ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 517.949.8

К ЗАДАЧЕ ОБ ИЗГИБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕМБРАНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Торосян В.С., Саакян С.Л.

Ключевые слова: ряды Фурье, ускорение сходимости.
Key words: Fourier series, acceleration of convergence

Վ.Ս. Թորոսյան, Ս.Լ. Սահակյան
Միակողմանի անհամասեռություն ունեցող ուղղանկյուն մեմբրանի ծռման խնդրի մասին

Դիտարկվում է երկրորդ կարգի էլիպտական հավասարման համար Դիրիխլեի մի խնդիր, երբ տիրույթը ուղղանկյուն է: Այդպիսի հավասարման է բերվում մասնավորաբար ուղղանկյուն մեմբրանի ոլորման խնդիրը, երբ այն մեկ ուղղությամբ ունի անհամասեռություն: Խնդիրը լուծվել է Ֆուրյեի եռանկյունաչափական կրկնակի շարքերի միջոցով: Բերվում է թվային օրինակ: Թվային փորձարկումը կատարվել է Ֆուրյեի շարքերի զուգամիտության արագացման նոր եղանակով:

V.S. Torossian, S.L. Sahakian
On the problem of torsion of a rectangular membrane with one-direction non-homogeneity

A Dirichlet problem for a second order elliptic equation is discussed when the domain is a rectangle. In particular, the problem of torsion of a rectangular membrane is reduced to such equation, when it is non-homogenous in one direction. A numerical example is presented. The numerical experiment is carried out trough a new method of acceleration of convergence of Fourier series.

В работе посредством двойных рядов Фурье получено решение задачи Дирихле для одного уравнения второго порядка, когда область – прямоугольник. Приведен численный пример. При проведении численного эксперимента использован новый метод ускорения сходимости рядов Фурье.

Известно, что тригонометрические ряды Фурье сходятся медленно. Тем не менее, они (и тригонометрические многочлены) часто и эффективно применяются при решени различных задач математической физики [1-4].

В предлагаемой работе, используя двойные тригонометрические ряды Фурье, получено решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, оператор которого несимметричен. К такому уравнению приводится, в частности, задача об изгибе прямоугольной мембраны при наличии однонаправленной неоднородности [5]. Целесообразность такого подхода объясняется и тем, что в последнее десятилетие разработаны новые методы для ускорения сходимости тригонометрических рядов Фурье [5].

§1. Постановка задачи. Пусть $\overline{D} = \{0 \le x \le a; 0 \le y \le b\}$ – прямоугольник со сторонами a, b; ∂D – его граница. Рассмотрим задачу Дирихле для следующего эллиптического уравнения второго порядка:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = f \tag{1.1}$$

$$u\big|_{\partial D} = \varphi \tag{1.2}$$

здесь λ – коэффициент неоднородности.

Будем предполагать, что функции $\varphi(0,y)$, $\varphi(a,y)$, $\varphi(x,0)$, $\varphi(x,b)$ в рассмотренной области удовлетворяют условию Дирихле для разложения в ряд Фурье, а правая часть уравнения (1.1) – $f \in C^{Q+2}(\overline{D})$.

Пусть функции $h_{ij}(x,y)$ $(i=1,2,\cdots;\ j=1,2,\cdots)$ образуют в рассматриваемой области полную систему непрерывных функций. Перепишем уравнение (1.1) в следующем виде:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}-f=0\ . \tag{1.3}$$

Тогда, если левая часть уравнения (1.3) для всех значений i, j будет удовлетворять условию ортогональности

$$\int_0^a\int_0^b\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}-f\right)h_{ij}(x,y)\,dxdy=0\ , \tag{1.4}$$

можно считать, что $u(x,y)$ удовлетворяет и уравнению (1.1).

Если возьмем

$$h_{ij}(x,y)=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\sin\alpha_i x\sin\beta_i y \qquad \left(\alpha_i=\frac{i\pi}{a},\ \beta_j=\frac{j\pi}{b}\right),$$

то получим решение задачи (1.1)–(1.2) в виде

$$u(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_{ij}\sin\alpha_i x\sin\beta_i y\ . \tag{1.5}$$

Из (1.4) после преобразования при помощи интегрирования по частям для разложения коэффициентов Фурье A_{ij} получим уравнение

$$\left(\alpha_i^2+\beta_j^2\right)A_{ij}-\lambda\alpha_i C_{ij}=f_{ij}+\theta_{ij}\ , \tag{1.6}$$

где

$$f_{ij}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\alpha_i x\sin\beta_i y\,dxdy\ ,$$

$$\theta_{ij}=\alpha_i(-1)^{i+1}k_{aj}+\alpha_i k_{0j}+\beta_{ji}(-1)^{j+1}l_{bi}+\beta_{ji}l_{0i}\ ,$$

$$k_{aj}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^b\varphi(a,y)\sin\beta_i y\,dy\ ,$$

$$k_{0j}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^b\varphi(0,y)\sin\beta_i y\,dy\ , \tag{1.7}$$

$$l_{bi}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\varphi(x,b)\sin\alpha_i x\,dx\ ,$$

$$l_{0i}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\varphi(x,0)\sin\alpha_i x\,dx\ ,$$

а C_{ij} – коэффициенты Фурье функции $u(x,y)$ при разложении по ортонормированной системе $\left\{\frac{2}{a}\frac{2}{b}\cos\alpha_i x\sin\beta_j y\right\}_{i=0,\,j=1}^{\infty}$, т.е

$$C_{ij}=\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b u(x,y)\cos\alpha_i x\sin\beta_i y dxdy \;. \tag{1.8}$$

Легко показать, что

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}A_{il}\,\frac{i}{i^2-k^2} \qquad (k,l=1,2,\cdots) \tag{1.9}$$

Здесь и далее индекс суммирования $i+k$ принимает нечетные значения. Отсюда, имея в виду зависимость (1.6) для определения коэффициентов Фурье C_{kl}, получаем следующую бесконечную систему:

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}\frac{\lambda\alpha_i}{\delta_{il}}\frac{i}{i^2-k^2}c_{il}+\frac{4}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}\frac{i}{\delta_{il}}\frac{\psi_{il}}{i^2-k^2}\;, \tag{1.10}$$

где введены обозначения

$$\delta_{kl}=\alpha_i^2+\beta_l^2,\quad \psi_{il}=f_{il}+\theta_{il}$$

Пусть

$$\varphi(0,y)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{0j}\sin\beta_j y,\quad \varphi(a,y)=\sum_{j=1}^{\infty}p_{aj}\sin\beta_i y\;, \tag{1.11}$$

откуда, учитывая граничное условие (1.2), получаем

$$\frac{C_{0l}}{2}=-\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty}C_{il}+\frac{1}{2}\left(p_{0l}+p_{al}\right)\quad (l=1,2,\cdots)\;. \tag{1.12}$$

§2. Исследование бесконечной системы (1.10). Перепишем бесконечную систему (1.10) отдельно для четных и нечетных значений k:

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{\lambda\alpha_i}{\delta_{il}}\frac{i}{i^2-k^2}c_{il}+\frac{4}{\pi}\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty}\frac{i}{\delta_{il}}\frac{\psi_{il}}{i^2-k^2}\quad (k=2,4,\cdots) \tag{2.1}$$

$$C_{kl}=\frac{4}{\pi}\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{\lambda\alpha_i}{\delta_{il}}\frac{i}{i^2-k^2}c_{il}+\frac{4}{\pi}\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty}\frac{i}{\delta_{il}}\frac{\psi_{il}}{i^2-k^2}\quad (k=1,3,\cdots). \tag{2.2}$$

Введем обозначение

$$M_{il}=\frac{\lambda i\alpha_i}{\delta_{il}}=\frac{\lambda i^2\pi/a}{i^2\pi^2/a^2+j^2\pi^2/b^2}\quad (i,l=1,2,\cdots)$$

Очевидно,

$$\left|M_{il}\right|=\frac{|\lambda|a}{\pi\left(1+\dfrac{l^2a^2}{i^2b^2}\right)}<\frac{|\lambda|a}{\pi}\quad (i,l=1,2,\cdots)\;.$$

И, следовательно,

$$\sum_{i+k}^{\infty}\left|M_{il}\frac{1}{i^2-k^2}\right|<\frac{|\lambda|a}{\pi}\sum_{i+k}^{\infty}\left|\frac{1}{i^2-k^2}\right|\quad (k=1,2,\cdots).$$

Известно [6], что

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-(2k)^2} = 0 \quad (k=1,2,\cdots) \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{i^2(2k)^2-1} = \frac{1}{2} \ . \tag{2.4}$$

Имеем

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left| \frac{1}{i^2-(2k)^2} \right| = \sum_{i=1,3,\cdots}^{2k-1} \frac{1}{i^2-(2k)^2} + \sum_{i=2k+1,2k+3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-(2k)^2} . \tag{2.5}$$

Нетрудно установить, что

$$\sum_{i=2k+1,2k+3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-(2k)^2} = \sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i(4k+i)} < \sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \frac{1}{(i+2)^2} \le \frac{\pi^2}{8} - 1 \quad (k=3,4,\cdots)$$

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left| \frac{1}{i^2-4} \right| \le \frac{1}{3} + \sum_{i=3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-4} \le \frac{2}{3} \tag{2.6}$$

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left| \frac{1}{i^2-16} \right| \le \frac{1}{15} + \frac{1}{7} + \sum_{i=5,7,\cdots}^{\infty} \frac{1}{i^2-16} \le \frac{44}{105} .$$

И, следовательно,

$$\sum_{i=1,3,\cdots}^{\infty} \left| M_{il} \frac{1}{i^2-(2k)^2} \right| < \frac{2|\lambda| a}{3\pi} \quad (k=1,2,\cdots). \tag{2.7}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\sum_{i=2,4,\cdots}^{\infty} \left| M_{il} \frac{1}{i^2-(2k-1)^2} \right| < \frac{|\lambda| a}{2\pi} \quad (k=1,2,\cdots).$$

Из оценок (1.17)-(1.18) следует, что бесконечная система (1.10) вполне регулярна, если выполнено условие $\frac{4}{\pi}\frac{2a}{3\pi}|\lambda| \le 1$, т.е. $a \le \frac{3\pi^2}{8|\lambda|}$.

§3. Численный пример. В качестве примера рассмотрим задачу (1.1)-(1.2), когда $\overline{D}$ – единичный квадрат, т.е. $a=b=1$, $\lambda=1$, $\varphi(x,y)=0$, а правая часть уравнения (1.1) есть функция $f(x,y)=\left[\pi^2\left(x^2-x\right)+2x-3\right]\sin\pi y$. Тогда точное решение задачи принимает вид $u(x,y)=x(x-1)\sin\pi y$. Численный эксперимент проводился на основе метода, который изложен в работе А.Б. Нерсесяна [6]. Суть метода состоит в следующем.

Пусть $f=f(x)$ – кусочно-гладкая на отрезке $[-1,1]$ функция с точками “сливания” $\{\gamma_s\}$, $-1 \le \gamma_1 < \cdots < \gamma_l < 1$, $1 \le l < \infty$ и $f \in C^{Q+1}$, $Q>1$ на каждом из отрезков $[\gamma_k,\gamma_{k+1}]$, а $A_{sk}=f^{(k)}(\gamma_s-0)-f^{(k)}(\gamma_s+0)$ $(k=0,1,\cdots,Q,\ s=1,2,\cdots l)$ – скачки f и ее производных в точках $\{\gamma_s\}$. Тогда аппроксимационная формула

$$S_{N,Q}(f)=\sum_{n=-N}^{N}\left(f_n-\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{Q-1}A_{jk}(f)B_{k,n}e^{i\pi n\left(1-\gamma_j\right)}\right)e^{i\pi nx}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{Q-1}A_{jk}(f)B_k\left(x-\gamma_j+1\right) \qquad (3.1)$$

где

$$f_n=\int_{-1}^{1}f(t)e^{-i\pi nt}dt \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

а $B_k(x)$ – полиномы Бернулли, коэффициенты Фурье которых имеют вид

$$B_{k,n}=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}} & n=\pm1,\pm2,\cdots\\ 0 & n=0\end{cases}$$

сами они определяются следующей рекуррентной формулой:

$$B_0(x)=\frac{x}{2},\ B_k(x)=\int B_{k-1}(x)dx \quad x\in[-1,1],\ k=1,2,\cdots$$

где константа интегрирования вычисляется из условия

$$\int_{-1}^{1}B_k(t)dt=0 \quad k=1,2,\cdots$$

сходятся к f со скоростью порядка $O\left(\dfrac{1}{N^{Q+1}}\right)$ при $N\to\infty$. Получены численные значения решения задачи (1.1)-(1.2) $\tilde{u}(x,y)=S_{N,Q}(u)$ при $Q=2$ для различных значений N. Результаты для $\tilde{u}(1/2,1/2)$ сведены в таблице:

$N=20$	$N=32$	$N=64$	$N=128$
-0.237765	-0.247654	-0.249761	-0.2499887

Сравнение с точным значением $u(1/2,1/2)=-1/4$ показывает, что при $N=64$ точность вычисления имеет порядок $O(10^{-4})$, а при $N=128$ она составляет $O(10^{-6})$. Пусть $u_0(x,y)$ есть решение задачи (1.1)–(1.2), когда коэффициент неоднородности $\lambda=0$. В этом случае, как показывают численные результаты, $u_0(x,y)\approx x(x-1)\sin\pi y$, при этом,

$$u_0(x,y)<x(x-1)\sin\pi y \text{ при } 0<x<1/2,\ 0<y<1,$$
$$u_0(x,y)>x(x-1)\sin\pi y \text{ при } 1/2<x<1,\ 0<y<1.$$

Как и следовало ожидать, в центре квадрата $u_0(1/2,1/2)=-1/4$.

Заметим также, что уравнение (1.1) с помощью постановки $u=v\exp(\lambda x/2)$ приводится к уравнению Гельмгольца

$$\Delta v + \frac{\lambda^2}{4} v = - f e^{\lambda x/2} \tag{3.2}$$

для которого ставятся различные граничные задачи. При решении этих задач применяются различные численные методы. В частности, для задачи Дирихле при $|\lambda| >> 1$ можно использовать многошаговые итерационные методы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко–Бородич М.М. Теория упругости. ОГИЗ, 1959.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
3. Смелов В.В. Аппроксимация кусочно-гладких функций тригонометрическими многочленами и исследование последних в вариационных методах. Новосибирск: 1975.
4. Тодоров М.М. О решении плоской задачи теории упругости для прямоугольника посредством двойных тригонометрических рядов. // Изв. АН СССР. ОТН. 1959. № 4. С.185-191.
5. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949.
6. Нерсесян А.Б. Квазиполиномы типа Бернулли и ускорение сходимости рядов Фурье кусочно-гладких функций. //Докл. НАН Армении. 2004. Т.104. №.4. С.273-279.
7. Валиулин А.Н., Кузнецов Ю.А. О разностных методах решения уравнения Гельмгольца. /Тр.Всесоюзного сем. "Численные методы мех. вяз. жид.", Новосибирск: 1969. С.34-36.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16. 12. 2008