

УДК 539.3

**ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В  
СЛОИСТОЙ СИСТЕМЕ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ  
ПОДЛОЖКОЙ И ДВУМЯ ИЗОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ  
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ**

**Даноян З.Н., Манукян Г. А., Берберян А.Х., Даноян Н.З.**

**Ключевые слова:** электроупругие волны Лява, слоистые системы  
**Keywords:** electroelastic Love's waves, layered systems

**Չ. Ն. Դանոյան, Գ. Ա. Մանուկյան, Ա. Խ. Բերբերյան, Ն. Զ. Դանոյան**

**Լյավի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքները պլեզոէլեկտրիկ հիմքով և երկու իզոտրոպ կամայական հաստությամբ շերտերով շերտավոր համակարգում**

Աշխատանքում հետազոտվում է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների գոյությունը և վարքը 6, 4, 6mm, 4mm դասի պլեզոէլեկտրիկ հիմքով և կամայական հաստությամբ երկու շերտերով (հաղորդիչ-դիէլեկտրիկ, հաղորդիչ-հաղորդիչ) համակարգում՝ կախված համակարգի ֆիզիկամեխանիկական բնութագրիչներից և շերտերի հարաբերական հաստություններից [1-5]: Մակերևութային ալիքի բնութագրիչ հավասարումը հետազոտված է այն դեպքում, երբ հիմքին կպած հիմնական շերտը փափուկ է: Մասնավորապես ցույց է տրված ճեղքային տիպի Լյավի ալիքների գոյությունը, որը պայմանավորված է զուտ պլեզոէլեկտրական էֆեկտով: Ուսումնասիրված են Լյավի ալիքի կառուցվածքը և ալիքային ձևերի վարքը: Բերված են ալիքային ձևերի դիսպերսիոն կորերի որակական գրաֆիկները: Քննարկված է Լյավի էլեկտրաառաձգական ալիքների կապը Լյավի սովորական ալիքների և Բլյուստեյն-Գուլյաևի ալիքների հետ:

**Z.N.Danoyan, G.A.Manukyan, A. Kh.Berberyan, N.Z.Danoyan**

**Surface Electroelastic Love Waves in Layered System with a Piezoelectric Substrate and Two Isotropic Layers of Any Thickness**

In the article the existence and behaviour of electroelastic Love waves in three-layered system of a piezoelectric substrate of classes 6, 4, 6mm, 4mm and attached to her two isotropic layers (conductor-dielectric, conductor-conductor) of any thickness is investigated, depending on the physicomachanical characteristics of layered system and relative thicknesses of layers. The characteristic equation of a required surface wave is investigated in case of a basic soft layer. The research is based on properties of the electromechanical factor of surface wave given in the work [1-5]. Existence of a Love wave of a gap type caused by extremely piezoelectric effect in particular is shown. The structure and behavior of modes of Love waves are investigated. The qualitative diagrams of "dispersive" curves of modes of Love waves are given. The relation between electroelastic Love waves, pure-elastic Love waves, and Bleustein-Gulyaev waves is discussed.

В работе исследуется существование и поведение электроупругих волн Лява в трехслойной системе из пьезоэлектрической подложки классов 6, 4, 6mm, 4mm и прикрепленных к ней двух изотропных слоев произвольной толщины в зависимости от физико-механических характеристик слоистой системы и относительной толщины слоев. Характеристическое уравнение искомой поверхностной волны исследуется в случае основного мягкого слоя. Исследование основано на свойствах коэффициента электромеханической связи поверхностной волны, приведенных в работах [1-5]. В частности, показано существование волны Лява щелевого типа, обусловленной исключительно пьезоэлектрическим эффектом. Изучены структура и поведение мод волны Лява. Приведены качественные графики дисперсионных кривых. Обсужден вопрос связи электроупругих волн Лява с обычными волнами Лява и волнами Гуляева – Блюстейна.

Известно, что [1-3 и др.] в полубесконечной изотропной подложке, на которую нанесен изотропный слой из другого материала, могут распространяться сдвиговые поверхностные волны горизонтальной поляризации, называемые волнами Лява. Волны Лява в системе из 3-х непьезоэлектрических слоев рассмотрена в [2].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим слоистую систему, состоящую из упругой пьезоэлектрической подложки и прикрепленных к ней двух изотропных слоев, которая отнесена к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  (фиг.1). Слой, прикрепленный к подложке, называемый в дальнейшем основным, является проводящим слоем конечной толщины  $h_1$ . Другой слой, дополнительный, является проводником или диэлектриком и имеет конечную толщину  $h_2$ . Слои изготовлены из различных материалов.

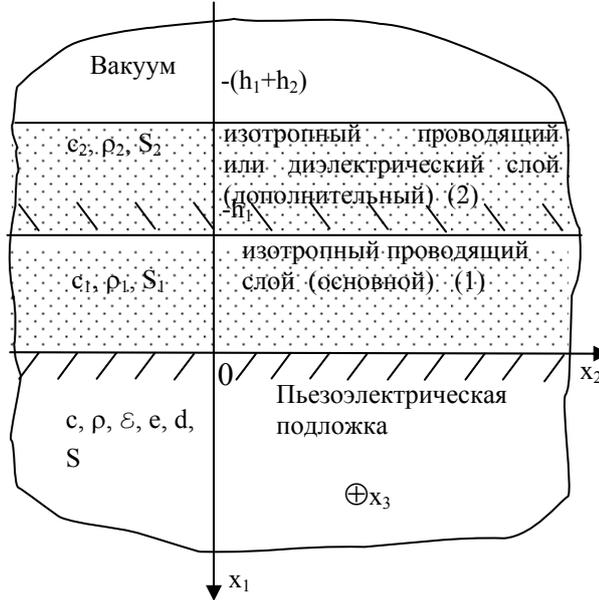
Пьезоэлектрическая подложка принадлежит симметриям классов 6, 4, 6mm, 4mm. Главная ось пьезоэлектрика ( $L_6$  или  $L_4$ ) направлена по оси  $Ox_3$ , ось  $Ox_1$  перпендикулярна к поверхности границы и направлена в глубь пьезоэлектрического полупространства. Верхний край слоистой системы  $x_1 = -(h_1 + h_2)$  механически свободен.

Упругие и электрические поля в пьезоэлектрической подложке (в области  $x_1 > 0$ ) взаимосвязаны и описываются квазистатическими уравнениями линейной теории электроупругости:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} \gamma_{lm} - e_{ikl} E_l, \quad D_i = e_{ikj} \gamma_{kj} + \varepsilon_{ik} E_k,$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{D} = 0, \quad \gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.2)$$



Фиг.1

Здесь  $u_i$  – составляющие упругого перемещения,  $\sigma_{ik}$  – составляющие тензора напряжений,  $\vec{E}(E_k)$  – напряженность электрического поля,  $\vec{D}(D_k)$  – электрическая индукция,  $\gamma_{lm}$  – составляющие тензора деформаций,  $\varphi$  – потенциал электри-

ческого поля,  $c_{iklm}$  – составляющие тензора упругих постоянных,  $e_{lik}$  – составляющие тензора пьезоэлектрических постоянных,  $\varepsilon_{ik}$  – составляющие тензора диэлектрических постоянных,  $x_k$  – пространственные координаты,  $t$  – время,  $\rho$  – плотность пьезоэлектрика.

В квазистатической постановке электрическое поле не проникает в проводящую среду, в слоях упругое поле описывается уравнениями (1.1), (1.2), где  $E_\ell \equiv 0$ .

В дальнейшем рассматривается следующее антиплоское деформированное состояние:

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv 0, \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2, t), \quad -(h_1 + h_2) < x_1 < +\infty, \\ \varphi &= \varphi(x_1, x_2, t), \quad 0 < x_1 < +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для случая (1.3) получим следующие дифференциальные уравнения:

1. В подложке ( $0 < x_1 < +\infty$ ):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c_{44} \nabla^2 u + e_{15} \nabla^2 \varphi \\ \varepsilon_{11} \nabla^2 \varphi - e_{15} \nabla^2 u &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

2. В основном слое ( $-h_1 < x_1 < 0$ ):

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = c_{44}^{(1)} \nabla^2 u_1 \quad (1.5)$$

3. В дополнительном слое ( $-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1$ ):

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = c_{44}^{(2)} \nabla^2 u_2, \quad (1.6)$$

где  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$  – двумерный оператор Лапласа. Здесь и далее величины, относящиеся к подложке и к слоям, обозначаются, соответственно, без индекса и индексами «1», «2».

Упругие и электрические характеристики должны удовлетворять условиям затухания:  $x_1 \rightarrow +\infty$ ,  $u \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  и граничным условиям на границе слоистой системы, а также условиям непрерывности на контактах между слоями и подложкой:

1. На поверхности  $x_1 = -(h_1 + h_2)$ :

$$\sigma_{13}^{(2)} = 0 \quad (1.7)$$

2. На поверхности  $x_1 = -h_1$ :

$$\sigma_{13}^{(1)} = \sigma_{13}^{(2)}, \quad u_1 = u_2 \quad (1.8)$$

3. На поверхности  $x_1 = 0$ :

$$\sigma_{13} = \sigma_{13}^{(1)}, \quad u = u_1, \quad \varphi = 0 \quad (1.9)$$

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} c_{44} &= c, \quad c_{44}^{(1)} = c_1, \quad c_{44}^{(2)} = c_2, \quad e_{15} = e, \quad e_{14} = d, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon, \\ \bar{c} &= c(1 + \chi^2), \quad \chi^2 = e^2 / \varepsilon c, \quad \bar{e} = e / \varepsilon, \quad S = \sqrt{\bar{c} / \rho}, \quad S_1 = \sqrt{c_1 / \rho_1}, \\ S_2 &= \sqrt{c_2 / \rho_2}, \quad \varphi' = \varphi - \bar{e} u, \quad S = S_0 \sqrt{1 + \chi^2}, \quad S_0 = \sqrt{c / \rho}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $\chi^2$  – коэффициент электромеханической связи,  $S_0, S$  – скорости распространения упругих и электроупругих сдвиговых объемных волн в подложке,  $S_1, S_2$  – скорости распространения упругих сдвиговых объемных волн в слоях,  $\varphi'$  – новая неизвестная величина, связанная с перемещением  $u$  и потенциалом  $\varphi$  подложки по (1.10).

Из уравнений (1.4)-(1.9) получим следующую математическую модель для описания электроупругих волн Лява:

1. Уравнения в подложке ( $0 < x_1 < +\infty$ ):

$$\nabla^2 u = \frac{1}{S^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

$$\nabla^2 \varphi' = 0$$

2. Уравнения в основном слое ( $-h_1 < x_1 < 0$ ):

$$\nabla^2 u_1 = \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

3. Уравнения в дополнительном слое ( $-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1$ ):

$$\nabla^2 u_2 = \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

4. Граничные условия при  $x_1 = -(h_1 + h_2)$ :

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (1.14)$$

5. Граничные условия при  $x_1 = -h_1$ :

$$u_1 = u_2, \quad c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = c_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (1.15)$$

6. Граничные условия при  $x_1 = 0$ :

$$u = u_1, \quad \bar{e}u + \varphi' = 0, \quad \bar{c} \frac{\partial u}{\partial x_1} + e \frac{\partial \varphi'}{\partial x_1} - d \frac{\partial \varphi'}{\partial x_2} - de' \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (1.16)$$

7. Условия затухания при  $x_1 \rightarrow +\infty$ :

$$u \rightarrow 0, \quad \varphi' \rightarrow 0 \quad (1.17)$$

**2. Решение задачи.** Решение уравнений (1.11)-(1.13) будем искать в виде плоской гармонической волны, которая распространяется в направлении оси  $Ox_2$  и затухает вдоль оси  $Ox_1$ , когда  $x_1 \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} u &= U(x_1) e^{i(px_2 - \omega t)}, & -(h_1 + h_2) < x_1 < +\infty \\ \varphi &= \Phi(x_1) e^{i(px_2 - \omega t)}, & 0 < x_1 < +\infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $U(x_1)$  и  $\Phi(x_1)$  – неизвестные амплитуды, удовлетворяющие условиям затухания,  $\omega$  – частота волны,  $p$  – волновое число, в предположении, что  $\omega > 0$ ,  $p > 0$ ,  $V = \omega/p$  – фазовая скорость искомой поверхностной волны.

Удовлетворяя уравнениям (1.11)-(1.13) и условию затухания (1.17), получим следующие решения:

1. В области  $x_1 > 0$ ,  $-\infty < x_2 < +\infty$ :

$$\begin{aligned} u &= U_0 e^{-p\beta(V)x_1} e^{i(px_2 - \omega t)}, \\ \varphi' &= \Phi'_0 e^{-p x_1} e^{i(px_2 - \omega t)}, \\ \varphi &= [\bar{e} U_0 e^{-p\beta(V)x_1} + \Phi'_0 e^{-p x_1}] e^{i(px_2 - \omega t)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

2. В области  $-h_1 < x_1 < 0$ ,  $-\infty < x_2 < +\infty$ :

$$u_1 = [U_{10}^+ e^{ip\beta_1(V)x_1} + U_{10}^- e^{-ip\beta_1(V)x_1}] e^{i(px_2 - \omega t)}. \quad (2.3)$$

3. В области  $-(h_1 + h_2) < x_1 < -h_1$ ,  $-\infty < x_2 < +\infty$ :

$$u_2 = [U_{20}^+ e^{ip\beta_2(V)x_1} + U_{20}^- e^{-ip\beta_2(V)x_1}] e^{i(px_2 - \omega t)}, \quad (2.4)$$

где  $U_0$ ,  $\Phi'_0$ ,  $U_{10}^+$ ,  $U_{10}^-$ ,  $U_{20}^+$ ,  $U_{20}^-$  – произвольные постоянные, которые также называются амплитудами,  $\beta(V)$ ,  $\beta_1(V)$ ,  $\beta_2(V)$  – коэффициенты затухания, определяемые формулами:

$$\beta(V) = \sqrt{1 - V^2 / S^2}, \quad \beta_1(V) = \sqrt{V^2 / S_1^2 - 1}, \quad \beta_2(V) = \sqrt{V^2 / S_2^2 - 1} \quad (2.5)$$

Из условия затухания в подложке следует, что коэффициент  $\beta(V)$  должен быть действительной положительной величиной, что соответствует упругой объемной волне. Другие два коэффициента  $\beta_1(V)$ ,  $\beta_2(V)$  могут быть как действительными, так и мнимыми.

Подставляя выражения (2.2)-(2.5) в граничные условия (1.14)-(1.16), для неизвестных амплитуд получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} U_0 &= U_{10}^+ + U_{10}^-, \quad \Phi'_0 = -\bar{e}U_0, \\ \beta_2(e^{-ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^+ - e^{ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^-) &= 0, \\ \bar{c}\beta U_0 + e\Phi'_0 &= ic_1\beta_1(U_{10}^- - U_{10}^+), \\ U_{10}^+ e^{-ip\beta_1 h_1} + U_{10}^- e^{ip\beta_1 h_1} &= U_{20}^+ e^{-ip\beta_2 h_1} + U_{20}^- e^{ip\beta_2 h_1}, \\ c_1\beta_1(e^{-ip\beta_1 h_1}U_{20}^+ - e^{ip\beta_1 h_1}U_{20}^-) &= c_2\beta_2(e^{-ip\beta_2 h_1}U_{20}^+ - e^{ip\beta_2 h_1}U_{20}^-), \\ \beta_2(e^{-ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^+ - e^{ip\beta_2(h_1+h_2)}U_{20}^-) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Для получения нетривиального решения системы (2.6) напишем условие равенства нулю детерминанта, составленного из коэффициентов системы (2.6)

$$\begin{aligned} \beta(V) &= \bar{c}_1\beta_1(V) \frac{\bar{c}_1\beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) + \bar{c}_2\beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}{\bar{c}_1\beta_1(V) - \bar{c}_2\beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2)} + R, \\ \hat{c}_1 &= c_1 / \bar{c}_1 = c_1 / c(1 + \chi^2), \quad \hat{c}_2 = c_2 / \bar{c} = c_2 / c(1 + \chi^2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$k_1 = p h_1 = 2\pi h_1 / \lambda, \quad k_2 = p h_2 = 2\pi h_2 / \lambda, \quad R = e\bar{e} / \bar{c} = e^2 / \varepsilon c(1 + \chi^2)$$

Здесь  $k_1, k_2$  – приведенные (относительные) постоянные,  $R$  – постоянная электромеханическая связь поверхностной волны,  $\lambda$  – длина волны.

$$0 < R < 1 \quad (2.8)$$

Если пьезоэффект отсутствует ( $e = 0$ ), то в уравнении (2.7) коэффициент  $R$  становится равным нулю, а  $S = S_0$ , и уравнение (2.7) преобразуется в дисперсионное уравнение упругой волны Лява, когда подложка несет два слоя. Это уравнение приведено в работе [2] и имеет следующий вид:

$$\beta(V) = \bar{c}_1 \beta_1(V) \frac{\bar{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) + \bar{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}{\bar{c}_1 \beta_1(V) - \bar{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}. \quad (2.9)$$

При отсутствии слоёв, когда имеем механически свободное пьезоэлектрическое полупространство с электрическим коротко замкнутым краем [3], (2.7) преобразуется в дисперсионное уравнение волны Блюстейна- Гуляева:

$$\beta(V) = R. \quad (2.10)$$

При отсутствии только дополнительного слоя ( $k_2 = 0$ ), (2.7) преобразуется в дисперсионное уравнение волны Лява, когда имеется пьезоэлектрическое полупространство с проводящим слоем [1,4].

$$\beta(V) = \tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) + R. \quad (2.11)$$

Для чисто упругих волн можем получить следующее дисперсионное уравнение

$$\beta(V) = \tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1). \quad (2.12)$$

Если поверхностная волна существует, то  $\beta(V) > 0$ . При чисто упругих волнах это возможно только в следующих трех случаях:

1) Коэффициенты  $\beta_1(V)$ ,  $\beta_2(V)$  являются реальными положительными величинами, которым соответствуют упругие объемные волны, которые испытывают полное внутреннее отражение от границ слоев, при этом имеет место условие

$$\tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{ctg}(\beta_1 k_1) > \tilde{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2) \quad (2.13)$$

и условие при пьезоупругих волнах

$$\tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{ctg}(\beta_1 k_1) \neq \tilde{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2), \quad (2.14)$$

$V_L$  удовлетворяет условиям: а)  $S_2 < S_1 < V_L < S$ , б)  $S_1 < S_2 < V_L < S$ .

2)  $\beta_1(V) > 0$ , а  $\beta_2(V)$  является мнимым.

Допустим

$$\beta_2(V) = i\gamma_2(V), \quad \gamma_2(V) = \sqrt{\frac{V^2}{S_2^2} - 1} > 0 \quad (2.15)$$

В этом случае уравнения (2.7), (2.9) примут вид:

$$\beta(V) = \bar{c}_1 \beta_1(V) \frac{\bar{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) - \bar{c}_2 \gamma_2(V) \operatorname{th}(\beta_2 k_2)}{\bar{c}_1 \beta_1(V) + \bar{c}_2 \beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) \operatorname{th}(\beta_2 k_2)} + R \quad (2.16)$$

В случае чистых упругих волн ( $R = 0$ ) должно выполняться условие

$$\tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{tg}(\beta_1 k_1) > \tilde{c}_2 \gamma_2(V) \operatorname{th}(\gamma_2 k_2) \quad (2.17)$$

Тогда  $V_L$  удовлетворяет условию с)  $S_1 < V_L < S_2 < S$  или d)  $S_1 < V_L < S < S_2$

3)  $\beta_2(V) > 0$ . Этот случай соответствует объемным волнам в дополнительном слое, которые подвергаются полному внутреннему отражению.  $\beta_1(V)$  – мнимая величина, которой соответствуют в основном слое упругие неоднородные волны. В этом случае возьмем

$$\beta_1(V) = i\gamma_1(V); \quad \gamma_1(V) = \sqrt{1 - \frac{V^2}{S_1^2}} \quad (2.18)$$

и уравнение (2.7) (так же, как и его частный случай (2.9)) примет вид:

$$\beta(V) = -\bar{c}_1\gamma_1(V) \frac{\bar{c}_1\gamma_1 \operatorname{th}(\gamma_1 k_1) - \bar{c}_2\beta(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}{\bar{c}_1\gamma_1 - \bar{c}_2\beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2) \operatorname{th}(\gamma_1 k_1)} + R.$$

$$\beta(V) = -\tilde{c}_1\gamma_1(V) \frac{\tilde{c}_1\gamma_1 \operatorname{th}(\gamma_1 k_1) - \tilde{c}_2\beta(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2)}{\tilde{c}_1\gamma_1 - \tilde{c}_2\beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2) \operatorname{th}(\gamma_1 k_1)} + R \quad (2.19)$$

В случае чистых упругих волн должно удовлетворяться условие ( $R=0$ ):

$$\tilde{c}_1\gamma_1 \operatorname{th}(\gamma_1 k_1) < \tilde{c}_2\beta_2 \operatorname{tg}(\beta_2 k_2) < \tilde{c}_1\gamma_1 \operatorname{cth}(\gamma_1 k_1), \quad (2.20)$$

а в случае электроупругих волн – условие

$$c \operatorname{th}(\gamma_1 k_1) \tilde{c}_1\gamma_1(V) \neq \tilde{c}_2\beta_2(V) \operatorname{tg}(\beta_2 k_2) \quad (2.21)$$

При этом, скорость волн Лява удовлетворяет условию

$$\text{е) } 0 < S_2 < V_L < S_1 < S \quad \text{или} \quad \text{ф) } 0 < S_2 < V_L < S < S_1 \quad (2.22)$$

Вернемся и рассмотрим случай, когда оба коэффициента  $\beta_1(V)$  и  $\beta_2(V)$  – мнимые. Этот случай в слоях будет соответствовать неоднородным упругим волнам.

Возьмем одновременно уравнения (2.15) и (2.18). Дисперсионное уравнение (2.7) и соответствующий ему частный случай (2.9) примут вид:

$$\beta(V) = -\tilde{c}_1\gamma_1(V) \frac{\tilde{c}_1\gamma_1 \operatorname{th}(\gamma_1 k_1) + \tilde{c}_2\gamma_2 \operatorname{th}(\gamma_2 k_2)}{\tilde{c}_1\gamma_1 + \tilde{c}_2\gamma_2 \operatorname{th}(\gamma_1 k_1) \operatorname{th}(\gamma_2 k_2)} + R, \quad \gamma_2(V) = \sqrt{V^2 / S_2^2 - 1} \quad (2.23)$$

Для чистых упругих волн ( $R = 0$ ) – правая часть отрицательна при любых значениях  $k_1$  и  $k_2$ . То есть упругие поверхностные волны Лява не могут образоваться от 5-ти парциальных неоднородных упругих волн, два или четыре из них должны быть однородными (объемными) волнами. Электроупругая волна Лява в уравнении (2.23) при наличии слагаемого  $R > 0$  также может существовать и образоваться из 5-ти неоднородных волн.

Как видим, наличие пьезоэлектрического эффекта расширяет область существования поверхностных волн Лява (и не только в этой задаче).

**3. Исследование дисперсионного уравнения.** Как было отмечено, при отсутствии двух слоев  $k_1 = k_2 = 0$  получаем дисперсионное уравнение (2.9), которое всегда имеет решение

$$V = V_{BG} = S_1 \sqrt{1 - R^2} \quad (3.1)$$

и представляет собой скорость распространения поверхностных волн Блюстейна-Гуляева в пьезоэлектрическом полупространстве (при отсутствии пьезоэффекта в упругом полупространстве будем иметь чисто упругую объемную волну со скоростью распространения  $V = S$ , которая при наличии пьезоэффекта преобразуется в поверхностную волну Блюстейна-Гуляева), если для слоистой структуры выполняется условие  $S_1 < S$  и  $S_2 < S$ .

Далее приведем некоторые возможные случаи слоев (табл. 3.1) и их физические величины (табл. 3.2).

**I.** Рассмотрим случай, когда берем первый ряд табл. 3.1 с данными второго, третьего и четвертого рядов табл. 2.

Допустим, что второй слой отсутствует, т.е.  $k_2 = 0$ . В этом случае для системы (PZT-4–Zn-1) из (2.7) получим следующее дисперсионное уравнение:

$$\beta(V) = -\tilde{c}_1 \beta_1(V) \operatorname{th}[\beta_1(V)k_1] + R \quad (3.2)$$

Так как  $R = \operatorname{const} > 0$ ,  $V_{BG} < S_1 < S$ , решения опишутся дисперсионными кривыми рис. 6.1 а) работы [4]. В нашем примере будем иметь следующую картину (фиг.2). Здесь скорость первой моды волны Лява  $V_1(k_1)$  в точке  $k_1 = k_{11} = 0$  начнется со скорости Гуляева-Блюстейна  $V = V_{BG}$ , возрастает вместе с возрастанием  $k_1$  и асимптотически стремится к значению  $V_{1\infty} = 2460,57$ , которая меньше скорости распространения объемной волны слоя  $S_1$ .

Таблица 1

Подложка	Основной слой	Дополнительный слой	Взаимоотношения
PZT-4 (трансверсально-изотропная)	Zn	Al	$V_{BG} < S_1 < S < S_2$
	Zn	Pt	$S_2 < V_{BG} < S_1 < S$
	Pt	Zn	$S_1 < V_{BG} < S_2 < S$
	Pt	Au	$S_1 < V_{BG} < S < S_2$
	Al	Zn	$S_2 < S_1 < V_{BG} < S$
	Al	Pt	$V_{BG} < S_2 < S < S_1$
	Al	Si	$S_2 < V_{BG} < S < S_1$
	Al	W	$V_{BG} < S < S_2 < S_1$
	Au	Pt	$S_1 < S_2 < V_{BG} < S$

Таблица 2

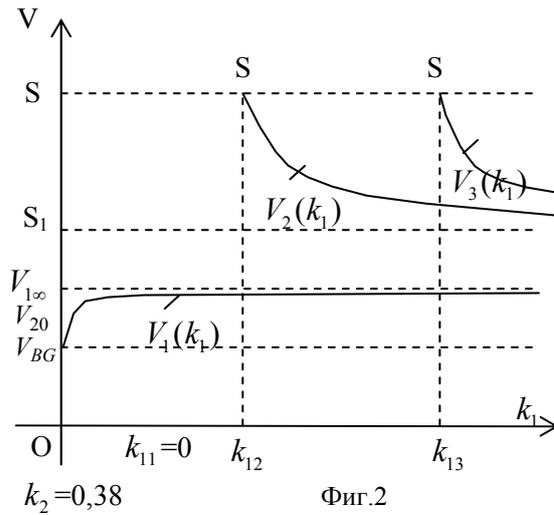
l	$C_{44}$ Н/м <sup>2</sup>	$\rho$ кг/м <sup>3</sup>	$e_{15}$ с/м <sup>2</sup>	$\varepsilon_{11}$ Ф/м	S м/с	$V_{BG}$ м/с
2 PZT-4	$2,56 \cdot 10^{10}$	$7,5 \cdot 10^3$	12,7	$65 \cdot 10^{-10}$	2592,65	2256,85
3 Zn	$4,5 \cdot 10^{10}$	$7,14 \cdot 10^3$	–	–	2510,48	–
4 Al	$2,83 \cdot 10^{10}$	$2,702 \cdot 10^3$	–	–	3236,31	–
5 Pt	$7,65 \cdot 10^{10}$	$21,4 \cdot 10^3$	–	–	1690,71	–
6 Au	$4,24 \cdot 10^{10}$	$19,30 \cdot 10^3$	–	–	1482,19	–
7 W	$16,06 \cdot 10^{10}$	$19,26 \cdot 10^3$	–	–	2887,65	–
8 Si					5842,5	

Высшие моды волны начинаются, соответственно, с критических значений мод  $k_{12} = 7,79$ ,  $k_{13} = 19,97$ ,  $k_{14} = 32,15$  и др., в случае которых имеем объемные волны со скоростью распространения  $V = S$ , затем они преобразуются в поверхностные волны, скорости которых  $V_i(k_1)$  с возрастанием  $k_1$  убывают и в бесконечности приближаются к скорости  $V = S_1$  объемных волн, распространяемых в слое.

Предположим, что первый слой отсутствует, т.е.  $k_1 = 0$ . В случае системы подложка-слой-2 получим следующее дисперсионное уравнение:

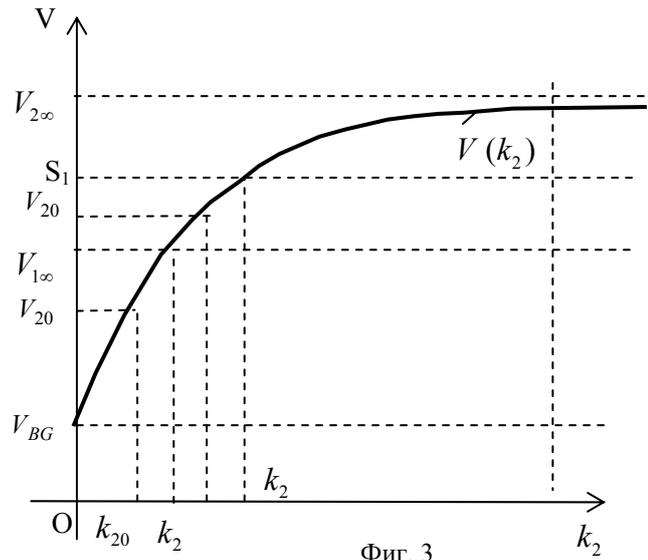
$$\beta(V) = -\tilde{c}_2 \gamma_2(V) \operatorname{th}[\gamma_2(V) k_2] + R, \quad (3.3)$$

где учтено, что в случае  $V < S < S_2$  имеем  $\beta_2 = i\gamma_2$ . Так как имеем случай жесткого слоя ( $S < S_2$ ,  $0 < R = \text{const} < 1$ ), следовательно, будем иметь одно решение (3.4), которое опишется дисперсионными кривыми, приведенными на фиг.3.



Фиг.2

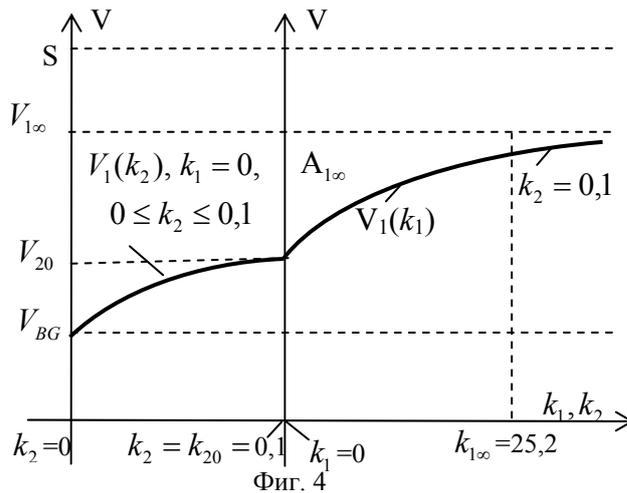
Как видно из фиг.3, скорость волны Лява начинается со скорости волны Блюстейна- Гуляева  $V_{GB}$  (когда  $k_2 = 0$ ) и с возрастанием  $k_2$  монотонно возрастает. При значении  $k_2 = 0,817$  достигает значения  $V_{1\infty} = 2460,57 \text{ м/с}$  (о чем было сказано при описании частного случая  $k_2 = 0$ ). При значении  $k_2 = 1,3268$  достигает значения  $S_1 = 2510.48 \text{ м/с}$  (которая равна скорости распространения объемной сдвиговой волны в первом слое), затем возрастая в бесконечности, стремится к значению  $V_{2\infty} = 2563,49 \text{ м/с}$  (практически, когда  $k_2 \geq 12$ ). Достигая этого значения при  $k_1 = 0$ , в случае величины  $k_2 < 0,817$  первая мода волны Лява распространяется с определенной скоростью  $V_{20}$ , причем  $V_{20} < V_{1\infty}$ .



Фиг. 3

Допустим, что второй слой имеет определенную фиксированную толщину  $k_{20}$ , а толщина первого слоя начинается изменяться в интервале  $k_1 \in [0; \infty]$ . Если  $k_1 = 0$ , то в системе подложка-слой-2 при толщине  $k_2 = k_{20} < 0,817$  (фиг.3) волна Лява распространится со скоростью  $V_{20}(k_2) < V_{1\infty}$ .

При добавлении первого слоя толщиной  $k_1$  в полученной системе скорость первой моды волны Лява больше, чем  $V_{20}$ , которая с  $V_{20}$  монотонно возрастает до  $V_{1\infty}$  при возрастании  $k_1$  с нуля до  $\infty$ . Следовательно, дисперсионная кривая первой моды будет иметь вид (фиг. 4) (напр., при значении  $k_{20} = 0,1$ ).

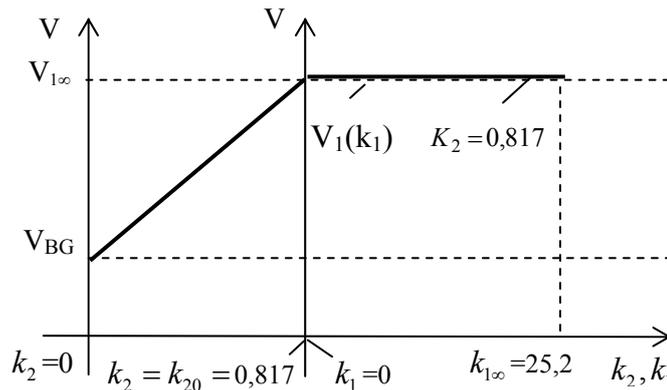


Фиг. 4

При возрастании  $k_{20}$  возрастает также и скорость  $V_{20}$  (фиг.3), так что точка  $A_{20}$  фиг. 4 перемещается вверх, когда же  $k_{20}$  стремится к значению  $k_2 = 0,817$ ,

то  $V_{20}$  стремится к  $V_{1\infty}$ , т.е. точка  $A_{20}$  стремится к точке  $A_{1\infty}$ , интервал  $(V_{20}, V_{1\infty})$  сжимается к точке  $V_{1\infty}$  независимо от значения  $k_1$ ; первая мода волны Лява распространяется с постоянной скоростью  $V = V_{1\infty}$  (фиг.4). В случае, когда толщина второго слоя  $k_{02}$  становится больше, чем  $k_2 = 0.817$ , скорость распространения волны Лява  $V_{20}$  в системе подложка-слой-2 становится больше значения  $V_{1\infty}$  (фиг.3). Теперь, при добавлении первого слоя толщиной  $k_1$  и при возрастании  $k_1$  с нуля до бесконечности, в полученной системе волна Лява начинает распространяться с монотонно убывающей скоростью  $V_{20}$  до значения  $V_{1\infty}$ .

Дисперсионная кривая изображена на фиг.6, когда  $k_{20} = 1$  и  $V_{20} = 2482,5$  /ñ (практически  $k = k_{\infty} = 20$ ,  $V = V_{1\infty}$ ). Когда толщина второго слоя становится  $k_{20} = 1,327$  (фиг.3), в системе подложка-слой-2 распространяется поверхностная волна  $V = S_1$ , которая в зависимости от  $k_1$  преобразуется, как на фиг.7. Затем, при возрастании  $k_2$  возрастает также  $V_{20}$  (напр., при  $k_{20}$   $V_{20} = 2563,5$ ) и дисперсионная кривая будет иметь вид (фиг. 7).



Фиг. 5

Высокие моды волны начинают распространяться с объемных волн подложки при фиксированном случае  $k_2$  для определенных критических значений  $k_1$  и параллельно возрастанию  $k_1$  распространяются с убывающими скоростями, которые стремятся в первом слое к скоростям распространения  $V = S_1$  сдвиговых объемных волн. Ниже приведены критические значения 1– 4 возникающих мод волны для толщины  $k_2$  второго слоя исследуемой системы (табл. 3).

Как видно из табл.3, начиная приблизительно со значения  $k_2 = 10$  значения  $k_{12}, k_{13}, k_{14}$  и значения других критических точек устанавливаются и остаются практически неизменными в зависимости от сходимости  $\text{th}(\gamma_2 k_2)$  при возрастании  $k_2$ . С другой стороны, для каждого значения  $k_2$  разность двух соседних

критических точек  $k_1$  равна приблизительно 12.18, которая зависит от периодичности  $\text{tg}(k_1 \beta_1)$ .

Таблица 3

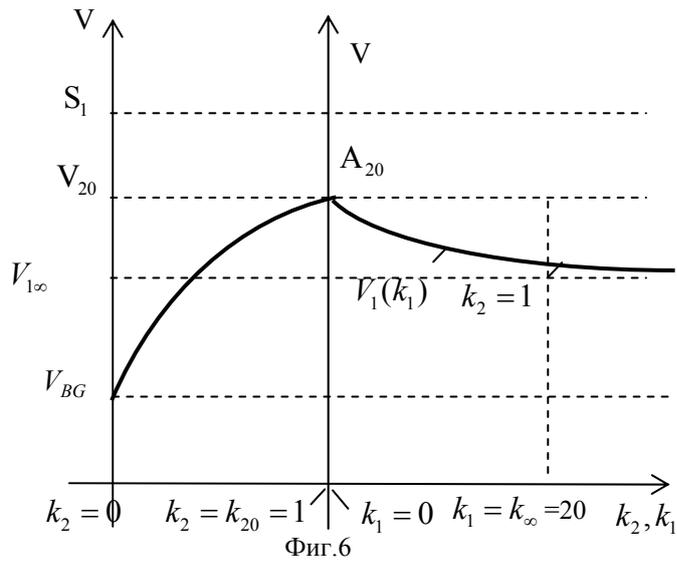
$k_2$	$k_{12}$	$k_{13}$	$k_{14}$
0	7.787	19.967	32.147
0.1	8.124	20.31	32.489
1	10.37	22.54	34.72
10	11.55	23.72	35.90
100	11.55	23.72	35.90

Таким образом, для электроупругих поверхностных волн Лява в определенных слоистых структурах, определяемых условиями случая а), получили:

- 1) волна Лява существует для любых относительных толщин слоев структуры  $k_1$ ,  $k_2$  и представляет собой многомодную дисперсионную волну;
- 2) поведение высших мод одинаково для любых значений  $k_1$ ,  $k_2$ . При параметре  $k_1$  они начинаются в подложке сдвиговыми волнами, распространяющимися со скоростью  $V = S$ , а при параметре  $k_2$  они начинаются для каждого фиксированного значения определенных критических значений  $k_{12}(k_2)$ ,  $k_{13}(k_2)$ ,  $k_{14}(k_2)$  и др.

С увеличением  $k_1$  сдвиговые волны, распространяемые в подложке, становятся поверхностными волнами и распространяются с убывающей скоростью, значения которых стремятся к скоростям объемных волн, распространяющихся в первом слое  $V = S_1$ , при  $k_1 \rightarrow \infty$ . С увеличением  $k_2$  указанные критические значения устанавливаются и становятся практически постоянными. Разность соседних критических значений в случае любого  $k_2$  одинаковы и приблизительно равны 12.18 (фиг. 2, табл.3.2);

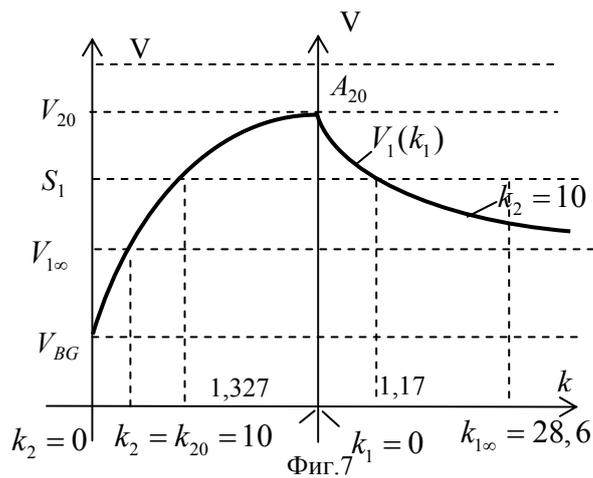
- 3) первая мода волны Лява зависит от толщины 2-го слоя  $k_2$  и с таким поведением: при  $0 < k_2 < 0,817$  первая мода в точке  $k_1 = 0$  начинается с поверхностной волны, распространяющейся со скоростью  $V_{02}(k_2)$  в системе подложка-слой-2 и с увеличивающейся скоростью распространяется в слоистой системе, достигая граничной скорости  $V_{1\infty}$  при  $k_1 \rightarrow +\infty$ .  $V_{1\infty} = 2460,57$  – граничная скорость, к которой стремится скорость поверхностной волны, распространяющейся в системе подложка-слой-1 при  $k_1 = +\infty$  (фиг.4).



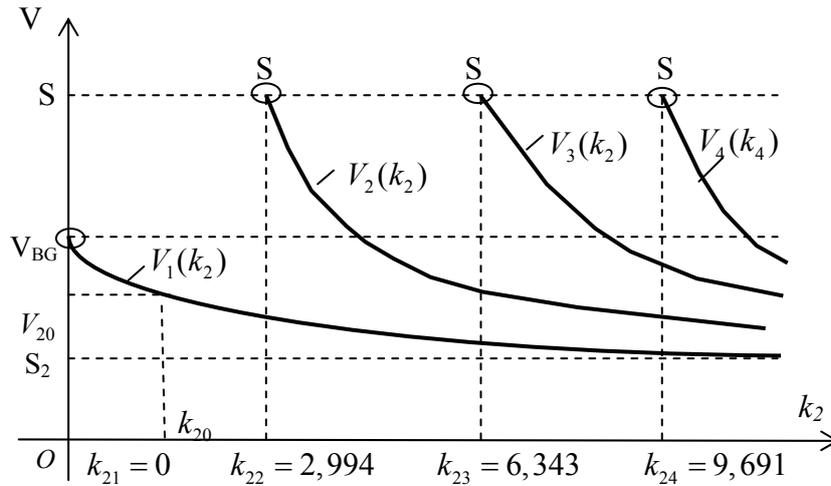
Фиг.6

При  $k_2 = 0,817$  волна Лява распространяется с постоянной скоростью  $V_{1\infty}$ , которая не зависит от значения толщины  $k_1$  (фиг.5).

При  $k_2 = 0,817$  первая мода волны Лява начинает распространяться с объемной волны системы подложка-слой-2, которая имеет скорость  $V_{02}(k_2)$  и с убывающей скоростью достигает граничного значения  $V_{1\infty}$  при  $k_1 \rightarrow \infty$  (фиг.6). В частности, при  $k = k_{20} = 1,327$  скорость дисперсионной волны начинается со значения  $V_{02} = S_1$  (фиг.10). При возрастании  $k_2$  возрастает также начальная скорость и приближается к значению  $V_{2\infty}$  (фиг.6). Дисперсионная кривая имеет вид (фиг.10).



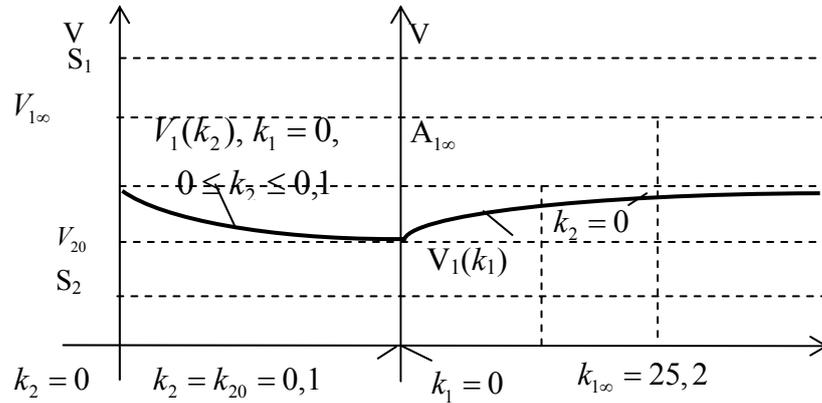
Фиг.7



Фиг.8

II. Перейдем к слоистым структурам, удовлетворяющим условиям второго ряда табл.1 с данными второго, третьего и пятого рядов табл. 2. В этом случае  $S_2 < S_1 < S$ , т.е первый слой снова мягок по отношению к подложке, а второй слой, в свою очередь, мягок по отношению к первому (следовательно, и по отношению к подложке). Снова рассмотрим частный случай  $k_2 = 0$ , затем случай  $k_1 = 0$ , а дальше – общий случай  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ . В случае  $k_2 = 0$  получаем рассмотренную ранее, в случае а) систему (PZT-4–Zn-1), где волновой процесс описывается дисперсионной кривой, фиг.4, 5.

При  $k_1 = 0, k_2 \neq 0$  уже имеем новую систему PZT-4–Pt-2 (подложка-слой-2), в которой слой мягче подложки. В этом случае из (2.7) получим уравнение:

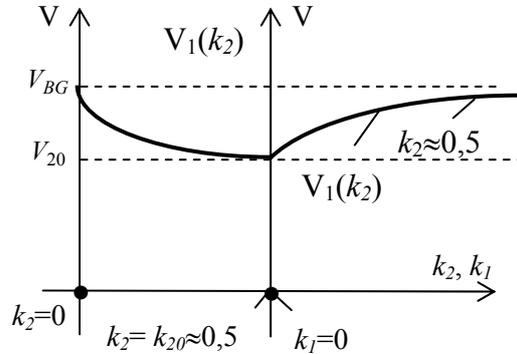


Фиг.9

$$\beta(V) = -\tilde{c}_2 \beta_2(V) \text{th}[\beta_2(V)k_2] + R, \quad (3.4)$$

которое мы должны исследовать в интервале  $k_2 \in [0, \infty], V \in [0, S]$ . Так как  $S_2 < S$ , то в интервале  $V \in [0, S_2]$  уравнение (3.4) можем заменить уравнением (3.3). Воспользуемся результатами работы [4].

Поскольку здесь  $R = \text{const} > 0$  и  $S_2 < V_{BG} < S$ , поведение волны Лява описывают дисперсионные кривые, приведенные на рис. 5.2 работы [4], которые в нашей работе будут иметь вид (фиг.8).



Фиг.10

Как видно из фиг.8, высокие моды волны Лява начинаются с критических значений  $k_{22}, k_{23}, k_{24}$  и т.д., как основные объемные волны, распространяющиеся со скоростью  $S$ , затем, с увеличением  $k_2$ , становятся поверхностными, и с убыванием скорости приближаются к волне, распространяющейся в слое со скоростью  $S_2$ . Первая мода  $k_2 = 0$  начинается с поверхностной волны Гуляева–Блюстейна, которая имеет скорость  $V_{BG}$  и распространяется с убывающей скоростью  $V_1(k_2)$  и при  $k_2 \rightarrow \infty$  стремится к значению  $S_2$ .

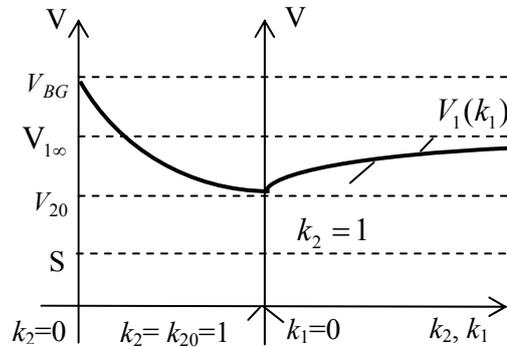
Перейдем к общему случаю. Возьмем для второго слоя толщину  $k_{20}$  (напр.,  $k_{20} = 0,1$ ), а  $k_1$  будем менять в интервале  $[0, \infty]$ . При  $k_1 = 0$  в системе подложка-дополнительный слой-2 распространится волна Лява со скоростью  $V_{20}(k_{20}) > S_2$  (фиг.9). Если добавить первый слой толщиной  $k_1$ , то в полученной двухслойной системе распространится волна Лява, скорость первой моды которой будет больше, чем  $V_{20}$ , и которая при  $k_1 \rightarrow +\infty$  будет монотонно возрастать со значения  $V_{20}$  до  $V_{1\infty} = 2460,57$ . Отметим, что при  $k_1 = 0,38$  скорость  $V_1(k_1)$  получит значение  $V_{BG}$ . Приведем дисперсионную кривую этой моды при  $k_2 = 0, 1$  (фиг.9).

При возрастании  $k_2 = k_{20}$  приблизительно при значении 0,5 и при  $k_1 \rightarrow \infty$  в качестве асимптоты выступает значение  $V = V_{BG}$  (фиг.10).

При продолжении возрастания  $k_2$ , например, когда  $k_2 = k_{20} = 1$ , дисперсионная кривая имеет поведение, приведенное на фиг.12.

При более больших значениях  $k_2$ , например,  $k_2 = k_{20} = 10$ , будем иметь  $V_{20} = 1892,8 \text{ i } / \tilde{n}$ ,  $V_{1\infty} = 1905,52 \text{ i } / \tilde{n}$ , а при  $k_2 = k_{20} = 100$  будем иметь  $V_{20} = 1892,5$ ,  $V_{1\infty} = 1892,699$ . То есть, когда  $k_2$  возрастает, величины  $V_{20}$  и  $V_{1\infty}$  тесно приближаются друг к другу и интервал  $(V_{20}, V_{1\infty})$  преобразуется в точку; и в

этом случае волна Лява становится независимой от  $k_1$  и распространяется со скоростью  $V_{2\infty}$  (фиг.12).



Фиг.11

Теперь обратимся к более высоким модам. Например, при  $k_2 = 0, 1$  для  $k_1$  получаем следующие критические значения:  $k_{12} = 4.15$ ,  $k_{13} = 18.0$ ,  $k_{14} = 26.65$ . Поскольку в этом случае (т.е.  $S_2 < V$ ) в характеристическое уравнение входит функция  $\text{tg}(\beta_2(V)k_2)$ , то в силу её цикличности критические точки будут перемещаться по определенному закону по оси  $k_1$ , в случае, когда изменяется  $k_2$ . В качестве примера наблюдаем за изменением критической точки  $k_{12}$ , которая приведена в табл. 4.

Таблица 4

$K_2$	0,1	1,68	2	2,5	2,9	2,95	2,97	
$K_{12}$	4,15	1,705	1,5	1,09	0,36	0,18	0,11	
$K_2$	2,98	2,99	2,995	3	4	6	6,3	6,34
$K_{12}$	0,06	0,02	0	10,55	2,65	0,95	0,25	0,01

Таким образом, для электроупругой волны Лява слоистой системы, определяемой условиями II, получили следующие результаты:

1) критические точки  $k_{12}, k_{13}, k_{14}$   $k_1$  высших мод волны Лява периодически перемещаются вдоль оси  $k_1$  в зависимости от полученного результата  $k_2$ ;

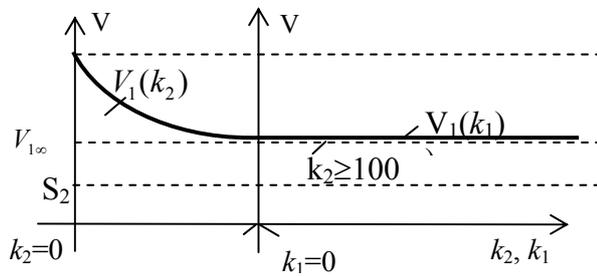
2) поведение первой моды волны Лява зависит от толщины второго слоя  $k_2$  и определяется так: она начинается с распространяющейся в системе подложка-слой -2 и распространяющейся со скоростью  $V_{20}(k_2)$  волны Лява в случае  $k_1 = 0$  и параллельно возрастанию  $k_1$  начинает распространяться с возрастающей скоростью; при определенном значении  $k_1$  ( $k_2 = 0, 1$ ;  $k_1 = 0,38$ ) имеет скорость волны Гуляева–Блюстейна  $V_{BG}$ , затем скорость возрастает и асимптотично стремится к граничной скорости  $V_{1\infty}$ , которая зависит от значения  $k_2$  (при  $k_2 = 0,1$   $V_{1\infty} = 2460,57 \text{ м/с}$ ) (фиг.9).

При  $k_2 \approx 0,5$  скорость первой моды, начиная со значения  $V_{20}(k_{20})$  (которая меньше, чем в предыдущем случае), возрастает, а при  $k_1 \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к значению  $V_{BG}$  (фиг.10).

Затем  $k_2$ , увеличиваясь, изменяется в интервале  $[V_{20}, V_{1\infty}]$ , где скорость  $V_{1\infty}$  стремится асимптотически при  $k_1 \rightarrow +\infty$ , причем  $V_{1\infty} < V_{BG}$  (фиг.11).

Начиная с больших значений  $k_2$ , интервал  $[V_{20}; V_{1\infty}]$  сужается и преобразуется в точку, а волна по  $k_1$  распространяется с постоянной скоростью  $V_{1\infty} > S_2$  (фиг.12).

**III.** Перейдем к случаю, когда берем третий ряд табл. 1 с данными второго, третьего и пятого рядов табл.2. В этом случае  $S_1 < V_{BG} < S_2 < S$ , т.е. оба слоя мягки по отношению к подложке, а первый слой мягок по отношению ко второму. Вначале обсудим частные случаи –  $k_1, k_2 \neq 0$ , а затем – общий случай.



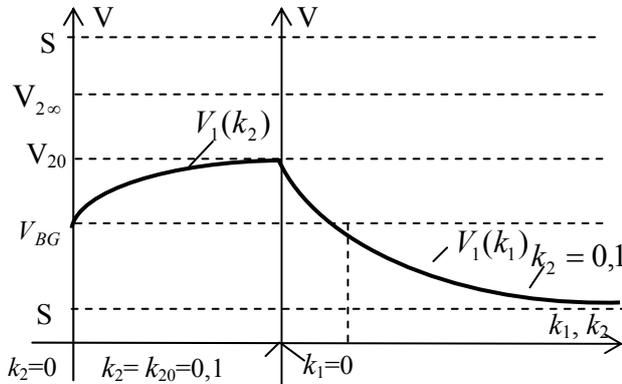
Фиг.12

В случае  $k_2 = 0$  получаем систему подложка-слой-1 (PZT-4-Pt(1)), что аналогично системе PZT-4-Pt(2), описанной в предыдущем примере, которая получается при равенстве параметра  $k_1 = 0$ , т.е. описание волнового процесса будет иметь вид: фиг.8, только необходимо выполнить замену:  $k_2 \rightarrow k_1, S_2 \rightarrow S_1, k_{21} \rightarrow k_{11}, k_{22} \rightarrow k_{12}$  и др. (фиг.13).

В случае  $k_1 = 0$  получим систему подложка-слой (2) PZT-4-Zn(2), что аналогично случаям, описанным в последних двух случаях – PZT-4-Zn(1), когда параметр  $k_2$  равен нулю. Итак, в этом случае поведение волны Лява опишется кривой, изображенной на фиг.2, где необходимо выполнить следующую замену обозначений:  $k_1 \rightarrow k_2, S_1 \rightarrow S_2, k_{11} \rightarrow k_{21}, k_{12} \rightarrow k_{22}, V_{\infty 1} \rightarrow V_{\infty 2}$  (фиг.14).

Перейдем к общему случаю. Возьмем для второго слоя определенную фиксированную толщину  $k_2$  (например,  $k_{20} = 0,1$ ), а  $k_1$  будем изменять в интервале  $[0, \infty]$ . Если  $k_1 = 0$ , то в системе подложка-слой будет распространяться волна Лява со скоростью  $V_{20} < V_{2\infty}$  (фиг.13). Теперь добавим 1-ый слой толщиной  $k_1$ . В полученной двухслойной системе распространится первая мода волны Лява со скоростью меньшей  $V_{20}$ , которая при определенном значении  $k_{1*}$  приравняется к скорости волны Гуляева–Блюстейна и затем, параллельно

возрастанию значения  $k_1$ , убывая, будет стремиться к скорости объемных волн первого слоя  $S_1$ . Дисперсионная кривая будет иметь вид, приведенный на фиг. 13.



Фиг.13

Рассмотрим случай I, когда берем первый ряд табл.1 с данными второго, третьего и четвертого рядов табл. 2 (фиг.8). При возрастании параметра  $k_2$  скорость  $V_{20}(k_2)$  также возрастёт, стремясь к значению  $V_{2\infty}$  и скорость  $V_1(k_1)$  изменится подобно предыдущему случаю – убывает от  $V_{20}(k_2)$  до  $S_1$ . Дисперсионная кривая подобна кривой фиг.2. Высокие моды возникают подобным образом. Например, при  $k_1 = 0,1$  значение критических точек будет  $k_{12} = 2,989$ ,  $k_{13} = 6,338$ ,  $k_{14} = 9,678$ .

Таким образом, для электроупругих волн Лява в определенных слоистых структурах, определяемых условиями случая а), получили следующие значения:

1) волна Лява существует для любых относительных толщин слоев структуры –  $k_1, k_2$  и представляет собой многомодную дисперсионную волну;

2) поведение высших мод одинаково для любых значений  $k_1, k_2$ . Они начинаются в подложке сдвиговыми волнами, распространяющимися со скоростью  $V = S$  при параметре  $k_1$ ; в случае параметра  $k_2$  – для каждого фиксированного значения определённых критическими значениями –  $k_{12}(k_2), k_{13}(k_2), k_{14}(k_2)$  и др.. С увеличением  $k_1$  сдвиговые волны, распространяемые в подложке, становятся поверхностными волнами и распространяются с убывающей скоростью, значения которых стремятся к скоростям объемных волн, распространяющихся в первом слое  $V = S_1$  при  $k_1 \rightarrow \infty$ . С увеличением  $k_2$  указанные критические значения устанавливаются и становятся практически постоянными. Разность соседних критических значений в случае любого  $k_2$  одинакова и приблизительно равна 12.18 (фиг. 2, табл.2).

Первая мода волны Лява зависит от толщины 2-го слоя  $k_2$  и имеет поведение:

при  $0 < k_2 < 0,817$  первая мода в точке  $k_1 = 0$  начинается с поверхностной волны, распространяющейся со скоростью  $V_{02}(k_2)$  в системе подложка-слой-2 и с увеличивающейся скоростью распространяется в слоистой системе, достигая граничной скорости  $V_{1\infty}$  при  $k_1 \rightarrow +\infty$  (фиг. 4);

при  $k_2 = 0,817$  волна Лява распространяется с постоянной скоростью  $V_{1\infty}$ , которая не зависит от значения толщины  $k_1$  (фиг.5);

при  $k_2 > 0,817$  первая мода волны Лява начинается со значения объемной волны системы подложка-слой-2, которая имеет скорость  $V_{02}(k_2)$  и с убывающей скоростью достигает значения  $V_{1\infty}$  при  $k_1 \rightarrow \infty$  (фиг.6). В частности,

при  $k = k_{20} = 1,327$  скорость волны начинается со значения  $V_{02} = S_1$  (фиг.7);

при возрастании  $k_2$  возрастает также начальная скорость и приближается к значению  $V_{2\infty}$  (фиг.3). Дисперсионная кривая имеет вид фиг.7.

**Заключение.** Таким образом, для электроупругой волны Лява слоистой системы, определяемой условиями II, получили следующие результаты.

1) Критические точки  $k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_1$  высших мод волны Лява периодически перемещаются вдоль оси  $k_1$  в зависимости от полученного результата  $k_2$ .

2) Поведение первой моды волны Лява зависит от толщины второго слоя  $k_2$  и определяется так: она начинается с распространяющейся в системе подложка-слой-2 и распространяющейся со скоростью  $V_{20}(k_2)$  волны Лява в случае  $k_1 = 0$ , и параллельно возрастанию  $k_1$  начинает распространяться с возрастающей скоростью; при определенном значении  $k_1$  (когда  $k_2 = 0,1, k_1 = 0,38$ ) имеет скорость волны Гуляева–Блюстейна  $V_{BG}$ , затем скорость возрастает и асимптотично стремится к граничной скорости  $V_{1\infty}$ , которая зависит от значения  $k_2$  (в случае  $k_2 = 0,1, V_{1\infty} = 2460,57 \text{ м/с}$ ) (фиг.9).

Когда значение  $k_2$  достигает примерно значения 0.5, скорость первой моды, начиная со значения  $V_{20}(k_{20})$  (которая меньше, чем в предыдущем случае), возрастает и при  $k_1 \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к значению  $V_{BG}$  (фиг.10).

Затем, при возрастании  $k_2$ , увеличиваясь, изменяется в интервале  $[V_{20}, V_{1\infty}]$ , где  $V_{1\infty}$  стремится асимптотически при  $k_1 \rightarrow +\infty$ , причем  $V_{1\infty} < V_{BG}$  (фиг.11).

Начиная с больших значений  $k_2$ , интервал  $[V_{20}; V_{1\infty}]$  сужается и преобразуется в точку, а волна по  $k_1$  распространяется с постоянной скоростью  $V_{1\infty} > S_2$  (фиг.12).

Перейдем к случаю III, когда берём третий ряд табл. 3.1 с данными второго, пятого и третьего рядов табл. 2. В этом случае  $S_1 < V_{BG} < S_2 < S$ , т.е. оба слоя мягки по отношению к подложке, а первый слой мягок по отношению ко второму. Вначале обсудим частные случаи –  $k_2, k_1 \neq 0$ , а затем – общий случай.

В случае  $k_2 = 0$  получаем систему PZT-4-Pt(1), что аналогично системе PZT-4-Pt(2), описанной в предыдущем примере, которая получается при равенстве параметра  $k_1 = 0$ , т.е. описание волнового процесса будет иметь вид: фиг.8, только необходимо выполнить замену:  $k_2 \rightarrow k_1, S_2 \rightarrow S_1, k_{21} \rightarrow k_{11}, k_{22} \rightarrow k_{12}$  и др. (фиг.12).

В случае  $k_1 = 0$  получим систему подложка-слой-2 PZT-4-Zn(2), что аналогично случаям, описанным в последних двух случаях – PZT-4-Zn(1) при равенстве нулю параметра  $k_2$ . Так что, в этом случае поведение волны Лява опишется кривой, изображенной на фиг.2, где необходимо выполнить следующую замену обозначений:  $k_1 \rightarrow k_2$ ,  $S_1 \rightarrow S_2$ ,  $k_{11} \rightarrow k_{21}$ ,  $k_{12} \rightarrow k_{22}$ ,  $V_{\infty 1} \rightarrow V_{2\infty}$  (фиг.13).

Перейдем к общему случаю. Возьмем для второго слоя определенную фиксированную толщину  $k_2$  (например,  $k_{20} = 0,1$ ), а  $k_1$  будем изменять в интервале  $[0, \infty]$ . Если  $k_1 = 0$ , то в системе подложка-слой будет распространяться волна Лява со скоростью  $V_{20} < V_{2\infty}$  (фиг.8). Теперь добавим 1-ый слой толщиной  $k_1$ . В полученной двухслойной системе распространится первая мода волны Лява со скоростью, меньшей  $V_{20}$ , которая при определенном значении  $k_{1*}$  приравняется к скорости волны Гуляева–Блюстейна и затем, параллельно возрастанию значения  $k_1$ , убывая, будет стремиться к скорости объемных волн первого слоя  $S_1$ . Дисперсионная кривая будет иметь вид, приведенный на фиг.13. Рассмотрим случай I, когда берем первый ряд табл. 1 с данными второго, третьего и четвертого рядов табл. 2 (фиг.13). Затем, при возрастании параметра  $k_2$  скорость  $V_{20}(k_2)$  также возрастёт, стремясь к значению  $V_{2\infty}$  и скорость  $V_1(k_1)$  изменится подобно предыдущему случаю – убывает от  $V_{20}(k_2)$  до  $S_1$ . Дисперсионная кривая подобна кривой фиг.13. Высокие моды возникают подобным образом. Например, приведем значение критических точек  $k_{12} = 2.989$ ,  $k_{13} = 6.338$ ,  $k_{14} = 9678$  при  $k_1 = 0.1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492 с.
2. Даноян З.Н., Даноян Н. З., Манукян Г. А. Поверхностные электроупругие волны Лява для двух слоев на пьезоэлектрической подложке.// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т. 54. № 4. С.22-25.
3. Lothe J, Barnett D.M. On the existence of surface wave solution for anisotropic elastic half-spaces with free surface. // J.Appl.phys. 1976.V.47. №2. P.428-453.
4. Danoyan Z.N., Pilliposyan G. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer.//International Journal Solids and Structures. 2007. V.44. PP.5829–5847.
5. Белубекян М.В., Казарян К.Б. К вопросу существования поверхностных сдвиговых волн в однородном упругом полупространстве.//Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №1. С.6-12.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
21.05.2008