ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ РАЗЛИЧНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМИ УПРУГИМИ СТРИНГЕРАМИ

Григорян Э.Х., Оганисян Г.В.

Ключевые слова: пластина, контакт, стрингер, сингулярное интегральное уравнение, функциональное уравнение, асимптотика.
Keywords: plate, contact, stringer, singular integral equation, functional equation, asymptotic.

Է.Խ. Գրիգորյան, Հ.Վ. Հովհաննիսյան
Կոնտակտային խնդիր՝ կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ առաձգական սալի համար, որն ուժեղացված է երկու տարբեր առաձգական անվերջ զուգահեռ վերադիրներով

Աշխատանքում դիտարկված է կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ առաձգական սալի կոնտակտային խնդիրը, որը կազմված է երկու կիսաանվերջ առաձգական սալերից, որոնք ունեն ընդհանուր ուղղագիծ բաժանման սահման և տարբեր առաձգական հատկություններ: Ենթադրվում է, որ կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ առաձգական սալը ուժեղացված է երկու զուգահեռ անվերջ առաձգական վերադիրներով, որոնք դասավորված են վերոհիշյալ կիսաանվերջ առաձգական սալերի բաժանման գծի տարբեր կողմերում և եռակցված (սոսնձված) են այդ կիսաանվերջ առաձգական սալերին: Ոչ համաչափ դասավորված վերադիրները զուգահեռ են կիսաանվերջ առաձգական սալերի բաժանման գծին, ունեն լայնական հատույթի տարբեր մակերեսներ և օժտված են տարբեր առաձգական հատկություններով: Կոնտակտային զույգը (սալ-վերադիր) դեֆորմացվում է վերադիրների վրա ազդող համուղղված և կենտրոնացված ուժերով: Խնդիրը ձևակերպված է սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի տեսքով, որոնց կորիզները բաղկացած են սինգուլյար և ռեգուլյար մասերից: Համակարգը լուծվում է Ֆուրիեի ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ, որի շնորհիվ վերոհիշյալ համակարգը բերվում է որոնելի ֆունկցիաների Ֆուրիեի տրանսֆորմանտների նկատմամբ ֆունկցիոնալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Տրված է այդ համակարգի փակ լուծումը ինտեգրալ տեսքով: Որոշված են կոնտակտային շոշափող լարումները և վերադիրներում առաջացող նորմալ լարումները, որոնց համար ստացվել են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ուժերի կիրառման կետերի շրջակայքում և դրանից հեռու կետերում:

E.Kh. Grigoryan, H.V. Hovhannisyan
A Contact Problem for a Piecewise Homogeneous Infinite Plate Strengthened with Two Parallel Different Infinite Elastic Stringers

In the present paper, a contact problem is considered for a piecewise homogeneous infinite elastic plate consisted of two semi-infinite plates with different elastic characteristics and strengthened with two infinite elastic stringers, having different elastic properties. The stringers are parallel to the straight line between the two semi-infinite plates (the contact pair) and have different distances from the straight line, as well as they are on different sides of the straight line. The contact pair is deformed by two forces applied to the stringers having the same direction. The problem is formulated as a system of singular integral equations with a cornel consisted of singular and regular parts. The solution of the above-mentioned system is based on the generalized Fourie integral transformation, which is reduced to a system of functional equations, which makes possible to construct a closed solution in an integral form. The behavior of contact tangent tensions, as well as of stringer normal tensions at the infinite point and at the points of the forces applications are investigated, by means of the asymptotic formulae obtained in the present work.

В работе рассматривается контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, состоящей из двух, сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы, полубесконечных пластин с различными упругими характеристиками. Предполагается, что кусочно-однородная упругая бесконечная пластина усилена двумя параллельными упругими бесконечными стрингерами, которые расположены на разных сторонах раздела указанных полубесконечных пластин и приварены (приклеены) к этим пластинам. Стрингеры расположены несимметрично относительно линии раздела указанных полубесконечных пластин, параллельны к линии разнородности полубесконечных пластин, имеют разные упругие свойства и площади поперечного сечения. Контактная пара (стрингер-пластина) деформируется сонаправленными и сосредоточенными силами, действующими на стрингеры. Задача сформулирована в виде системы сингулярных интегральных уравнений, ядра которых состоят из сингулярной и регулярной частей. Эта система решается посредством обобщенного интегрального преобразования Фурье, которое превращает интегральные уравнения в систему функциональных уравнений относительно трансформантов Фурье искомых функций. Приведено замкнутое решение этой системы в интегральном виде. Определены контактные тангенциальные напряжения и нормальные напряжения, возникающие в стрингерах. Получены асимптотические формулы, описывающие поведение напряжении как вблизи, так и вдали точек приложении сил.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой кусочно-однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины h, состоящий из двух, сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы, полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на своей верхней поверхности линий $y=a\ (a>0)$ и $y=-c\ (c>0)$ содержит два параллельных различных упругих стрингера прямоугольного поперечного сечения.

Задача заключается в определении закона распределения интенсивности тангенциальных контактных усилий вдоль линий крепления упругих бесконечных стрингеров с упругими полубесконечными пластинами и нормальных напряжений в стрингерах, когда контактирующая пара (стрингер-пластина) подвержена воздействиям силовых факторов $P\delta(x)\delta(y-a)$ и $Q\delta(x)\delta(y+c)$, которые действуют вдоль стрингеров и имеют одинаковые направления.

В исследуемой задаче относительно стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии [1.5], т.е. предполагается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средних линий контактных участков, а для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины считается справедливой модель обобщенного плоского напряженного состояния.

Обращаясь теперь к выводу разрешающих уравнений поставленной задачи, заметим, что в горизонтальном направлении стрингера растягиваются или сжимаются, находясь в одноосном напряженном состоянии. Из уравнений равновесия элемента стрингера и на основе закона Гука будем иметь:

$$\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx}=\frac{1}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-s)\tau^{(1)}(s)\,ds-\frac{P\operatorname{sgn}x}{2E_s^{(1)}F_s^{(1)}},\qquad (-\infty<x<\infty) \tag{1.1}$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx}=\frac{1}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-u)\tau^{(2)}(u)\,du-\frac{Q\operatorname{sgn}x}{2E_s^{(2)}F_s^{(2)}}, \tag{1.2}$$

при этом условия равновесия стрингеров имеют вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau^{(1)}(s)\,ds=P,\ \int_{-\infty}^{\infty}\tau^{(2)}(u)\,du=Q. \tag{1.3}$$

Отметим, что из (1.1) и (1.2) нормальные напряжения в стрингерах при $y=a$ и $y=-c$ можно представить следующим образом:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{1}{2F_s^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-s)\tau^{(1)}(s)ds-\frac{P\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(1)}}, \tag{1.4}$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{1}{2F_s^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-u)\tau^{(2)}(u)du-\frac{Q\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(2)}}, \tag{1.5}$$

здесь $u_s^{(1)}(x)$ и $u_s^{(2)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров на линии $y=a$ и $y=-c$; $\tau^{(1)}(x)=d_s^{(1)}\tau^{(1)}(x;a)$, где $\tau^{(1)}(x;a)$ – тангенциальные контактные напряжения на линии $y=a$, $d_s^{(1)}$ – ширина этого стрингера; $\tau^{(2)}(x)=d_s^{(2)}\tau^{(2)}(x;-c)$, где $\tau^{(2)}(x;-c)$ –тангенциальные контактные напряжения на линии $y=-c$, $d_s^{(2)}$ – ширина этого стрингера; $E_s^{(1)}$ и $E_s^{(2)}$ – модули упругости, а $F_s^{(1)}=d_s^{(1)}h_s^{(1)}$ и $F_s^{(2)}=d_s^{(2)}h_s^{(2)}$ – площадь поперечного сечения верхнего и нижнего стрингеров, соответственно, а $h_s^{(1)}$ и $h_s^{(2)}$ – их высота; P и Q – сосредоточенные силы, приложенные на стрингеры в точках $(0;a)$ и $(0;-c)$, соответственно; $\operatorname{sgn}x$ – известная сигнум-функция.

С другой стороны, для горизонтальной деформации упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, когда на полубесконечных пластинах на линиях $y=a$ и $y=-c$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, соответственно, имеем [2]:

$$hl\frac{du^{(1)}(x;a)}{dx}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{x-s}-d_1\frac{x-s}{(x-s)^2+4a^2}+d_2\frac{8a^2(x-s)}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^2}+\right.$$

$$\left.+d_3\frac{2a^2(x-s)\left[(x-s)^2-12a^2\right]}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^3}\right\}\tau^{(1)}(s)ds-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{d_4\frac{x-u}{(x-u)^2+(a+c)^2}-\right.$$

$$\left.-d_5\frac{2c(a+c)(x-u)}{\left[(x-u)^2+(a+c)^2\right]^2}-d_6\frac{2a(a+c)(x-u)}{\left[(x-u)^2+(a+c)^2\right]^2}\right\}\tau^{(2)}(u)du, \tag{1.6}$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

$$hl_1\frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{x-u}-b_1\frac{x-u}{(x-u)^2+4c^2}+b_2\frac{8c^2(x-u)}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^2}+\right.$$

$$+b_3\frac{2c^2(x-u)\left[(x-u)^2-12c^2\right]}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^3}\Bigg\}\tau^{(2)}(u)\,du-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{b_4\frac{x-s}{(x-s)^2+(a+c)^2}-\right.$$

$$\left.-b_5\frac{2a(a+c)(x-s)}{\left[(x-s)^2+(a+c)^2\right]^2}-b_6\frac{2c(a+c)(x-s)}{\left[(x-s)^2+(a+c)^2\right]^2}\right\}\tau^{(1)}(s)\,ds. \qquad (1.7)$$

Здесь введены следующие обозначения [2]:

$$l=\frac{8\mu}{3-\nu}=\frac{4E}{(3-\nu)(1+\nu)},\qquad l_1=\frac{8\mu_1}{3-\nu_1}=\frac{4E_1}{(3-\nu_1)(1+\nu_1)},$$

$$d_1\equiv d_1(k;\nu;\nu_1)=$$

$$=\frac{k(3-\nu)\left[k(3-\nu)(1+\nu_1)+2(1-\nu)(1-\nu_1)\right]-(3-\nu_1)\left[8-(1+\nu)(3-\nu)\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_2\equiv d_2(k;\nu)=\frac{(k-1)(1+\nu)}{k(3-\nu)+1+\nu},\qquad k=\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{E_1(1+\nu)}{E(1+\nu_1)},$$

$$d_3\equiv d_3(k;\nu)=\frac{2(k-1)(1+\nu)^2}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]}, \qquad (1.8)$$

$$d_4\equiv d_4(k;\nu;\nu_1)=\frac{8\left[k(3-\nu)+3-\nu_1\right]}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_5\equiv d_5(k;\nu;\nu_1)=\frac{4(1+\nu_1)}{(3-\nu)\left[3-\nu_1+k(1+\nu_1)\right]},$$

$$d_6\equiv d_6(k;\nu)=\frac{4(1+\nu)}{(3-\nu)\left[k(3-\nu)+1+\nu\right]},$$

$$b_1=d_1\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\qquad b_2=d_2\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),\qquad b_3=d_3\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),$$

$$b_4=d_4\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\qquad b_5=d_5\left(\frac{1}{k};\nu_1;\nu\right),\qquad b_6=d_6\left(\frac{1}{k};\nu_1\right),$$

где $u^{(1)}(x;a)$ и $u^{(2)}(x;-c)$ –горизонтальное перемещение точек полубесконечных пластин на линиях $y=a$ и $y=-c$; (E,μ,ν) –упругие характеристики пластины при $0<y<\infty$, а (E_1,μ_1,ν_1) – при $-\infty<y<0$; E и E_1 – модули Юнга, μ и μ_1– модули сдвига, а ν и ν_1 – коэффициенты Пуассона пластин.

Заметим, что на линиях креплений стрингеров с полубесконечными пластинами, должны удовлетворяться следующие контактные условия:

$$\frac{du_s^{(1)}(x)}{dx} = \frac{du^{(1)}(x;a)}{dx}, \tag{1.9}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\frac{du_s^{(2)}(x)}{dx} = \frac{du^{(2)}(x;-c)}{dx}. \tag{1.10}$$

Учитывая контактные условия (1.9) и (1.10) из (1.1), (1.2), (1.6) и (1.7) относительно неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностями $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, которые являются основными неизвестными функциями в рассматриваемой задаче, получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x-s}+\frac{\lambda\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-s)+B_{11}(x;s)\right]\tau^{(1)}(s)\,ds+\\+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{12}(x;u)\tau^{(2)}(u)\,du=\frac{\lambda}{2}P\operatorname{sgn}x,\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{x-u}+\frac{\lambda_1\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-u)+B_{22}(x;u)\right]\tau^{(2)}(u)\,du+\\+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}B_{21}(x;s)\tau^{(1)}(s)\,ds=\frac{\lambda_1}{2}Q\operatorname{sgn}x,\end{gathered} \tag{1.12}$$

при этом введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}B_{11}(x;s)=-d_1\frac{x-s}{(x-s)^2+4a^2}+d_2\frac{8a^2(x-s)}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^2}+\\+d_3\frac{2a^2(x-s)\left[(x-s)^2-12a^2\right]}{\left[(x-s)^2+4a^2\right]^3},\\
B_{12}(x;u)=d_4\frac{x-u}{(x-u)^2+(a+c)^2}-2(a+c)(cd_5+ad_6)\frac{x-u}{\left[(x-u)^2+(a+c)^2\right]^2},\\
B_{22}(x;u)=-b_1\frac{x-u}{(x-u)^2+4c^2}+b_2\frac{8c^2(x-u)}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^2}+\\+b_3\frac{2c^2(x-u)\left[(x-u)^2-12c^2\right]}{\left[(x-u)^2+4c^2\right]^3},\end{gathered} \tag{1.13}$$

$$B_{21}(x;s)=b_4\frac{x-s}{(x-s)^2+(a+c)^2}-2(a+c)(ab_5+cb_6)\frac{x-s}{\left[(x-s)^2+(a+c)^2\right]^2},$$

$$\lambda=\frac{hl}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}},\ \ \lambda_1=\frac{hl_1}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}},\ \ \ (-\infty<x,s,u<\infty).$$

Здесь интегралы с ядрами Коши в точках $x=s$ и $x=u$ в системе сингулярных интегральных уравнений (1.11) и (1.12) трактуются в смысле их главного значения по Коши.

Таким образом, решение поставленной контактной задачи при принятых предположениях сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) и (1.12) с ядрами, состоящими из сингулярной и регулярной частей, при условиях (1.3).

2. С целью решения системы сингулярных интегральных уравнений (1.11) и (1.12) при условиях (1.3), применив к системе (1.11) и (1.12) обобщенное интегральное преобразование Фурье, после некоторых преобразований и пользуясь формулой свертки, относительно трансформантов Фурье функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, получим следующую систему функциональных уравнений:

$$D_{11}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)+D_{12}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\lambda P, \tag{2.1}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$D_{21}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)+D_{22}(|\sigma|)\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\lambda_1 Q, \tag{2.2}$$

при этом условия (1.3) примут вид:

$$\overline{\tau}^{(1)}(0)=P,\quad \overline{\tau}^{(2)}(0)=Q. \tag{2.3}$$

Разрешая систему функциональных уравнений (2.1) и (2.2) при условии (2.3) относительно $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)$ будем иметь:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)=\lambda P\frac{D_{22}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}-\lambda_1 Q\frac{D_{12}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}, \tag{2.4}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\lambda_1 Q\frac{D_{11}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}-\lambda P\frac{D_{21}(|\sigma|)}{D(|\sigma|)}, \tag{2.5}$$

при этом, в формулах (2.1) – (2.5) приняты следующие обозначения:

$$D_{11}(|\sigma|)=\lambda+|\sigma|+A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|},\quad D_{12}(|\sigma|)=A_{12}(|\sigma|)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|},$$

$$D_{22}(|\sigma|)=\lambda_1+|\sigma|+A_{22}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2c|\sigma|},\quad D_{21}(|\sigma|)=A_{21}(|\sigma|)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|},$$

$$\begin{aligned}D(|\sigma|)&=(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)+(\lambda_1+|\sigma|)A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|}+\\&+(\lambda+|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2c|\sigma|}+A_{11}(|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}-\\&-A_{12}(|\sigma|)A_{21}(|\sigma|)\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|},\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$A_{11}(|\sigma|) = -d_1 + 2d_2 a|\sigma| - d_3 a^2\sigma^2, \quad A_{12}(|\sigma|) = d_4 - (cd_5 + ad_6)|\sigma|,$$
$$A_{22}(|\sigma|) = -b_1 + 2b_2 c|\sigma| - b_3 c^2\sigma^2, \quad A_{21}(|\sigma|) = b_4 - (ab_5 + cb_6)|\sigma|,$$

а $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma) = F\left[\tau^{(1)}(x)\right]$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma) = F\left[\tau^{(2)}(x)\right]$ – трансформанты Фурье функций $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$, соответственно, $F[.]$ – оператор Фурье, $\sigma(-\infty < \sigma < \infty)$ – параметр преобразования. Отметим, что функции $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)$, определенные формулами (2.4) и (2.5), однозначно удовлетворяют условиям (2.3) и являются четными функциями, следовательно и $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ –четные функции, что и следовало ожидать. Выше имелось в виду, что [3]:

$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{1}{t}\right] = i\,\mathrm{sgn}\,\sigma, \qquad \frac{1}{\pi}F[\mathrm{sgn}\,t] = \frac{2i}{\sigma},$$
$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{t}{t^2+y^2}\right] = i\,\mathrm{sgn}\,\sigma e^{-|\sigma||y|}, \quad (-\infty < \sigma, y, t < \infty) \tag{2.7}$$
$$\frac{1}{\pi}F\left[\frac{t}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right] = \frac{i\sigma}{2|y|}e^{-|\sigma||y|}, \quad \frac{1}{\pi}F\left[\frac{t}{\left(t^2+y^2\right)^3}\right] = \frac{i\sigma}{8|y|^3}\left(1+|\sigma||y|\right)e^{-|\sigma||y|}.$$

Для определения трансформантов нормальных напряжений в стрингерах применим к (1.4) и (1.5) обобщенное интегральное преобразование Фурье, учитывая (2.4) и (2.5), получим:

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma) = -\frac{i}{F_s^{(1)}}\left[\frac{D_{22}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}P + \lambda_1 Q\frac{D_{12}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}\right], \tag{2.8}$$
$$(-\infty < \sigma < \infty)$$
$$\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma) = -\frac{i}{F_s^{(2)}}\left[\frac{D_{11}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}Q + \lambda P\frac{D_{21}^*(\sigma;|\sigma|)}{D(|\sigma|)}\right], \tag{2.9}$$

здесь приняты следующие обозначения:

$$D_{11}^*(\sigma;|\sigma|) = (\lambda + |\sigma|)\,\mathrm{sgn}\,\sigma + A_{11}(|\sigma|)\sigma e^{-2a|\sigma|} + (\lambda + |\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\,\mathrm{sgn}\,\sigma e^{-2c|\sigma|} +$$
$$+ A_{11}(|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|} - A_{12}(|\sigma|)A_{21}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|},$$
$$D_{22}^*(\sigma;|\sigma|) = (\lambda_1 + |\sigma|)\,\mathrm{sgn}\,\sigma + A_{22}(|\sigma|)\sigma e^{-2c|\sigma|} + (\lambda_1 + |\sigma|)A_{11}(|\sigma|)\,\mathrm{sgn}\,\sigma e^{-2a|\sigma|} +$$
$$+A_{11}(|\sigma|)A_{22}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|} - A_{12}(|\sigma|)A_{21}(|\sigma|)\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}, \tag{2.10}$$
$$D_{12}^*(\sigma;|\sigma|) = A_{12}(|\sigma|)\,\mathrm{sgn}\,\sigma e^{-(a+c)|\sigma|}, \qquad D_{21}^*(\sigma;|\sigma|) = A_{21}(|\sigma|)\,\mathrm{sgn}\,\sigma e^{-(a+c)|\sigma|},$$

а $\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma) = F\left[\sigma_x^{(1)}(x;a)\right]$ и $\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma) = F\left[\sigma_x^{(2)}(x;-c)\right]$ –трансформанты Фурье функций $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$, соответственно.

Очевидно, что $\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)$ являются нечетными функциями, следовательно, $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ – нечетные функции.

Теперь, применив к (2.4), (2.5), (2.8) и (2.9) обратное преобразование Фурье, в итоге получим искомые величины $\tau^{(1)}(x)$, $\tau^{(2)}(x)$, $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$:

$$\tau^{(1)}(x)=\frac{\lambda P}{\pi}\int_0^\infty \frac{D_{22}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda_1 Q}{\pi}\int_0^\infty \frac{D_{12}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma, \tag{2.11}$$

$$\tau^{(2)}(x)=\frac{\lambda_1 Q}{\pi}\int_0^\infty \frac{D_{11}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda P}{\pi}\int_0^\infty \frac{D_{21}(\sigma)}{D(\sigma)}\cos(\sigma x)\,d\sigma, \tag{2.12}$$

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=-\frac{P}{\pi F_s^{(1)}}\int_0^\infty \frac{D_{22}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda_1 Q}{\pi F_s^{(1)}}\int_0^\infty \frac{D_{12}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma, \tag{2.13}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=-\frac{Q}{\pi F_s^{(2)}}\int_0^\infty \frac{D_{11}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma-\frac{\lambda P}{\pi F_s^{(2)}}\int_0^\infty \frac{D_{21}^{**}(\sigma)}{D(\sigma)}\sin(\sigma x)\,d\sigma,$$
$$(-\infty<x<\infty), \tag{2.14}$$

здесь $D_{kn}^{**}(\sigma)=D_{kn}^{*}(\sigma;\sigma)\ \ (n,k=1;2)$.

Таким образом, рассматриваемая контактная задача решается в замкнутом виде в интегральной форме, а искомые величины имеют вид (2.11) – (2.14).

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) однородная бесконечная пластина $(E=E_1;\ \nu=\nu_1)$. В этом случае на основе (1.8), (2.6) и (2.10) из (2.4), (2.5) и (2.8), (2.9), соответственно, получим:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)=\frac{\lambda(\lambda_1+|\sigma|)P-\lambda_1\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|}Q}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.15}$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\frac{\lambda_1(\lambda+|\sigma|)Q-\lambda\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)|\sigma|e^{-(a+c)|\sigma|}P}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.16}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)=-\frac{i}{F_s^{(1)}}\frac{\left[(\lambda_1+|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}\right]P}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2e^{-2(a+c)|\sigma|}}-$$

$$-\frac{i}{F_s^{(1)}}\frac{\lambda_1 Q\left[1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right]\operatorname{sgn}\sigma e^{-(a+c)|\sigma|}}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.17}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)=-\frac{i}{F_s^{(2)}}\frac{\left[(\lambda+|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma e^{-2(a+c)|\sigma|}\right]Q}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}}-$$

$$-\frac{i}{F_s^{(2)}}\frac{\lambda P\left[1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right]\operatorname{sgn}\sigma e^{-(a+c)|\sigma|}}{(\lambda+|\sigma|)(\lambda_1+|\sigma|)-\left(1-(a+c)\frac{1+\nu}{3-\nu}|\sigma|\right)^2\sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}}, \tag{2.18}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty).$$

Отметим, что формулы (2.15)–(2.18) совпадают с результатом [4] при $E_s^{(1)}=E_s^{(2)}, F_s^{(1)}=F_s^{(2)}, P=Q$ и $a=c$ и имеют вид:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)\equiv\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\overline{\tau}(\sigma)=\frac{\lambda P}{\lambda+2|\sigma|\operatorname{ch}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}-2a\frac{1+\nu}{3-\nu}\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}}, \tag{2.19}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma)\equiv\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma)=\overline{\sigma}_x(\sigma)=\frac{iP}{F_s^{(1)}}\frac{2a\frac{1+\nu}{3-\nu}\sigma e^{-2a|\sigma|}-2\operatorname{ch}(a|\sigma|)\operatorname{sgn}\sigma e^{-a|\sigma|}}{\lambda+2|\sigma|\operatorname{ch}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}-2a\frac{1+\nu}{3-\nu}\sigma^2 e^{-2a|\sigma|}}; \tag{2.20}$$

б) кусочно-однородная бесконечная пластина, усиленная только одним стрингером (верхний стрингер). В этом случае имеем [6]:

$$\overline{\tau}(\sigma)=\frac{\lambda P}{\lambda+|\sigma|+A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|}}, \tag{2.21}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\sigma}_x(\sigma)=-\frac{iP}{F_s^{(1)}}\frac{\operatorname{sgn}\sigma\left(1+A_{11}(|\sigma|)\right)e^{-2a|\sigma|}}{\lambda+|\sigma|+A_{11}(|\sigma|)|\sigma|e^{-2a|\sigma|}}. \tag{2.22}$$

Следует отметить, что при однородной бесконечной пластине $(E=E_1;\ \nu=\nu_1)$ из (2.21) и (2.22) получим [7]:

$$\overline{\tau}(\sigma)=\frac{\lambda P}{\lambda+|\sigma|}, \tag{2.23}$$

$$(-\infty<\sigma<\infty)$$

$$\overline{\sigma}_x(\sigma) = -\frac{iP}{F_s^{(1)}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{\lambda + |\sigma|}; \tag{2.24}$$

в) рассмотрим предельный случай, когда одновременно $a \to 0$ и $c \to 0$. Тогда на основе (1.8), (2.6) и (2.10) из (2.4), (2.5), (2.8), (2.9) и (2.15)–(2.22), соответственно, получим:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda\left(\lambda_1 + (1-b_1)|\sigma|\right)P - \lambda_1 d_4 |\sigma| Q}{\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2}, \tag{2.25}$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma) = \frac{\lambda_1\left(\lambda + (1-d_1)|\sigma|\right)Q - \lambda b_4 |\sigma| P}{\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2}, \tag{2.26}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma) = -\frac{\left[\lambda_1(1-d_1)i\operatorname{sgn}\sigma + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)i\sigma\right]P + \lambda_1 d_4 Q i \operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left[\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2\right]}, \tag{2.27}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma) = -\frac{\left[\lambda(1-b_1)i\operatorname{sgn}\sigma + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)i\sigma\right]Q + \lambda b_4 P i \operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(2)}\left[\lambda\lambda_1 + \lambda(1-b_1)|\sigma| + \lambda_1(1-d_1)|\sigma| + \left((1-b_1)(1-d_1) - b_4 d_4\right)\sigma^2\right]}, \tag{2.28}$$

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma) = \frac{\lambda\lambda_1 P + (\lambda P - \lambda_1 Q)|\sigma|}{\lambda\lambda_1 + (\lambda + \lambda_1)|\sigma|}, \quad \overline{\tau}^{(2)}(\sigma) = \frac{\lambda\lambda_1 Q + (\lambda_1 Q - \lambda P)|\sigma|}{\lambda\lambda_1 + (\lambda + \lambda_1)|\sigma|}, \tag{2.29}$$

$$\overline{\sigma}_x^{(1)}(\sigma) = -\frac{\lambda_1 (P+Q) i \operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left(\lambda\lambda_1 + (\lambda+\lambda_1)|\sigma|\right)}, \quad \overline{\sigma}_x^{(2)}(\sigma) = -\frac{\lambda (P+Q) i \operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(2)}\left(\lambda\lambda_1 + (\lambda+\lambda_1)|\sigma|\right)} \tag{2.30}$$

$$\overline{\tau}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + 2|\sigma|} = \frac{\lambda P/2}{\lambda/2 + |\sigma|}, \quad \overline{\sigma}_x(\sigma) = -\frac{2Pi\operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}(\lambda + 2|\sigma|)} = -\frac{Pi\operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left(\dfrac{\lambda}{2} + |\sigma|\right)}, \tag{2.31}$$

$$\overline{\tau}(\sigma) = \frac{\lambda P}{\lambda + (1-d_1)|\sigma|}, \qquad \overline{\sigma}_x(\sigma) = -\frac{P(1-d_1) i \operatorname{sgn}\sigma}{F_s^{(1)}\left(\lambda + (1-d_1)|\sigma|\right)}, \tag{2.32}$$

$$(-\infty < \sigma < \infty).$$

Следует отметить, что из (2.31) видно, что жесткость стрингеров удваивается, это говорит о том, что при приближении стрингеров их жесткость как бы увеличивается, а из (2.32) следует, что их жесткость увеличивается в размере $(1-d_1)$, а из (2.29) в размере $\dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}$ или $\dfrac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}$.

Таким образом, мы определили закон распределения трансформантов тангенциальных контактных сил и нормальных напряжений в стрингерах вдоль линии соединения кусочно-однородной бесконечной пластины со стрингерами, когда контактирующая пара деформируется сосредоточенными силами, приложенными к стрингерам.

3. Теперь исследуем поведение функций тангенциальных контактных усилий $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ и нормальные напряжения в стрингерах $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$, характеризующие их поведение вблизи и вдалеке от точек приложенных сил. Сначала приступим к получению асимптотических формул для $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ при $|x|\to\infty$. Для этого заметим, что при $|\sigma|\to 0$ из (2.4) и (2.5) $\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)$ можно представить в следующих видах:

$$\overline{\tau}^{(1)}(\sigma)=\left[1-\beta_1|\sigma|+\beta_2\sigma^2-\beta_3|\sigma|^3\right]P+\left[-\beta_4|\sigma|+\beta_5\sigma^2-\beta_6|\sigma|^3\right]Q+O\left(\sigma^4\right),$$
$$\left(|\sigma|\to 0\right), \qquad (3.1)$$

$$\overline{\tau}^{(2)}(\sigma)=\left[1-\gamma_1|\sigma|+\gamma_2\sigma^2-\gamma_3|\sigma|^3\right]Q+\left[-\gamma_4|\sigma|+\gamma_5\sigma^2-\gamma_6|\sigma|^3\right]P+O\left(\sigma^4\right),$$
$$\left(|\sigma|\to 0\right), \qquad (3.2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\beta_1=\frac{1-d_1}{\lambda},\quad \beta_2=\frac{1}{\lambda_1\lambda^2}\left[\lambda_1\left(1-d_1\right)^2+\lambda b_4d_4-2\lambda\lambda_1a(d_1+d_2)\right],\quad \beta_4=\frac{d_4}{\lambda},$$

$$\gamma_1=\frac{1-b_1}{\lambda_1},\quad \gamma_2=\frac{1}{\lambda\lambda_1^2}\left[\lambda\left(1-b_1\right)^2+\lambda_1b_4d_4-2\lambda\lambda_1c(b_1+b_2)\right],\quad \gamma_4=\frac{b_4}{\lambda_1},$$

$$\begin{aligned}\beta_3=\frac{1}{\lambda_1^2\lambda^3}\Big[&\lambda_1^2\left(1-d_1\right)^3+\left(1-b_1\right)b_4d_4\lambda^2+2\left(1-d_1\right)b_4d_4\lambda\lambda_1-\\&-4a\left(1-d_1\right)\left(d_1+d_2\right)\lambda\lambda_1^2+a\left(b_4d_6+d_4b_5+2b_4d_4\right)\lambda_1\lambda^2+\\&+c\left(b_4d_5+d_4b_6+2b_4d_4\right)\lambda_1\lambda^2-a^2\left(d_3+4d_2+2d_1\right)\lambda^2\lambda_1^2\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_3=\frac{1}{\lambda^2\lambda_1^3}\Big[&\lambda^2\left(1-b_1\right)^3+\left(1-d_1\right)b_4d_4\lambda_1^2+2\left(1-b_1\right)b_4d_4\lambda\lambda_1-\\&-4c\left(1-b_1\right)\left(b_1+b_2\right)\lambda_1\lambda^2+a\left(d_4b_5+b_4d_6+2b_4d_4\right)\lambda\lambda_1^2+\\&+c\left(d_4b_6+b_4d_5+2b_4d_4\right)\lambda\lambda_1^2-c^2\left(b_3+4b_2+2b_1\right)\lambda^2\lambda_1^2\Big],\end{aligned} \qquad (3.3)$$

$$\beta_5=\frac{1}{\lambda_1\lambda^2}\left[\lambda\left(1-b_1\right)d_4+\lambda_1\left(1-d_1\right)d_4+a\left(d_4+d_6\right)\lambda\lambda_1+c\left(d_4+d_5\right)\lambda\lambda_1\right],$$

$$\gamma_5=\frac{1}{\lambda\,\lambda_1^2}\left[\lambda\left(1-b_1\right)b_4+\lambda_1\left(1-d_1\right)b_4+a\left(b_4+b_5\right)\lambda\lambda_1+c\left(b_4+b_6\right)\lambda\lambda_1\right],$$

$$\begin{aligned}\beta_6=\frac{1}{\lambda_1^2\lambda^3}\Big[&\lambda^2\left(1-b_1\right)^2d_4+\lambda_1^2\left(1-d_1\right)^2d_4+\left(\left(1-b_1\right)\left(1-d_1\right)+b_4d_4\right)d_4\lambda\lambda_1-\\&-2a\left(d_1+d_2\right)d_4\lambda\lambda_1^2-2c\left(b_1+b_2\right)d_4\lambda_1\lambda^2+\left(\left(a+c\right)d_4+cd_5+ad_6\right)\times\\&\times\left(\lambda\left(1-b_1\right)+\lambda_1\left(1-d_1\right)\right)\lambda\lambda_1+\left(a+c\right)\left(\frac{a+c}{2}d_4+cd_5+ad_6\right)\lambda^2\lambda_1^2\Big],\end{aligned}$$

$$\gamma_6 = \frac{1}{\lambda^2 \lambda_1^3}\Big[\lambda^2 (1-b_1)^2 b_4 + \lambda_1^2 (1-d_1)^2 b_4 + \big((1-b_1)(1-d_1) + b_4 d_4\big) b_4 \lambda\lambda_1 -$$
$$- 2a(d_1+d_2) b_4 \lambda\lambda_1^2 - 2c(b_1+b_2) b_4 \lambda_1 \lambda^2 + \big((a+c) b_4 + ab_5 + cb_6\big)\times$$
$$\times\big(\lambda(1-b_1) + \lambda_1 (1-d_1)\big)\lambda\lambda_1 + (a+c)\left(\frac{a+c}{2} b_4 + ab_5 + cb_6\right)\lambda^2\lambda_1^2\Big].$$

Теперь применим к (3.1) и (3.2) обобщенное обратное преобразование Фурье, имея в виду, что [3]:

$$F^{-1}\left[\sigma^{2m}\right] = (-1)^m \delta^{(2m)}(x), \qquad F^{-1}\left[|\sigma|^{2m+1}\right] = (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(2m+2)}{\pi} x^{-2(m+1)},$$
$$(m = 0,1,2,...), \tag{3.4}$$

где $F^{-1}[.]$ – обратный оператор Фурье, а $\Gamma(\cdot)$ – известная гамма-функция, $\delta^{(n)}(x)$ – n-ая производная функции $\delta(x)$, для $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ получим следующие асимптотические представления при $|x| \to \infty$:

$$\tau^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\beta_1}{x^2} - \frac{6\beta_3}{x^4}\right)P + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\beta_4}{x^2} - \frac{6\beta_6}{x^4}\right)Q + O\left(\frac{1}{x^6}\right), \quad (|x| \to \infty), \tag{3.5}$$

$$\tau^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\gamma_1}{x^2} - \frac{6\gamma_3}{x^4}\right)Q + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\gamma_4}{x^2} - \frac{6\gamma_6}{x^4}\right)P + O\left(\frac{1}{x^6}\right), \quad (|x| \to \infty). \tag{3.6}$$

Для получения асимптотических формул для $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ при $|x| \to \infty$ представим (1.4) и (1.5) в виде:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a) = \frac{1}{F_s^{(1)}} \int_x^\infty \tau^{(1)}(s)\,ds - \frac{P\theta(-x)}{F_s^{(1)}}, \tag{3.7}$$
$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c) = \frac{1}{F_s^{(2)}} \int_x^\infty \tau^{(2)}(u)\,du - \frac{Q\theta(-x)}{F_s^{(2)}}, \tag{3.8}$$

где $\theta(x)$ –функция Хевисайда.

Теперь учитывая нечетность функции $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ на основе (3.5) и (3.6) из (3.7) и (3.8) при $|x| \to \infty$, получим:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a) = \frac{1}{\pi F_s^{(1)}}\left(\frac{\beta_1}{x} - \frac{2\beta_3}{x^3}\right)P + \frac{1}{\pi F_s^{(1)}}\left(\frac{\beta_4}{x} - \frac{2\beta_6}{x^3}\right)Q + O\left(\frac{1}{x^5}\right),$$
$$(|x| \to \infty), \tag{3.9}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c) = \frac{1}{\pi F_s^{(2)}}\left(\frac{\gamma_1}{x} - \frac{2\gamma_3}{x^3}\right)Q + \frac{1}{\pi F_s^{(2)}}\left(\frac{\gamma_4}{x} - \frac{2\gamma_6}{x^3}\right)P + O\left(\frac{1}{x^5}\right),$$
$$(|x| \to \infty). \tag{3.10}$$

Из полученных асимптотических формул видно, что тангенциальные контактные усилия при $|x| \to \infty$ имеют порядок $O\left(x^{-2n}\right)$ $\left(n=1,2,3,...\right)$, а нормальные напряжения – порядок $O\left(x^{-2k-1}\right)\left(k=0,1,2,...\right)$.

Теперь приступим к получению асимптотических формул для $\tau^{(1)}\left(x\right)$ и $\tau^{(2)}\left(x\right)$ при $|x| \to 0$. Для этого заметим, что из (2.4) и (2.5) на основе (2.6) $\overline{\tau}^{(1)}\left(\sigma\right)$ и $\overline{\tau}^{(2)}\left(\sigma\right)$ можно представить в виде:

$$\overline{\tau}^{(1)}\left(\sigma\right)=\frac{\lambda P}{\lambda+|\sigma|}+\frac{\lambda PC_{11}\left(|\sigma|\right)}{\left(\lambda+|\sigma|\right)D\left(|\sigma|\right)}-\frac{\lambda_1 QD_{12}\left(|\sigma|\right)}{D\left(|\sigma|\right)}, \qquad (3.11)$$

$$\left(-\infty<\sigma<\infty\right)$$

$$\overline{\tau}^{(2)}\left(\sigma\right)=\frac{\lambda_1 Q}{\lambda_1+|\sigma|}+\frac{\lambda_1 QC_{22}\left(|\sigma|\right)}{\left(\lambda_1+|\sigma|\right)D\left(|\sigma|\right)}-\frac{\lambda PD_{21}\left(|\sigma|\right)}{D\left(|\sigma|\right)}, \qquad (3.12)$$

Здесь принято, что

$$\begin{gathered}
C_{11}\left(|\sigma|\right)=C\left(|\sigma|\right)-\left(\lambda_1+|\sigma|\right)A_{11}\left(|\sigma|\right)|\sigma|e^{-2a|\sigma|}, \\
C_{22}\left(|\sigma|\right)=C\left(|\sigma|\right)-\left(\lambda+|\sigma|\right)A_{22}\left(|\sigma|\right)|\sigma|e^{-2c|\sigma|}, \qquad \left(-\infty<\sigma<\infty\right) \qquad (3.13) \\
C\left(|\sigma|\right)=\left[A_{12}\left(|\sigma|\right)A_{21}\left(|\sigma|\right)-A_{11}\left(|\sigma|\right)A_{22}\left(|\sigma|\right)\right]\sigma^2 e^{-2(a+c)|\sigma|}.
\end{gathered}$$

Так как при $|\sigma| \to \infty$ имеет место представление:

$$\frac{k}{k+|\sigma|}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(\frac{k}{|\sigma|}\right)^{n+1}, \qquad (3.14)$$

то из (3.11) и (3.12) после применения обобщенного обратного преобразования Фурье, имея в виду, что [3]:

$$\begin{gathered}
F^{-1}\left[|\sigma|^{-2m-1}\right]=\frac{\left(-1\right)^m x^{2m}}{\pi\left(2m\right)!}\left(\psi\left(2m+1\right)+\ln\frac{1}{|x|}\right), \\
F^{-1}\left[\sigma^{-2m-2}\right]=\left(-1\right)^{m+1}\frac{|x|^{2m+1}}{2\left(2m\right)!}, \qquad \left(m=0;1;2;...\right),
\end{gathered} \qquad (3.15)$$

получим асимптотические формулы для $\tau^{(1)}\left(x\right)$ и $\tau^{(2)}\left(x\right)$ при $|x| \to 0$, записанные в виде:

$$\begin{gathered}
\tau^{(1)}\left(x\right)=\frac{\lambda P}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-1\right)^n\frac{\left(\lambda x\right)^{2n}}{\left(2n\right)!}\left(\psi\left(2n+1\right)+\ln\frac{1}{|\lambda x|}\right)+\left(-1\right)^n\frac{\pi|\lambda x|^{2n+1}}{2\left(2n+1\right)!}+\right. \\
\left.+\left(-1\right)^n A_n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}\right]-\frac{\lambda_1 Q}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n B_n\frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!}, \qquad \left(|x|\to 0\right),
\end{gathered} \qquad (3.16)$$

$$\tau^{(2)}(x)=\frac{\lambda_1 Q}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(\lambda_1 x)^{2n}}{(2n)!}\left(\psi(2n+1)+\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}\right)+(-1)^n\frac{\pi|\lambda_1 x|^{2n+1}}{2(2n+1)!}+\right.$$

$$\left.+(-1)^n C_n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]-\frac{\lambda P}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D_n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad (|x|\to 0).\qquad (3.17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_n=\int_0^\infty\frac{C_{11}(\sigma)\sigma^{2n}}{(\lambda+\sigma)D(\sigma)}d\sigma,\qquad B_n=\int_0^\infty\frac{D_{12}(\sigma)\sigma^{2n}}{D(\sigma)}d\sigma,$$

$$C_n=\int_0^\infty\frac{C_{22}(\sigma)\sigma^{2n}}{(\lambda_1+\sigma)D(\sigma)}d\sigma,\qquad D_n=\int_0^\infty\frac{D_{21}(\sigma)\sigma^{2n}}{D(\sigma)}d\sigma,\qquad (3.18)$$

а $\psi(t)$ – известная пси-функция.

Отметим, что из полученных формул (3.16) и (3.17) видно, что $\tau^{(1)}(x)$ и $\tau^{(2)}(x)$ при $|x|\to 0$ имеют логарифмическую особенность, обусловленную сосредоточенными силами P и Q. Чтобы получить асимптотические формулы для $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ представим (1.4) и (1.5) в виде:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{1}{F_s^{(1)}}\int_0^x\tau^{(1)}(s)\,ds-\frac{P\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(1)}},\qquad (3.19)$$

$$(-\infty<x<\infty)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{1}{F_s^{(2)}}\int_0^x\tau^{(2)}(u)\,du-\frac{Q\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(2)}}.\qquad (3.20)$$

Учитывая (3.16) и (3.17) из (3.19) и (3.20) для $\sigma_x^{(1)}(x;a)$ и $\sigma_x^{(2)}(x;-c)$ при $|x|\to 0$, получим:

$$\sigma_x^{(1)}(x;a)=\frac{P}{\pi F_s^{(1)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(\lambda x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\psi(2n+2)+\ln\frac{1}{|\lambda x|}+\frac{\pi|\lambda x|}{2(2n+2)}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^n A_n\frac{\lambda x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]-\frac{\lambda_1 Q}{\pi F_s^{(1)}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{P\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(1)}},\quad (|x|\to 0),\quad (3.21)$$

$$\sigma_x^{(2)}(x;-c)=\frac{Q}{\pi F_s^{(2)}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{(\lambda_1 x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\psi(2n+2)+\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+\frac{\pi|\lambda_1 x|}{2(2n+2)}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^n C_n\frac{\lambda_1 x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]-\frac{\lambda P}{\pi F_s^{(2)}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n D_n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{Q\operatorname{sgn}x}{2F_s^{(2)}},\quad (|x|\to 0).\quad (3.22)$$

Отметим, что ряды (3.16), (3.17), (3.21) и (3.22) сходятся для любых x.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине. // ПМ. Труды Амер. общ. инж.–мех. Сер.Е. 1968. №4. С.124-135.
2. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Об одной контактной задаче для кусочно-однородной пластины с конечными стрингерами. // Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Ереван. Изд. ЕГУ. 1984. №3. С.130-137.
3. Справочник по специальным функциям. // М.: Наука, 1979. 832с.
4. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.3-10.
5. Григорян Э.Х. Задача для кусочно–однородной бесконечной пластины с полубесконечным стрингером. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1983. №1. С.34-37.
6. Багдасарян Р.А., Гукасян Г.О. Об одной задаче для кусочно-однородной пластины, усиленной бесконечным стрингером. // Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Ереван. Изд. ЕГУ. 1991. №8. С.316-321.
7. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. // М.: Машиностроение, 1980. 416с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 4.12.2008