ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ

Погосян Н.Д.

Ключевые слова: волна, пластина, локализованная, изгибная, неоднородная
Key words: wave, plate, localized, bending, non-homogenous

Ն. Ջ. Պողոսյան
Տեղայնացված լայնական ալիքների տարածումը կիսաանվերջ անհամասեռ սալում

Ուսումնասիրվում է լայնական ալիքները կիսաանվերջ սալում, որի մեջ Յունգի մոդուլը և խտությունը փոփոխվում են էքսպոնենցիալ օրենքով. Կախված անհամասեռությանը բնութագրող α գործակցից և առաձգականության ν պարամետրից ուսումնասիրված է լայնական մարող ալիքի գոյությունը.

N.D. Poghossyan
Localized bending waves in semi-infinite non homogeneous plate

The bending waves are studied in semi-infinite plate which elasticity module and density are function of exponential type. The bending localized wave existence problem is investigated in depend of parameters characterizing non homogeneity and elastic property of plate material.

Изучаются изгибные волны в полубесконечной пластине, в которой модуль Юнга и плотность изменяются по экспоненциальному закону. Исследован вопрос существования изгибной локализованной волны в зависимости от параметров, характеризующих неоднородность и упругие свойства материала пластинки.

Исследования, посвященные локализованным изгибным волнам в упругих пластинах, впервые были проведены Коненковым Ю. [1] и позднее развиты в других работах [2-4] и т.д.

Основываясь на теории пластин Кирхгофа, проблема колебаний пластины разделяется на две независимые задачи планарных и изгибных колебаний, и в частности, для изгибных волн задача состоит в исследовании локализованных колебаний вблизи свободного края пластины по аналогии с волнами вдоль свободной поверхности полупространства, изучаются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль кромки пластинки в случае свободной кромки.

Рассмотрим полубесконечную пластину, отнесённую к декартовой системе координат $Oxyz\left\{x\in\left[0,+\infty\right);\ y\in\left(-\infty;+\infty\right);\ z\in\left[-h;h\right]\right\}$ так, чтобы срединная плоскость пластинки совпадала с координатной плоскостью Oxy.

Полагаем, что модуль Юнга и плотность пластинки изменяются по закону $E=E_0e^{\alpha x}$, $\rho=\rho_0e^{\alpha x}$ (экспоненциальная неоднородность).

Тогда изгибные колебания пластинки описываются уравнением

$$\Delta^2W+2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\Delta W+\alpha^2\left(\frac{\partial^2W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2W}{\partial y^2}\right)=-\frac{2\rho_0h}{D_0}\frac{\partial^2W}{\partial t^2}, \qquad (1.1)$$

где $W\left(x,y,t\right)$ – перемещение точек пластины, а $D_0=\dfrac{2E_0h^3}{3\left(1-\nu^2\right)}$.

На кромке пластины $x=0$ примем условия свободного края:

$$M_x\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\Big|_{x=0}=0 \qquad (1.2)$$

$$N_x=\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+2\frac{\partial H}{\partial y}\right)\Big|_{x=0}=\left(\alpha\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=0}=0\ .$$

Условие локализации затухания колебаний пластинки примем при $x\to\infty$ в виде

$$\lim_{x\to\infty} W\left(x,y,t\right)=0\,. \qquad (1.3)$$

Эта задача в однородном случае $\alpha=0$ рассмотрена в [4].

Представим решение уравнения в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль оси Oy.

$$W(x,y,t)=W_0(x)\exp\left[i\,(\omega\, t-k\, y)\right], \qquad (1.4)$$

где ω – частота колебаний, k – волновое число. Подставляя (1.4) в (1.1), для определения функции $W_0(x)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d^2}{d\,x^2}-k^2\right)^2 W_0\left(x\right)+2\alpha\left(\frac{d^3}{d\,x^3}-k^2\frac{d}{dx}\right)W_0\left(x\right)+$$

$$+\alpha^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}-\nu k^2\right)W_0\left(x\right)=\frac{2\rho_0 h}{D_0}\omega^2\, W_0\left(x\right). \qquad (1.5)$$

Характеристическое уравнение полученного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\left(\left(\lambda_0^2-1\right)+\beta\lambda_0\right)^2=\beta^2\nu+\omega_0^2\,, \qquad (1.6)$$

где $\omega_0=\omega\Big/\sqrt{\dfrac{D_0 k^4}{2\rho_0 h}}$, $\beta=\dfrac{\alpha}{k}$, $\dfrac{\lambda}{k}=\lambda_0$.

Запишем (1.6) в виде

$$\left[\begin{array}{l}\lambda_0^2+\beta\lambda_0-\left(1+\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)=0\\[2mm] \lambda_0^2+\beta\lambda_0-\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)=0.\end{array}\right. \qquad (1.7)$$

Первое уравнение совокупности (1.7) имеет корни противоположного знака

$$\left(\lambda_0\right)_1=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}<0\ , \qquad (1.8)$$

$$\left(\lambda_0\right)_3=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}>0$$

при любом $\beta \in (-\infty, +\infty)$.

Второе уравнение совокупности (1.8) имеет корни противоположного знака при наличии условия

$$1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2} > 0 \quad \text{или} \quad \omega_0^2 < 1-\beta^2\nu, \tag{1.9}$$

(здесь $\beta^2\nu < 1$)

$$(\lambda_0)_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2+4\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)}}{2},$$

$$(\lambda_0)_4 = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right)}}{2}.$$

При выполнении условия (1.9) корень $(\lambda_0)_2 < 0$, а $(\lambda_0)_4 > 0$ – при любом знаке β.

При $\beta^2\nu < 1$ возможно $\beta^2\nu+\omega_0^2 \geq 1$ и налагая условие

$\beta^2+4\left(1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}\right) \geq 0$, получим для ω_0^2 ограничения в виде

$$1-\beta^2\nu \leq \omega_0^2 \leq \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu$$

отсюда при $\beta < 0$ $(\lambda_0)_2 \geq 0$, $(\lambda_0)_4 \geq 0$, а при $\beta > 0$ имеем $(\lambda_0)_2 \leq 0$ и $(\lambda_0)_4 \leq 0$.

Итак, при $\omega_0^2 < 1-\beta^2\lambda$ корни $(\lambda_0)_1$ и $(\lambda_0)_2$ отрицательные, а $(\lambda_0)_3$ и $(\lambda_0)_4$ положительные и общее решение с учетом условия затухания (1.3) будет

$$W_0(x,y,t) = \left[C_1 \exp(-k\,\eta_1 x) + C_2 \exp(-k\,\eta_2 x)\right] e^{\,i(\omega t-ky)},$$

$$\eta_1 = +\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}, \quad \eta_2 = \frac{+\beta+\sqrt{\beta^2+4-4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}.$$

Удовлетворяя это решение граничным условиям (1.2) при $x=0$, получим соотношения

$$C_1\left(\eta_1^2-\nu\right)+C_2\left(\eta_2^2-\nu\right)=0,$$

$$C_1\eta_1\left(\eta_1^2-(2-\nu)\right)+C_2\eta_2\left(\eta_2^2-(2-\nu)\right)=0.$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получим следующее дисперсионное уравнение, определяющее частоту изгибных локализованных колебаний

$$\eta_1^2\eta_2^2+2(1-\nu)\eta_1\eta_2-\nu\left(\eta_1^2+\eta_2^2\right)+\nu(2-\nu)=0. \tag{1.10}$$

Учитывая соотношения $\eta_1^2=\beta\eta_1+1+\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}$, $\eta_2^2=\beta\eta_2+1-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0}$, это уравнение преобразуется к виду:

$$\eta_1^2\eta_2^2+2(1-\nu)\eta_1\eta_2-\nu\beta(\eta_1+\eta_2)-\nu^2=0 \tag{1.11}$$

После численного исследования (1.11) в промежутке $0<\omega_0^2<1-\beta^2\nu$ можно заключить, что для каждого ν существует такое $\beta_{\text{ïð}}$, что при $\beta>\beta_{\text{ïð}}$ уравнение (1.11) решений не имеет, а при $\beta<\beta_{\text{пр}}$ уравнение (1.11) имеет единственное решение в заданном промежутке. Для положительных β значение $\beta_{\text{пр}}$ для разных ν приведены в табл.1

Таблица 1

ν	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0
$\beta_{\text{пр}}$	0,0043	0,023	0,069	0,182	0,399	нет корней

Аналогично при $\beta<0$ можно заключить, что уравнение (1.11) для каждого ν имеет единственное решение ω_0^2 в интервале $\left[0,\ 1-\beta^2\nu\right]$ при $|\beta|>|\beta_{\text{пр}}|$, а при $|\beta|>|\beta_{\text{пр}}|$ уравнение (1.11) решений не имеет.

Если ω_0^2 меняется в интервале $\left(1-\beta^2\nu,\ \left(\beta^2/4+1\right)-\beta^2\nu\right)$ при $\beta<0$, то получаем затухающее решение

$$W_0(x,y)=C_1\exp\left(-k\,\eta_1 x\right)e^{i(\omega t-ky)}.$$

Из граничных условий (1.2) получим

$$\begin{cases} C_1\left(\eta_1^2-\nu\right)=0 \\ C_1\left(\eta_1^3+(2-\nu)\eta_1\right)=0. \end{cases}$$

Отсюда следует: $C_1=0$ и $W(x,y)\equiv 0$, т.е. в этом случае задача решений не имеет.

При $\beta^2\nu<1,\ \beta>0$ и $\omega_0^2\in\left(1-\beta^2\nu;\ \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu\right]$

получаем затухающее решение в виде

$$\begin{aligned} W_0(x,y,t)=\Big[C_1\exp\left(-k\,\eta_1 x\right)+C_2\exp\left(-k\,\eta_2 x\right)+ \\ +C_3\exp\left(-k\eta_3 x\right)\Big]\,e^{i(\omega t-ky)} \end{aligned} \tag{1.12}$$

где

$$\eta_1=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4+4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2},\quad \eta_2=\frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4-4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2},$$

$$\eta_3=\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4-4\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}}}{2}.$$

Из граничных условий (1.2) получим:

$$C_1\left(\eta_1^2-\nu\right)+C_2\left(\eta_2^2-\nu\right)+C_3\left(\eta_3^2-\nu\right)=0,$$

$$C_1\eta_1\left(\eta_1^2-(2-\nu)\right)+C_2\eta_2\left(\eta_2^2-(2-\nu)\right)+C_3\eta_3\left(\eta_3^3-(2-\nu)\right)=0.$$

При $C_3=0$ придём к дисперсионному уравнению (1.11).

При $C_2=0$ придё м к дисперсионному уравнению

$$\eta_1^2\eta_3^2+2(1-\nu)\eta_1\eta_3-\nu\beta(\eta_1+\eta_3)-\nu^2=0. \qquad (1.13)$$

При $C_1=0$ из граничных условий (1.2) получим

$$C_2\left(\eta_2^2-\nu\right)+C_3\left(\eta_3^2-\nu\right)=0,$$
$$C_2\eta_2\left(\eta_2^2-(2-\nu)\right)+C_3\eta_3\left(\eta_3^2-(2-\nu)\right)=0.$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю и учитывая соотношения

$$\eta_2^2=1+\beta\eta_2-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2},\ \eta_3^2=1+\beta\eta_3-\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2},$$

получим

$$\eta_2^2\eta_3^2+2(1-\nu)\eta_2\eta_3-\nu\beta(\eta_2+\eta_3)+$$
$$+2\nu\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}-\nu^2=0. \qquad (1.14)$$

Преобразуем полученное дисперсионное уравнение. Так как $-\eta_2$ и $-\eta_3$ являются корнями второго из уравнений совокупности (1.8), то $\eta_2+\eta_3=\beta,\quad \eta_2\eta_3=\sqrt{\beta^2\nu+\omega_0^2}-1$, подставляя в (1.14), получим $\omega_0^2=(1-\nu)^2$. Таким образом, мы получили, что уравнение (1.14) имеет решение $\omega_0=1-\nu$ для заданного ν независимо от β. Ясно, что при $0<\beta<1$ имеем $1-\beta^2\nu>(1-\nu)^2$ и ω_0^2 не попадает в интервал $\left(1-\beta^2\nu,\ \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu\right]$, а в случае $\beta>1$ $(1-\nu)^2>1-\beta^2\nu$ и $\omega_0^2=(1-\nu)^2$ попадают в указанный интервал. Т.е. задача (1.1)–(1.3) при $1<\beta<1/\nu$ имеет решение (существует частота ω_0 поперечной волны), для которого ω_0^2 лежит в интервале $\left(1-\beta^2\nu,\ \left(\beta^2/4+1\right)^2-\beta^2\nu\right]$.

Интересен случай $\beta^2\nu\geq 1$, где ω_0 следует искать в интервале $\left(0;\ (\beta^2/4+1)^2-\beta^2\nu\right)$.

При $\beta\to\infty$ можно заметить, что $\lim\limits_{\beta\to\infty}\eta_1=\infty$, а $\lim\limits_{\beta\to\infty}\eta_3=1$, которые показывают степень затухания первой и третьей слагаемых решения (1.12). Численные исследования показывают, что в указанном случае дисперсионное уравнение (1.11) не имеет решений, а уравнение (1.13) имеет для разных ν и β решения $x=\omega_0^2$, которые находятся в интервале (1; 1,5). Результаты численных расчетов приведены в табл. 2

В итоге получаем, что при $\beta^2\nu\geq 1$ задача (1.1)-(1.3) имеет два решения: при первом решении в (1.12) надо взять $C_2=0$, и для разных $\beta>0$ и ν получаем разные значения ω_0. При втором решении в (1.12) надо взять $C_1=0$ и при любом β $\left(\beta^2\nu\geq 1\right)$ взять $\omega_0=1-\nu$.

Таблица 2

ν	0.1			
ß	4	10	100	1000
$x=\omega^2$	1.04.	1.096	1.242	1.168
ν	0.25			
ß	2	5	10	100
$x=\omega^2$	1.085	1.16	1.22	1.3
ν	0.5			
ß	2	5	10	100
$x=\omega^2$	1.08	1.15	1.19	1.24

Заключение.
Таким образом, при рассмотрении локализованных изгибных волн в неоднородной пластинке от свободной границы при $\beta^2\nu<1$ в интервале $\left[0,1-\beta^2\nu\right]$ можно найти ω_0^2 (частоту локализованной волны) для каждого ν независимо от знака β, а именно: материал пластинки с глубиной уплотняется или разрежается.
Так как при рассмотрении неоднородной пластинки возникает новая локализованная волна, которая отсутствовала в однородном случае, то нужно провести новое исследование, которое связано с колебаниями пластинки конечных размеров (не полубесконечной). Предельный случай решения конечной задачи раскроет эффект влияния неоднородности в вопросе существования и характера локализованной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю. К. Об изгибной волне рэлеевского типа. //Акуст. журн. 1960. Т.6. № 1. С.124−126.
2. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. К вопросу об изгибных волнах, локализованных вдоль кромки пластин. //Прикл. Механика. 1994. Т.30. № 2. С.61−68.
3. Багдасарян Р.А., Казарян К.Б. Изгибные поверхностные волны в ортотропной пластинке. //Докл. АН Арм. ССР. 1986. Т.83. №2. С.69−72.
4. Енгибарян И.А., Мкртчян А.П. Локализованные колебания однородной полубесконечной пластинки-полосы. /Механика. Материалы 12-ой Республиканской конференции молодых ученых. Ереван: 2003. Изд. «Гитутюн» НАН Армении. С.83-86.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.07.2008