ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №4, 2009 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМИ НАКЛАДКАМИ

Агабекян П.В., Гулян К.Г.

Ключевые слова: накладка, деформация, контактные напряжения, преобразование, ортогональные многочлены.
Key words: stringer, deformation, contact stresses, transformation, orthogonal polynomials.

Պ.Վ. Աղաբեկյան, Կ.Գ. Ղուլյան
Կոնտակտային խնդիր, երկու կիսաանվերջ վերադիրներով ուժեղացված կիսաանվերջ սալի համար

Աշխատանքում դիտարկվում է կիսաանվերջ վերադիրներով ուժեղացված կիսաանվերջ սալի խնդիր: Կիսաանվերջ սալը դեֆորմացվում է վերադիրների ծայրերին կիրառված ուժերի ազդեցության տակ:
Ֆուրյեի ձևափոխությունների օգնությամբ, խնդիրը բերվում է վերադիրների միջև գտնվող միջանկյալ հատվածի դեֆորմացիաների նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:
Այնուհետև սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծումը, Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների օգնությամբ բերվում է քվազիլիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի լուծմանը:
Ստացված են անվերջությունում կոնտակտային լարումների վարքը բնութագրող խարակտերիստիկ բանաձևեր:

P.V. Aghabekyan, K.G. Goulyan
Contact problem for a semi-infinite plate, fastened by two semi–infinite stringers

In the paper a contact problem for a semi–infinite plate, fastened by two semi–infinite stringers is considered. The semi–infinite plate is deformed under the action of the forces, applied at the end points of the stringers.
With the help of Fourie transformations, the problem is reduced to the solution of the singular integral equations, relative to the deformation of the intermediate interval between the stringers. Later on, the solution of the singular integral equation with the help of Chebishev orthogonal polynomials is reduced to the solution of quasi–totally regular infinite systems of linear algebraic equations.
The asymptotic formulae, characterizing the behaviour of tangential contact stresses at the points at infinity, are obtained.

В работе рассматривается контактная задача для полубесконечной пластины, усиленной двумя полубесконечными накладками. Полубесконечная пластина деформируется под действием сил, приложенных на концах накладок.
С помощью преобразования Фурье задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно деформации промежуточного интервала между накладками. Далее решение сингулярного интегрального уравнения с помощью ортогональных многочленов Чебышева сводится к решению квазивполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.
Получены асимптотические формулы, характеризующие поведение тангенциальных контактных напряжений в бесконечно удаленных точках.

Пусть полубесконечная пластина с двумя полубесконечными накладками деформируется под действием сил P_1 и P_2, приложенных, соответственно, на левом и правом концах накладок и направленных вдоль накладок. Причем, накладки параллельны границе пластины и находятся на одной линии. Относительно накладок принимается во внимание модель контакта по линии, то есть предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1].

А относительно упругой полубесконечной пластины принимается, что она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния.

Считается, что накладки не сопротивляются изгибу.

Задача заключается в определении контактных тангенциальных напряжений, действующих под накладками.

Рассматриваемую задачу представим в виде суммы четной и нечетной задач.

1. Четная задача. В случае чётной задачи, силы, действующие на концах накладок, равны $Q_1 = \dfrac{P_1 + P_2}{2}$ и имеют одинаковые направления.

Решение задачи строится методом, изложенным в [2]. Имея в виду вышесказанное, уравнения равновесия накладок запишутся в виде:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = \frac{\tau_1(x)}{E_1 F_1}; \quad |x| > a \tag{1.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=-a} = \frac{Q_1}{E_1 F_1}; \quad \left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=a} = -\frac{Q_1}{E_1 F_1}, \tag{1.2}$$

где $u_1(x)$ – перемещение точек накладок, $\tau_1(x)$ – интенсивность тангенциальных контактных сил, F_1 – площадь поперечного сечения накладок, E_1 – модуль упругости накладок, Q_1 – сосредоточенная сила, действующая на концах накладок.

Уравнения равновесия (1.1) при условии (1.2) с помощью обобщённых функций можно записать в виде одного уравнения в следующем виде:

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{\tau_1^*(x)}{E_1 F_1} - \frac{Q_1}{E_1 F_1}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right], \quad -\infty < x < \infty \tag{1.3}$$

где

$$U_1(x) = \left[\theta(-x-a) + \theta(x-a)\right]\frac{du_1}{dx}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$\tau_1^*(x) = \left[\theta(-x-a) + \theta(x-a)\right]\tau_1(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

$\delta(x)$ – функция Дирака, $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

С другой стороны, для деформации точек полубесконечной пластины, когда на неё действуют тангенциальные усилия интенсивностью $\tau_1^*(x)$, имеем [3]:

$$U(x,b) = U^{(1)}(x,b) + U^{(2)}(x,b) = -\frac{1}{\pi H l}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{x-s} - \frac{8b^2(x-s)}{\left[(x-s)^2 + 4b^2\right]^2} + \right.$$

$$\left. + d_1\frac{x-s}{(x-s)^2 + 4b^2} + d_2\frac{2b^2(x-s)\left[12b^2 - (x-s)^2\right]}{\left[(x-s)^2 + 4b^2\right]^3}\right\}\tau_1^*(s)\,ds, \tag{1.4}$$

$$-\infty < x < \infty$$

где

$$U^{(1)}(x,b)=\left[\theta(-x-a)+\theta(x-a)\right]\frac{du(x,b)}{dx},\quad -\infty<x<\infty,$$

$$U^{(2)}(x,b)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\frac{du(x,b)}{dx},\quad -\infty<x<\infty,$$

$u(x,b)$ – горизонтальные перемещения точек полубесконечной пластины, H – толщина пластины,

$$l=\frac{2\mu}{3-\nu},\quad d_1=\frac{(1+\nu)(\nu-3)+8}{(1+\nu)(3-\nu)},\quad d_2=\frac{2(1+\nu)}{3-\nu},$$

μ – коэффициент Ляме, ν – коэффициент Пуассона.

Условием контакта между пластиной и накладками будет следующее:

$$U_1(x)=U^{(1)}(x,b)\quad -\infty<x<\infty. \tag{1.5}$$

Теперь, применив к (1.3), (1.4) и (1.5) преобразование Фурье, после некоторых выкладок, соответственно, получим

$$-i\sigma\bar{U}_1(\sigma)=\frac{\bar{\tau}_1^*(\sigma)}{E_1F_1}-\frac{2Q_1}{E_1F_1}\cos(\sigma a) \tag{1.6}$$

$$\bar{U}^{(1)}(\sigma,b)=-\frac{i}{Hl}\left\{\operatorname{sgn}\sigma+\left(d_1\operatorname{sgn}\sigma-b\sigma+d_2b^2\operatorname{sgn}\sigma\cdot\sigma^2\right)e^{-2|\sigma|b}\right\}\bar{\tau}_1^*(\sigma)-\bar{U}^{(2)}(\sigma,b) \tag{1.7}$$

$$\bar{U}_1(\sigma)=\bar{U}^{(1)}(\sigma,b), \tag{1.8}$$

где $\bar{U}(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}U(x)e^{i\sigma x}dx;\quad \bar{\tau}_1^*(\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau_1^*(x)e^{i\sigma x}dx.$

Далее имея в виду условие контакта (1.8), сопоставлением формул (1.6) и (1.7), после некоторых преобразований, для трансформанты Фурье тангенциальных контактных напряжений и деформаций промежуточного интервала между накладками получим следующее функциональное уравнение:

$$\bar{\tau}_1^*(\sigma)=\frac{i\sigma Hl\bar{U}^{(2)}(\sigma,b)}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}+2Q_1\lambda\frac{\cos(\sigma a)}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}, \tag{1.9}$$

где $\lambda=\dfrac{Hl}{E_1F_1};\quad \bar{K}(\sigma)=|\sigma|+\left(d_1|\sigma|-b\sigma^2+d_2b^2|\sigma|^3\right)e^{-2|\sigma|b}$. (1.10)

Применив к (1.9) обратное преобразование Фурье, для тангенциальных контактных напряжений получим

$$\tau_1^*(x)=-Hl\int\limits_{-\infty}^{\infty}R'(x-s)U^{(2)}(s,b)ds+Q_1\lambda\left[R(x-a)+R(x+a)\right],\quad -\infty<x<\infty \tag{1.11}$$

где $\bar{R}(\sigma)=\dfrac{1}{\lambda+\bar{K}(\sigma)},\qquad R(x)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{e^{-i\sigma x}}{\lambda+\bar{K}(\sigma)}d\sigma.$

Далее, имея в виду, что $\tau_1^*(x)=0$ при $|x|<a$, из уравнения (1.11) для деформации промежуточного интервала между накладками получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-a}^{a} R'(x-s)U^{(2)}(s,b)\,ds = \frac{Q_1\lambda}{Hl}\left[R(x+a)+R(x-a)\right], \quad |x|<a \tag{1.12}$$

Таким образом, решение задачи свелось к решению интегрального уравнения (1.12).

Решение интегрального уравнения (1.12) приводим к эквивалентным квазивполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Структура решения интегрального уравнения (1.12) зависит от ядра $R(x)$. Для этого $\bar{R}(\sigma)$ представим в виде

$$\bar{R}(\sigma) = \frac{1}{\lambda+\bar{K}(\sigma)} = \frac{1}{\lambda+|\sigma|+\bar{K}_1(\sigma)} = \frac{1}{\lambda+|\sigma|} - \bar{R}_1(\sigma), \tag{1.13}$$

где $\bar{K}_1(\sigma) = \left(d_1|\sigma| - b\sigma^2 + d_2 b^2|\sigma|^3\right)e^{-2|\sigma|b}$,

$$\bar{R}_1(\sigma) = \frac{\bar{K}_1(\sigma)}{\left(\lambda+|\sigma|\right)\left(\lambda+|\sigma|+\bar{K}_1(\sigma)\right)}.$$

Применив к (1.13) обратное преобразование Фурье, будем иметь [4]:

$$R(x) = \frac{1}{\pi}\left\{\psi(1) + \ln\frac{1}{|\lambda x|} + \frac{\pi|\lambda x|}{2}\right\} + \tag{1.14}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left\{(-1)^m\frac{(\lambda x)^{2m}}{(2m)!}\left[\psi(2m+1)+\ln\frac{1}{|\lambda x|}\right] + (-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{|\lambda x|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{R}_1(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma$$

где ряд сходится при любых x и где $\psi(u)$ – известная функция пси.

Тогда из (1.14) для $R'(x)$ получим

$$R'(x) = -\frac{1}{\pi x} + \frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn} x + R_2'(x), \tag{1.15}$$

где

$$R_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left\{(-1)^m\frac{(\lambda x)^{2m}}{(2m)!}\left[\psi(2m+1)+\ln\frac{1}{|\lambda x|}\right] + (-1)^m\frac{\pi}{2}\frac{|\lambda x|^{2m+1}}{(2m+1)!}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{R}_1(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Заменяя в уравнении (1.12) $x = ax,\ s = as$ и имея в виду представление (1.15), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(as)}{s-x}ds +$$

$$+a\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right] + \frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\}f(as)\,ds = \frac{Q_1\lambda}{Hl}q(ax), \tag{1.16}$$

где $f(as) = u'(as),\ q(ax) = R\left[a(x+1)\right] + R\left[a(x-1)\right]$.

Таким образом, решение задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения (1.16). После определения $f(as)$ из уравнения (1.16), искомые контактные напряжения $\tau_1(x)$ определяются из формулы (1.11).

Имея в виду, что $f(as)$ нечетная функция, решение уравнения (1.16) ищем в виде

$$f(as)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{n=1}^{\infty}X_nT_{2n-1}(s) \tag{1.17}$$

где $T_k(u)=\cos(k\arccos u)$, $k=1,2,...$ – многочлены Чебышева первого рода.

Подставляя выражение $f(as)$ из (1.17) в интегральное уравнение (1.16), при этом используя известное спектральное соотношение [5]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(s)}{(s-x)\sqrt{1-s^2}}ds=U_{k-1}(x) \text{ при } |x|<1, \tag{1.18}$$

где $U_{k-1}(u)=\sin(k\arccos u)/\sin(\arccos u)$, $k=1,2,...,$ – многочлены Чебышева второго рода, известным способом [5] для определения неизвестных коэффициентов получим следующую квазивполне регулярную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений [6,7]:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}K_{nm}X_n=q_m,(m=1,2...), \tag{1.19}$$

где коэффициенты при неизвестных и свободных членах определяются следующими формулами:

$$K_{nm}=\frac{2a}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-s^2}}T_{2n-1}(s)U_{2m-2}(x)dsdx,$$

$$q_m=\frac{2Q_1\lambda}{\pi Hl}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}q(ax)U_{2m-2}(x)dx.$$

После определения $X_n\ (n=1,2...)$ искомые контактные напряжения $\tau_1(ax)$ представляются в виде [2,8]:

$$\begin{aligned}\tau_1(ax)=&-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left\{\left(|x|+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2n+1}+\right.\\&\left.+a\int_{-1}^{1}\left[R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right]\frac{T_{2n-1}(s)}{\sqrt{1-s^2}}ds\right\}-\frac{Q_1\lambda}{Hl}q(ax),\quad |x|>1.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Теперь приступим к получению асимптотической формулы для $\tau_1(x)$, когда $|x|\to\infty$.

Для этого пользуемся разложением $\overline{\tau}_1(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$.

$$\overline{\tau}_1(\sigma)=A_0+A|\sigma|+B\sigma^2+C|\sigma|^3+O(\sigma^4), \tag{1.21}$$

где $A_0=2Q_1$; $\quad A=-\dfrac{2Q_1(d_1+1)}{\lambda}$;

$$B=\frac{iHl\left[\overline{U}^{(2)}(0)\right]'}{\lambda}+2Q_1\left[\frac{(d_1+1)^2}{\lambda^2}+\frac{(2d_1+1)b}{\lambda}-\frac{a^2}{2}\right];$$

$$C=-\frac{iHl\left(d_1+1\right)\left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]'}{\lambda^2}+2Q_1\left[\frac{a^2\left(d_1+1\right)}{2\lambda}-\frac{\left(d_1+1\right)^3}{\lambda^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{2b\left(d_1+1\right)\left(2d_1+1\right)}{\lambda^2}-\frac{2b^2\left(d_1+d_2+2\right)}{\lambda}\right];$$

$$\bar{U}^{(2)}(\sigma)=\int_{-\infty}^{\infty}U^{(2)}(x)e^{i\sigma x}dx=\int_{-a}^{a}f(x)e^{i\sigma x}dx,$$

$$\left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]'=i\int_{-a}^{a}xf(x)dx,$$

Из (1.21) по известному свойству интеграла Фурье при $|x|\to\infty$ для $\tau_1(x)$ получим

$$\tau_1(x)=-\frac{A}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{6C}{\pi}\cdot\frac{1}{x^4}+O\left(x^{-6}\right). \tag{1.22}$$

Здесь были использованы следующие значения интегралов:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma^{2n}e^{-i\sigma x}d\sigma=(-1)^n\,\delta^{(2n)}(x),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\sigma|^{2n+1}e^{-i\sigma x}d\sigma=(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)!}{\pi}\cdot\frac{1}{x^{2n+2}}, \tag{1.23}$$

$$(n=0,1,2,\dots)$$

2. Нечетная задача. В случае нечетной задачи, силы, действующие на концах накладок, равны $Q_2=\dfrac{P_1-P_2}{2}$ $\quad P_1>P_2$ и имеют противоположные направления.

Тогда уравнение равновесия запишется в виде

$$\frac{d^2u_2}{dx^2}=\frac{\tau_2(x)}{E_1F_1};\quad |x|>a \tag{2.1}$$

при следующих граничных условиях:

$$\left.\frac{du_2}{dx}\right|_{x=-a}=\frac{Q_2}{E_1F_1},\qquad \left.\frac{du_2}{dx}\right|_{x=a}=\frac{Q_2}{E_1F_1}, \tag{2.2}$$

где $\tau_2(x)$–интенсивность тангенциальных контактных сил, $u_2(x)$–перемещение точек накладок.

Уравнение (2.1) при условиях (2.2), подобно (1.3), запишется в следующем виде:

$$\frac{dU_2}{dx}=\frac{\tau_2^*(x)}{E_1F_1}+\frac{Q_2}{E_1F_1}\left[\delta(x-a)-\delta(x+a)\right],\quad -\infty<x<\infty \tag{2.3}$$

Применим к (2.3) преобразование Фурье

$$-i\sigma\bar{U}_2(\sigma)=\frac{\bar{\tau}_2^*(\sigma)}{E_1F_1}+\frac{2iQ_2}{E_1F_1}\sin(\sigma a). \tag{2.4}$$

Далее, удовлетворив условию контакта (1.8), при этом, имея в виду (2.4) и (1.2), для трансформанты Фурье контактных напряжений получим следующее уравнение:

$$\overline{\tau}_2^*(\sigma)=\frac{i\sigma Hl\overline{U}^{(2)}(\sigma,b)}{\lambda+\overline{K}(\sigma)}-2i\lambda Q_2\frac{\sin(\sigma a)}{\lambda+\overline{K}(\sigma)}. \tag{2.5}$$

Применив к (2.5) обратное преобразование Фурье, для тангенциальных контактных напряжений получим

$$\tau_2^*(x)=-Hl\int_{-\infty}^{\infty}R'(x-s)U^{(2)}(s,b)ds-\lambda Q_2\left[R(x-a)-R(x+a)\right], \tag{2.6}$$

$$-\infty<x<\infty$$

Имея в виду, что $\tau_2^*(x)=0$ при $|x|<a$, из (2.6) для деформации промежуточного интервала между накладками получим следующее интегральное уравнение:

$$\int_{-a}^{a}R'(x-s)U^{(2)}(s,b)ds=-\frac{\lambda Q_2}{Hl}\left[R(x-a)-R(x+a)\right],\quad |x|<a \tag{2.7}$$

Далее, используя разложения по формулам (1.13)–(1.15) и поступая аналогично, как в первом параграфе, решение задачи сводится к решению следующего сингулярного интегрального уравнения:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(as)}{s-x}ds+$$

$$+a\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\}\varphi(as)ds=-\frac{\lambda Q_2}{Hl}g(ax), \tag{2.8}$$

где $\varphi(as)=u'(as)$, $g(ax)=R\left[a(x-1)\right]-R\left[a(x+1)\right]$.

Таким образом, решение задачи свелось к решению сингулярного интегрального уравнения (2.8).

Ввиду того, что $\varphi(as)$ – четная функция, решение (2.8) ищем в виде

$$\varphi(as)=X_0F(s)+\frac{\lambda Q_2}{Hl}\psi(s), \tag{2.9}$$

где

$$F(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{2n}^{(1)}T_{2n}(s)$$

$$\psi(s)=\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\sum_{n=1}^{\infty}Y_{2n}^{(2)}T_{2n}(s)$$

Подставляя $\varphi(as)$ из (2.9) в интегральное уравнение (2.8), при этом используя соотношение (1.18), для определения коэффициентов $Y_{2n}^{(j)}$ $(j=1,2)$ получим следующие квазивполне регулярные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений [6,7]:

$$Y_{2m}^{(j)}+\sum_{n=1}^{\infty}K_{2m2n}Y_{2n}^{(j)}=l_m^{(j)},\quad (j=1,2),\ m=1,2\ldots, \tag{2.10}$$

где

$$K_{2m2n}=\frac{2a}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a(x-s)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}(x-s)\right\}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-s^2}}T_{2n}(s)U_{2m-1}(x)dsdx,$$

$$l_m^{(1)} = -K_{2m,0} = -\frac{2a}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\left(x-s\right)\right\}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-s^2}}U_{2m-1}\left(x\right)dsdx,$$

$$l_m^{(2)} = -g_m = -\frac{2\lambda Q_2}{\pi Hl}\int_{-1}^{1}\left\{R\left[a\left(x-1\right)\right]-R\left[a\left(x+1\right)\right]\right\}\sqrt{1-x^2}U_{2m-1}\left(x\right)dx.$$

Постоянная X_0 определяется из условия

$$a\int_1^\infty \tau_2\left(as\right)ds = Q_2$$

и имеет вид

$$X_0 = \frac{Q_2\left[1-\frac{\lambda a}{Hl}\int_1^\infty \psi_1\left(x\right)dx\right]}{a\int_1^\infty F_1\left(x\right)dx},$$

где $F_1\left(x\right) = \frac{Hl}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F\left(s\right)}{s-x}ds + a\int_{-1}^{1}R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]F\left(s\right)ds,$

$$\psi_1\left(x\right) = \frac{Hl}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi\left(s\right)}{s-x}ds + a\int_{-1}^{1}R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]\psi\left(s\right)ds + g\left(ax\right).$$

После определения $Y_{2n}^{(j)}\left(j=1,2...\right)$, $n=1,2...$, искомые контактные напряжения $\tau_2\left(ax\right)$ представляются в виде [2,8]:

$$\tau_2\left(ax\right) = -X_0\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{x^2-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{x^2-1}}\left(\left|x\right|+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2n} + \right.$$
$$\left.+a\int_{-1}^{1}\frac{T_{2n}\left(s\right)}{\sqrt{1-s^2}}\left[R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\left(x-s\right)\right]ds\right\}\cdot\left[X_0Y_{2n}^{(1)}+\frac{\lambda Q_2}{Hl}Y_{2n}^{(2)}\right]+ \quad (2.11)$$
$$+aX_0\int_{-1}^{1}\left[R_2'\left[a\left(x-s\right)\right]+\frac{\lambda}{2}\operatorname{sgn}\left(x-s\right)\right]\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}+\frac{\lambda Q_2}{Hl}g\left(ax\right),\quad \left|x\right|>1.$$

Для получения асимптотической формулы для $\tau_2\left(x\right)$, когда $\left|x\right|\to\infty$, пользуемся разложением $\overline{\tau}_2\left(\sigma\right)$ при $\left|\sigma\right|\to 0$

$$\overline{\tau}_2\left(\sigma\right) = A_1 i\sigma + B_1 i\sigma\left|\sigma\right| + C_1 i\sigma^3 + O\left(\sigma^4\right), \quad (2.12)$$

где

$$A_1 = \frac{Hl\overline{U}^{(2)}\left(0\right)}{\lambda} - 2aQ_2,$$

$$B_1 = \frac{2aQ_2\left(d_1+1\right)}{\lambda} - \frac{Hl\left(d_1+1\right)}{\lambda^2}\overline{U}^{(2)}\left(0\right),$$

$$C_1 = Hl\left[\frac{(d_1+1)^2}{\lambda^3} - \frac{b(2d_1+1)}{\lambda^2}\right]\bar{U}^{(2)}(0) + \frac{Hl}{2\lambda}\left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]^u +$$

$$+\frac{a^3 Q_2}{3} - 2aQ_2\left[\frac{(d_1+1)^2}{\lambda^2} + \frac{b(2d_1+1)}{\lambda}\right],$$

$$\bar{U}^{(2)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} U^{(2)}(x)e^{i\sigma x}dx = \int_{-a}^{a} \varphi(x)e^{i\sigma x}dx,$$

$$\bar{U}^{(2)}(0) = \int_{-a}^{a} \varphi(x)dx, \quad \left[\bar{U}^{(2)}(0)\right]^u = -\int_{-a}^{a} x^2\varphi(x)dx.$$

Применив обратное преобразование Фурье к (2.12) для $\tau_2(x)$ при $|x| \to \infty$, получим

$$\tau_2(x) = -\frac{2B_1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{24C_1}{\pi}\cdot\frac{1}{x^5} + O\left(x^{-7}\right). \tag{2.13}$$

Здесь были использованы формулы (1.23).

После определения $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ искомое контактное напряжение $\tau(x)$ будет равно

$$\tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x).$$

Авторы выражают свою благодарность профессору Э.Х. Григоряну за ценные советы в ходе решения задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стренберг Э. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластинке. // ПМ. Тр. Амер. общ. инж. механиков. 1968. Сер. Е. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Уч. записки ЕГУ, естеств. науки. 1979. №2. С.62-71.
3. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Полубесконечная пластина, усиленная внутренним полубесконечным стрингером, параллельным границе пластины. // Изд. «Гитутюн» НАН Армении. 2006. С.138-143.
4. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.3-10.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука. 1983. 467с.
6. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками //ПММ. 1972. Т.36. №5.
7. Григорян Э.Х. О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины //ПММ. 1974. Т.38. №2.
8. Erdogan F.E., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. //Jn.: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. Noordhoff Intern.Publl. Leyden. 1973. P.368–425.

Институт механики НАН Армении
Государственный университет экономики

Поступила в редакцию
10.11.2008