\tau_{\varphi z}^{(2)}(r,0)=\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=$$

$$=\frac{Gr^{1+\alpha-2\gamma_1}}{\pi\sqrt{G+1}\,a^{\alpha-1}\left(r^2-a^2\right)^{1-\gamma_1}}\cdot\int_0^a\frac{sF_+(s)\,ds}{\omega\left(\frac{s^2}{a^2}\right)\left(s^2-r^2\right)}+F_{**}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \quad (2.12)$$

$(a<r<\infty)$.

Здесь $F_{**}\left(\frac{r^2}{a^2}\right)$ – регулярная функция.

Используя (2.12), вычислим коэффициент концентраций напряжений в точке $r=a$.

$$K_{III}(a)=\sqrt{2\pi}\lim_{r\to a+0}(r-a)^{1-\gamma_j}\,\tau_{\varphi z}^{(1)}(r,0)=$$

$$=-\frac{\sqrt{2\pi}Ga^{1-\gamma_1}}{\pi\sqrt{G+1}\cdot 2^{1-\gamma_1}}\int_0^a\frac{s^{2\gamma_1-1}F_+(s)\,ds}{\left(a^2-s^2\right)^{\gamma_1}}. \quad (2.13)$$

Заметим, что в случае однородного пространства, т.е. тогда $G=1$, для коэффициента концентрации напряжений имеем

$$K_{III}(a)=\frac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\pi}2^{3/4}}\int_0^1\frac{F_+(s)\,ds}{\sqrt{s}\left(a^2-s^2\right)^{\frac{1}{4}}},$$

что совпадает с полученным в [5] результатом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402с.
3. Акопян В.Н., Саакян А.В. О напряженном состоянии упругой плоскости с полубесконечным разрезом, перпендикулярно выходящим на жесткое включение конечной длины. /В сб.: “Проблемы механики деформируемого твердого тела”, посв. 85-летию акад. НАН РА С.А.Амбарцумяна. Ереван-2007, с. 16-25.
4. Hakobyan V.N. The mixed problem for anisotropic compound wedge with crack. Coll. “Modern problems of deformable bodies mechanics”, Yerevan – 2005, pp.114-124.
5. Даштоян Л.Л., Акопян Л. В. Антиплоское напряженное состояние пространства с трещинами при смешанных условиях на одном берегу. //Тр.VI международной конференции «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 2008. С. 224 – 229.
6. Акопян В. Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Изв. НАН РА. Механика. 1995. Т.48, N: 4. С.57-65.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
8.12.2008