ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОИСТОГО ТОНКОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, СОСТОЯЩЕГО ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Агаловян М.Л., Геворкян Р. С.

Ключевые слова: асимптотическое решение, термоупругость, слоистость, анизотропия, динамическая задача.
Keywords: asymptotic solution, thermoelasticity, laminated, anisotropy, dynamic problem.

Մ.Լ. Աղալովյան, Ռ.Ս. Գևորգյան

Անիզոտրոպ անհամասեռ նյութից բաղկացած փոփոխական հաստության շերտավոր բարակ մարմնի համար ջերմաառաձգականության դինամիկ խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Ելնելով անիզոտրոպ մարմնի ջերմաառաձգականության տեսության եռաչափ հավասարումներից ասիմպտոտիկ եղանակով շերտավոր անհամասեռ մարմնի համար արտածված են ռեկուրենտ հավասարումներ, որոնք ինտեգրված են յուրաքանչյուր կետում ընդլայնական z առանցքին ուղղահայաց սիմետրիայի հարթության առկայությամբ անիզոտրոպիայի դեպքում: Արտածվել են ռեկուրենտ բանաձեւեր լարումների թենզորի եւ տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների համար, երբ շերտավոր փաթեթի դիմային մակերեւույթների վրա տրված են ջերմաառաձգականության տեսության հաստատված դինամիկ խնդրի տարբեր եզրային պայմաններ: Որոշվել են հարկադրական տատանումների ամպլիտուդները: Արտածվել են սեփական տատանումների հաճախությունների դիսպերսիոն հավասարումները, որոշվել են ռեզոնանսային հաճախությունները մասնավոր դեպքի համար: Մշակվել է ձեւակերպված եզրային խնդիրների անալիտիկ լուծումները որոշելու ալգորիթմը ժամանակակից հաշվողական տեխնիկայի կիրառմամբ:

M.L. Aghalovyan, R.S. Gevorgyan

The asymptotic solutions of thermoelasticity dynamic problems for laminated thin body with variable thickness consisting of anisotropic inhomogeneous materials

On the base of three-dimentional equations of anisotropic body thermoelasticity dynamic problem the recurrent equations for laminar inhomogeneous thin body are derived by asymptotic method. The equations are integrated under the anisotropy possessing in each point with one symmetry plane, perpendicular to transversal axis z. The recurrent formulas for the determination of displacement vector component and stress tensor are derived when on the face of lamination various modifications of boundary conditions for dynamic problem of the thermoelasticity theory are specified. The amplitudes of forced vibrations are obtained. The dispersion equations of natural oscillations frequency as well as resonance frequency for special case are derived. An algorithm for determination of analytical solutions of formulated boundary problems with the help of modern computer facilities is developed.

Исходя из трехмерных уравнений динамической задачи термоупругости анизотропного тела, асимптотическим методом выведены рекуррентные уравнения для слоистого неоднородного тонкого тела, которые интегрированы при анизотропии, обладающей в каждой точке одной плоскостью симметрии, перпендикулярной к поперечной оси z. Выведены рекуррентные формулы для определения компонент вектора перемещения и тензора напряжений, когда на лицевых поверхностях слоистого пакета заданы различные варианты граничных условий установившейся динамической задачи теории термоупругости. Найдены амплитуды вынужденных колебаний. Выведены дисперсионные уравнения частот собственных колебаний, вычислены резонансные частоты для частного случая. Разработан алгоритм для определения аналитических решений поставленных краевых задач с помощью современных вычислительных средств.

Асимптотический метод решения смешанных краевых задач теории термоупругости для анизотропных полос, пластин и оболочек [1-6] оказался эффективным для получения решений как статических, так и динамических [7-12] задач. Было показано, что в случаях, когда функции, заданные на лицевых поверхностях, являются многочленами, после конечного числа шагов итерационый процесс обрывается и приводит к математически точному решению для полосы и слоя [6,11,12].

Целесообразно использовать предложенный асимптотический метод и возможности современных вычислительных средств для вывода универсального алгоритма, пригодного для определения напряженно-деформированного состояния и амплитуд вынужденных колебаний слоистого тонкого тела.

1. Постановка краевых задач. Рассмотрим слоистое тонкое тело, слои которого ограничены гладкими непересекающимися поверхностями, которые относительно некоторой прямоугольной системы координат $Oxyz$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_0(x,y) < \varphi_1(x,y) < \varphi_2(x,y) < \ldots < \varphi_{n-1}(x,y) < \varphi_n(x,y) \tag{1.1}$$

$$h = \operatorname{Sup}\left\{\max\left|\varphi_i - \varphi_{i-1}\right|\right\} << l = \min(a,b),\ |x| \le a$$

$$|y| \le b,\ i = 1,2,\ldots,n$$

Пусть лицевым поверхностям тонкого тела сообщены установившиеся во времени тангенциальные и нормальные перемещения

$$u_j(x,y,\varphi_n,t) = u_j^+(x,y,t),\ u_j(x,y,\varphi_0,t) = u_j^-(x,y,t) \quad j = x,y,z, \tag{1.2}$$

или условия первой краевой задачи теории упругости

$$\begin{aligned} &\sigma_{jx}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,x) + \sigma_{jy}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,y) + \\ &+\sigma_{jz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,z) = \bar{\Phi}_j^+(x,y,t) \quad (n,0;+,-) \end{aligned} \quad (j = x,y,z), \tag{1.3}$$

или одна из следующих комбинаций смешанных граничных условий задачи теории упругости

$$\begin{aligned} &u_j(x,y,\varphi_0,t) = u_j^-(x,y,t)\ \ j = x,y,z,\ u_j(x,y,\varphi_n,t) = u_j^+(x,y,t),\ j = x,y \\ &\sigma_{xz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,x) + \sigma_{yz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,y) + \\ &+\sigma_{zz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,z) = \bar{\Phi}_z^+(x,y,t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

или

$$\begin{aligned} &u_j(x,y,\varphi_0,t) = u_j^-(x,y,t)\ \ j = x,y,z,\ u_z(x,y,\varphi_n,t) = u_z^+(x,y,t) \\ &\sigma_{jx}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,x) + \sigma_{jy}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,y) + \\ &+\sigma_{jz}(z=\varphi_n)\cos(\vartheta_n,z) = \bar{\Phi}_j^+(x,y,t) \end{aligned} \quad j = x,y \tag{1.5}$$

На поверхностях контакта слоев $z = \varphi_i(x,y)$ выполняются условия полного контакта теории термоупругости

$$\begin{aligned} &\left(\sigma_{jx}^{(i)}(z=\varphi_i) - \sigma_{jx}^{(i+1)}(z=\varphi_i)\right)\psi_{ix} + \left(\sigma_{jy}^{(i)}(z=\varphi_i) - \sigma_{jy}^{(i+1)}(z=\varphi_i)\right)\psi_{iy} + \\ &+\sigma_{jz}^{(i)}(z=\varphi_i) - \sigma_{jx}^{(i+1)}(z=\varphi_i) = 0 \qquad u_j^{(i)}(z=\varphi_i) = u_j^{(i+1)}(z=\varphi_i) \\ &\qquad i = 1,2,\cdots,n-1\ ,\quad j = x,y,z \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь обозначены

$$\cos(\vartheta_i, x) = -\frac{1}{\delta_i}\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{1}{\delta_i}\psi_{ix} \quad (x, y), \quad \cos(\vartheta_i, z) = \frac{1}{\delta_i}$$
$$\delta_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}\right)^2} \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{1.7}$$

Предполагается установившийся процесс, в связи с чем не заданы начальные условия. Не заданы также граничные условия на торцах $x = \pm a, \quad y = \pm b$ тонкого тела, поскольку решается внутренняя задача (основное асимптотическое разложение). Условиями на боковой поверхности обусловлено возникновение пограничных слоев. Соответствующее решение строится отдельно [3,6]. Считается, что на слоистое тонкое тело действует также тепловое поле, влияние которого учитывается по модели Дюгамеля–Неймана, предполагается, что температурная функция $\overline{T}(x, y, z, t) = T - T_0$ удовлетворяет уравнению теплопроводности и соответствующим граничным условиям [13].

Преследуется цель – разработать, по мере возможности, универсальный алгоритм, позволяющий аналитически определить и исследовать напряженно-деформированное состояние и динамику слоистого тонкого тела, используя современные вычислительные средства.

Решение поставленных задач подразумевает найти удовлетворяющие условиям (1.2)–(1.5) решения уравнений динамической задачи термоупругости и соотношений упругости анизотропного тела с учетом температурных напряжений:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \overline{P}_x = \rho \ddot{u}_x \quad (x, y, z;\ X, Y, Z) \tag{1.8}$$

$$col\left[e_{xx} - \alpha_{11}\overline{T}, e_{yy} - \alpha_{22}\overline{T}, ..., e_{xy} - \alpha_{12}\overline{T}\right] = \left\|a_{ij}\right\|_{6\times6} col\left[\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \cdots, \sigma_{xy}\right]$$
$$col\left[\sigma_{xx} + \gamma_{11}\overline{T}, \sigma_{yy} + \gamma_{22}\overline{T}, \cdots, \sigma_{xy} + \gamma_{12}\overline{T}\right] = \left\|b_{ij}\right\|_{6\times6} col\left[e_{xx}, e_{yy}, \cdots, e_{xy}\right]$$
$$\left\|b_{ij}\right\|_{6\times6} = \left\|a_{ij}\right\|_{6\times6}^{-1}, \quad a_{ij} = a_{ji},\ b_{ij} = b_{ji},\ \alpha_{ij} = \alpha_{ji},\ \gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$
$$col\left[\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33,} \cdots, \gamma_{12}\right] = \left\|b_{ij}\right\|_{6\times6} col\left[\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \cdots \alpha_{12},\right] \tag{1.9}$$
$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (x, y, z)$$

Здесь обозначены: a_{ij} – коэффициенты упругой податливости, b_{ij} – коэффициенты упругости, α_{ij} – коэффициенты линейного (теплового) расширения, причем

$$a_{ij} = a_{ij}(x, y),\ b_{ij} = b_{ij}(x, y),\ i, j = 1, 2, \cdots, 6$$
$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(x, y), \quad i, j = 1, 2, 3, \ \alpha_{13} = \alpha_{23} = \gamma_{13} = \gamma_{23} = 0 \tag{1.10}$$
$$a_{1j} = a_{2j} = a_{3j} = a_{6j} = b_{1j} = b_{2j} = b_{3j} = b_{6j} = 0 \quad j = 4, 5,$$

поскольку материалы слоев неоднородные по направлениям координатных осей x, y и анизотропные с тринадцатью коэффициентами анизотропии (в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярной к оси z).

2. Вывод разрешающих уравнений. Для решения поставленных краевых задач заменяем все искомые и заданные в (1.2)– (1.6) функции их образами преобразования Фурье

$$u_x\left(x,y,z,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty U_x\left(x,y,z,\omega\right)\sin\omega t\,d\omega$$
$$\left\{u_x,\sigma_{ij},\overline{\Phi},\overline{T},\overline{P}_x\right\}\to\left\{U_x,\tau_{ij},\Phi,\theta,P_x\right\}\quad(x,y,z) \tag{2.1}$$

(в дальнейшем, для краткости изложения, оперируя образами преобразования Фурье физических величин, за образами будут сохранены названия соответствующих физических величин) и переходим к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi=\frac{x}{l},\quad \eta=\frac{y}{l},\quad \zeta=\frac{z}{h}=\varepsilon^{-1}\frac{z}{l},\quad \varepsilon=\frac{h}{l},\ u=\frac{U_x}{l},\ v=\frac{U_y}{l},\ w=\frac{U_z}{l}, \tag{2.2}$$

где ε – геометрический малый параметр, указывающий на относительную тонкость рассматриваемого слоистого тела.

Для каждого слоя тонкого тела получаем:

$$\frac{\partial\tau_{xx}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{xy}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\tau_{xz}^{(i)}}{\partial\zeta}+lP_x^{(i)}=-\varepsilon^{-2}\rho^{(i)}\varpi^2h^2u^{(i)}\quad\left(x,y;\xi,\eta\right)$$
$$\frac{\partial\tau_{xz}^{(i)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\tau_{yz}^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\tau_{zz}^{(i)}}{\partial\zeta}+lP_z^{(i)}=-\varepsilon^{-2}\rho^{(i)}\varpi^2h^2w^{(i)} \tag{2.3}$$

$$\tau_{xx}^{(i)}=b_{11}^{(i)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}+b_{12}^{(i)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}b_{13}^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\zeta}+b_{16}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{11}^{(i)}\theta^{(i)}$$
$$\left(x,y;1,2\right)$$
$$\tau_{zz}^{(i)}=b_{13}^{(i)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}+b_{23}^{(i)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}b_{33}^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\zeta}+b_{36}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{33}^{(i)}\theta^{(i)}$$
$$\tau_{xy}^{(i)}=b_{16}^{(i)}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\xi}+b_{26}^{(i)}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}b_{33}^{(i)}\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\zeta}+b_{36}^{(i)}\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\eta}+\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\xi}\right)-\gamma_{12}^{(i)}\theta^{(i)} \tag{2.4}$$
$$\tau_{yz}^{(i)}=b_{44}^{(i)}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial v^{(i)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\eta}\right)+b_{45}^{(i)}\left(\varepsilon^{-1}\frac{\partial u^{(i)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(i)}}{\partial\xi}\right)\quad\left(x,y;\xi,\eta;u,v;4,5\right)$$

Система уравнений (2.3) и соотношения (2.4) сингулярно возмущены геометрическим малым параметром ε, следовательно [6,14,15], решение системы складывается из двух решений: основного (проникающего) решения, доминирующего внутри области, занимаемой тонким пакетом кроме небольшой зоны вблизи её торцов, и решения задачи в пограничном слое, которое экспоненциально быстро затухает (убывает) по направлению внутренней нормали к поверхности торцов [16,17]. Это обусловлено граничными условиями (1.2)–(1.5).

Учитывая это, здесь строится только основное (внутреннее) решение.

Решение внутренней задачи, соответствующее системе (2.3),(2.4), ищется в виде [1,3,6]

$$Q^{(i)}\left(x,y,z\right)=\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{\chi_Q}Q^{(i,s)}\left(\xi,\ \eta,\ \zeta\right), \tag{2.5}$$

где Q – любая из неизвестных компонент вектора перемещения u,v,w и тензора напряжений τ_{ij}, χ_Q – асимптотический порядок соответствующей величины, $\chi_u = 0$ – для всех перемещений и $\chi_\sigma = -1$ – для всех напряжений [1-3,7]. Такие асимптотические порядки впервые установлены в [1] для краевых задач пластин постоянной толщины с аналогичными (1.2),(1.4),(1.5) кинематическими и смешанными граничными условиями.

Заданные объемные силы и температурную функцию представим для каждого слоя в виде асимптотических разложений

$$P_x^{(i)}(x,y,z) = \sum_{s=0}^{S} l^{-1}\varepsilon^{s-2} P_x^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad (x,y,z)$$
$$\theta^{(i)}(x,y,z) = \sum_{s=0}^{S} \varepsilon^{s-1}\theta^{(i,s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.6}$$

Это означает, что объемные силы и изменение температуры могут влиять на напряженно-деформированное состояние тонкого тела, начиная с первого шага итерационного процесса, если их асимптотические порядки будут, соответственно, ε^{-2} и ε^{-1}, в противном случае их влияние будет сказываться в последующих приближениях.

Подставив (2.5),(2.6) в (2.3),(2.4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левых и правых частях равенств, получим систему рекуррентных разрешающих уравнений в виде следующих трех дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений для компонент тензора напряжений:

$$b_{45}^{(i)}\frac{\partial^2 v^{(i,s)}}{\partial\zeta^2} + b_{55}^{(i)}\frac{\partial^2 u^{(i,s)}}{\partial\zeta^2} + \rho^{(i)}\omega^2 h^2 u^{(i;s)} = R_u^{(i,s)} \qquad (u,v;5,4)$$
$$\frac{\partial^2 w^{(i,s)}}{\partial\zeta^2} + \lambda_3^{(i)2} w^{(i,s)} = R_w^{(i,s)}$$
$$\tau_{xx}^{(i,s)} = b_{13}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{xx*}^{(i,s)} \ \ (x,y;1,2),\ \ \tau_{zz}^{(i,s)} = b_{33}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{zz*}^{(i,s)} \tag{2.7}$$
$$\tau_{xy}^{(i,s)} = b_{36}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{xy*}^{(i,s)},\ \ \tau_{yz}^{(i,s)} = b_{44}^{(i)}\frac{\partial v^{(i,s)}}{\partial\zeta} + b_{45}^{(i)}\frac{\partial u^{(i,s)}}{\partial\zeta} + \tau_{yz*}^{(i,s)} \qquad (x,y;u,v;4,5)$$

Здесь обозначены:

$$R_u^{(i,s)} = -P_x^{(i,s)} - \frac{\partial\tau_{xx}^{(i,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\tau_{xy}^{(i,s-1)}}{\partial\eta} - \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(b_{55}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial\xi} + b_{45}^{(i)}\frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial\eta}\right)$$
$$(x,y;\xi,\eta,u,v;5,4),\ \lambda_3^{(i)} = \varpi h\sqrt{\rho^{(i)}/b_{33}^{(i)}}$$
$$R_w^{(i,s)} = \left[\gamma_{33}^{(i)}\frac{\partial\theta^{(i,s)}}{\partial\zeta} - P_z^{(i,s)} - \frac{\partial\tau_{xz}^{(i,s-1)}}{\partial\xi} - \frac{\partial\tau_{yz}^{(i,s-1)}}{\partial\eta} - \right.$$
$$\left. - \left(b_{13}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi} + b_{36}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial\zeta} - \left(b_{23}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\eta} + b_{36}^{(i)}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial\zeta}\right] \Big/ b_{33}^{(i)}$$

$$\tau_{xx*}^{(i,s)} = b_{11}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + b_{12}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + b_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \zeta} \right) - \gamma_{11}^{(i)} \theta^{(i,s)}$$

$$\left(x, y; \xi, \eta; u, v; 1, 2\right) \tag{2.8}$$

$$\tau_{zz*}^{(i,s)} = b_{13}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + b_{23}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + b_{36}^{(i)} \left(\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) - \gamma_{33}^{(i)} \theta^{(i,s)}$$

$$\tau_{xy*}^{(i,s)} = b_{16}^{(i)} \frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \xi} + b_{26}^{(i)} \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + b_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial u^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \right) - \gamma_{12}^{(i)} \theta^{(i,s)}$$

$$\tau_{yz*}^{(i,s)} = b_{44}^{(i)} \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \eta} + b_{45}^{(i)} \frac{\partial w^{(i,s-1)}}{\partial \xi} \quad \left(x, y; \xi, \eta; u, v; 4, 5\right).$$

3. Общий интеграл краевых задач. Общее решение системы разрешающих уравнений (2.7) выражается следующими рекуррентными формулами:

$$w^{(i,s)} = M_w^{(i,s)} \sin \lambda_3^{(i)} \zeta + N_w^{(i,s)} \cos \lambda_3^{(i)} \zeta + I_w^{(i,s)} \left(\zeta\right) \pm$$

$$u^{(i,s)} = \mu_1^{(i)} (M_u^{(i,s)} \sin \lambda_1^{(i)} \zeta + N_u^{(i,s)} \cos \lambda_1^{(i)} \zeta) + \tag{3.1}$$

$$+ b_{45}^{(i)} \lambda_2^{(i)2} (M_v^{(i,s)} \sin \lambda_2^{(i)} \zeta + N_v^{(i,s)} \cos \lambda_2^{(i)} \zeta) + I_u^{(i,s)} \left(\zeta\right) \quad (u, v; 1, 2; 4, 5)$$

где

$$\lambda_{1,2}^{(i)2} = \rho^{(i)} \omega^2 h^2 \left(b_{44}^{(i)} + b_{55}^{(i)} \pm \sqrt{c^{(i)}} \right) \Big/ (2\Delta^{(i)}), \quad c^{(i)} = (b_{55}^{(i)} - b_{44}^{(i)})^2 + 4 b_{45}^{(i)2}$$

$$\Delta^{(i)} = b_{44}^{(i)} b_{55}^{(i)} - b_{45}^{(i)2}, \ \mu_1^{(i)} = \rho^{(i)} \varpi^2 h^2 - b_{44}^{(i)} \lambda_1^{(i)2} \quad (1, 2; 4, 5)$$

$$I_u^{(i,s)}(\zeta) = \frac{1}{\lambda_1^{(i)}} \int_0^\zeta \Phi_u^{(i,s)}(\tau) \sin \lambda_1^{(i)} (\zeta - \tau) d\tau \quad (u, v, w; 1, 2, 3)$$

$$\Phi_u^{(i,s)}(\zeta) = \left(\mu_2 R_u^{(i,s-1)}(\zeta) - b_{45}^{(i)} \lambda_2^{(i)2} R_v^{(i,s-1)}(\zeta) \right) \Big/ \Delta_* \quad (u, v; 1, 2; 4, 5) \tag{3.2}$$

$$\Phi_w^{(i,s)}(\zeta) = R_w^{(i,s-1)}(\zeta), \ \Delta_*^{(i)} = \rho^{(i)} \varpi^2 h^2 \sqrt{c^{(i)}} \, (b_{55}^{(i)} - b_{44}^{(i)} - \sqrt{c^{(i)}}) \Big/ (2\Delta^{(i)})$$

Соответствующие компоненты тензора напряжений вычисляются по формулам:

$$\tau_{xx}^{(i,s)} = \lambda_3^{(i)} b_{13}^{(i)} \left(M_w^{(i,s)} \cos \lambda_3^{(i)} \zeta - N_w^{(i,s)} \sin \lambda_3^{(i)} \zeta \right) + I_{xx}^{(i,s)} \quad (x, y; 1, 2)$$

$$\tau_{zz}^{(i,s)} = \lambda_3^{(i)} b_{33}^{(i)} \left(M_w^{(i,s)} \cos \lambda_3^{(i)} \zeta - N_w^{(i,s)} \sin \lambda_3^{(i)} \zeta \right) + I_{zz}^{(i,s)}$$

$$\tau_{xy}^{(i,s)} = \lambda_3^{(i)} b_{36}^{(i)} \left(M_w^{(i,s)} \cos \lambda_3^{(i)} \zeta - N_w^{(i,s)} \sin \lambda_3^{(i)} \zeta \right) + I_{xy}^{(i,s)}$$

$$\tau_{xz}^{(i,s)} = \alpha_1^{(i)} \left(M_u^{(i,s)} \cos \lambda_1^{(i)} \zeta - N_u^{(i,s)} \sin \lambda_1^{(i)} \zeta \right) +$$

$$+ \beta_2^{(i)} \left(M_v^{(i,s)} \cos \lambda_2^{(i)} \zeta - N_v^{(i,s)} \sin \lambda_2^{(i)} \zeta \right) + I_{xz}^{(i,s)} \quad (x, y; u, v; 1, 2) \tag{3.3}$$

$$I_{xz}^{(i,s)}(\zeta) = \tau_{xz*}^{(i,s)} + b_{45}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \zeta} I_v^{(i,s)}(\zeta) + b_{55}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \zeta} I_u^{(i,s)}(\zeta) \quad (x, y; u, v; 4, 5)$$

$$I_{xx}^{(i,s)}(\zeta) = \tau_{xx*}^{(i,s)} + b_{13}^{(i)} \frac{\partial}{\partial \zeta} I_w^{(i,s)}(\zeta) \ (xx, yy, zz, xy; 13, 23, 33, 36)$$

$$\alpha_1^{(i)} = \lambda_1^{(i)} (b_{55}^{(i)} \mu_1^{(i)} + b_{45}^{(i)} \lambda_1^{(i)2}), \ \beta_2^{(i)} = \lambda_2^{(i)} b_{45}^{(i)} (\mu_2^{(i)} + b_{55}^{(i)} \lambda_2^{(i)2}) \quad (1,2;4,5).$$

Общий интеграл (3.1)–(3.3) поставленных краевых задач для каждого шага итерации содержит 6n функций интегрирования, которые однозначно определяются из 6(n–1) условий контакта слоев (1.4) и одной из комбинаций условий (1.2) – (1.5), каждая из которых состоит из шести граничных условий. Это свидетельствует о том, что сформулированные в первом параграфе краевые задачи являются вполне корректными для слоя $(-\infty < x, y < +\infty)$ переменной толщины и для тонкого тела конечных размеров $(|x| \le a, |y| \le b)$. Во втором случае полученное решение будет доминирующим во внутренних точках тела, кроме небольшой зоны пограничного слоя вблизи краев $x = \pm a,\ y = \pm b$ [16,17].

Удовлетворяя условиям контакта между слоями и граничными условиями, получим систему из 6n линейных алгебраических уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$
\begin{aligned}
& col\left|M_u^{(1,s)}, N_u^{(1,s)}, M_v^{(1,s)}, N_v^{(1,s)}, M_w^{(1,s)}, N_w^{(1,s)}, \cdots, M_u^{(n,s)}, N_u^{(n,s)},\right. \\
& \left. M_v^{(n,s)}, N_v^{(n,s)}, M_w^{(n,s)}, N_w^{(n,s)}\right| = \left\|c_{mk}\right\|^{-1}_{(6n)\times(6n)} \left\|d_m\right\|_{(6n)\times 1}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Элементы матрицы $\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}$ и матрицы-столбца $\left\|d_m\right\|_{(6n)\times 1}$, соответствующие условиям контакта (1.6), являются общими для всех четырех сформулированных краевых задач (1.2)–(1.5). После удовлетворения условий полного контакта слоев (1.6) определяются следующие 6(n–1) элементы матрицы $\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}$ и $\left\|d_m\right\|_{(6n)\times 1}$:

$$
\begin{gathered}
c_{mm} = \alpha_1^{(i)} q_1^{(i)}, \quad c_{m(m+1)} = -\alpha_1^{(i)} p_1^{(i)},\ c_{m(m+2)} = \beta_2^{(i)} q_2^{(i)},\ c_{m(m+3)} = -\beta_2^{(i)} p_2^{(i)} \\
c_{m(m+4)} = \lambda_3^{(i)} D_1^{(i)} q_3^{(i)}, \ c_{m(m+5)} = -\lambda_3^{(i)} D_1^{(i)} p_3^{(i)},\ c_{m(m+6)} = -\alpha_1^{(i+1)} q_1^{*(i)} \\
c_{m(m+7)} = \alpha_1^{(i+1)} p_1^{*(i)}, c_{m(m+8)} = -\beta_2^{(i+1)} q_2^{*(i)}, c_{m(m+9)} = \beta_2^{(i+1)} p_2^{*(i)} \\
c_{m(m+10)} = -\lambda_3^{(i+1)} D_1^{*(i)} q_3^{*(i)},\ c_{m(m+11)} = \lambda_3^{(i+1)} D_1^{*(i)} p_3^{*(i)} \\
(c_{mj}, c_{(m+1)j}; 1,2),\ j = m, (m+1), \cdots, (m+11) \\
c_{(m+2)m} = E_1^{(i)} q_1^{(i)},\ c_{(m+2)(m+1)} = -E_1^{(i)} p_1^{(i)},\ c_{(m+2)(m+2)} = E_2^{(i)} q_2^{(i)} \\
c_{(m+2)(m+3)} = -E_2^{(i)} p_2^{(i)} \ \ c_{(m+2)(m+4)} = \lambda_3^{(i)} b_{33}^{(i)} q_3^{(i)},\ c_{(m+2)(m+5)} = -\lambda_3^{(i)} b_{33}^{(i)} p_3^{(i)} \\
c_{(m+2)(m+6)} = -E_1^{*(i)} q_1^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+7)} = E_1^{*(i)} p_1^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+8)} = -E_2^{*(i)} q_2^{*(i)} \qquad (3.5) \\
c_{(m+2)(m+9)} = E_2^{*(i)} p_2^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+10)} = -\lambda_3^{(i+1)} b_{33}^{(i+1)} q_3^{*(i)},\ c_{(m+2)(m+11)} = \lambda_3^{(i+1)} b_{33}^{(i+1)} p_3^{*(i)}, \\
c_{(m+3)m} = \mu_1^{(i)} p_1^{(i)},\ c_{(m+3)(m+1)} = \mu_1^{(i)} q_1^{(i)},\ c_{(m+3)(m+2)} = b_{45}^{(i)} \lambda_2^{(i)2} p_2^{(i)}, \\
c_{(m+3)(m+3)} = b_{45}^{(i)} \lambda_2^{(i)2} q_2^{(i)},\ c_{(m+3)(m+6)} = -\mu_1^{(i+1)} p_1^{*(i)}, c_{(m+3)(m+7)} = -\mu_1^{(i+1)} q_1^{*(i)}, \\
c_{(m+3)(m+8)} = -b_{45}^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)2} p_2^{(i)}, c_{(m+3)(m+9)} = -b_{45}^{(i+1)} \lambda_2^{(i+1)2} q_2^{(i)}, \\
c_{(m+3)(m+k)} = 0, \ \ k = 5, 6, k > 9 \ \ (c_{(m+3)j}, c_{(m+4)j}; 1,2) \\
c_{(m+5)(m+4)} = p_3^{(i)},\ c_{(m+5)(m+5)} = q_3^{(i)},\ c_{(m+5)(m+10)} = p_3^{*(i)},\ c_{(m+5)(m+11)} = q_3^{*(i)} \\
c_{(m+5)(m+k)} = 0, \ \ k = 0, 1, \cdots, 9, \ \ k > 11, \quad c_{mk} = c_{(m+1)k} = \cdots = c_{(m+5)k} = 0, \ k < m \\
d_m^{(s)} = \left(I_{xx}^{(i+1,s)}(\zeta_i) - I_{xx}^{(i,s)}(\zeta_i)\right)\psi_{ix} + \left(I_{xy}^{(i+1,s)}(\zeta_i) - I_{xy}^{(i,s)}(\zeta_i)\right)\psi_{iy} +
\end{gathered}
$$

$$+I_{xz}^{(i+1,s)}(\zeta_i)-I_{xz}^{(i,s)}(\zeta_i)\ \ \left(m,(m+1),(m+2);x,y,z\right)$$
$$d_{(m+3)}^{(s)}=I_u^{(i+1,s)}(\zeta_i)-I_u^{(i,s)}(\zeta_i)\qquad \left((m+3),(m+4),(m+5);u,v,w\right)$$
Здесь обозначены
$$p_k^{(i)}=\sin\lambda_k^{(i)}\zeta_i,\ p_k^{*(i)}=\sin\lambda_k^{(i+1)}\zeta_i,\ \mathrm{q}_k^{(i)}=\cos\lambda_k^{(i)}\zeta_i,\ \mathrm{q}_k^{*(i)}=\cos\lambda_k^{(i+1)}\zeta_i,\ \mathrm{k=1,2,3}$$
$$D_1^{(i)}=\lambda_3^{(i)}(b_{13}^{(i)}\psi_{ix}+b_{36}^{(i)}\psi_{iy}),\ \ D_1^{*(i)}=\lambda_3^{(i+1)}(b_{13}^{(i+1)}\psi_{ix}+b_{36}^{(i+1)}\psi_{iy})\ \ (1,2;x,y)\quad (3.6)$$
$$E_1^{(i)}=\alpha_1^{(i)}\psi_{ix}+\beta_1^{(i)}\psi_{iy},\ \ E_1^{*(i)}=\alpha_1^{(i+1)}\psi_{ix}+\beta_1^{(i+1)}\psi_{iy}\quad (1,2;x,y)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.2) при $\zeta_0=\varphi_0/h$, получим элементы еще трех строк матриц
$$c_{(6n-5)1}=\mu_1^{(1)}p_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)2}=\mu_1^{(1)}q_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)3}=b_{45}^{(1)}\lambda_2^{(1)2}p_2^{*(0)},$$
$$c_{(6n-5)4}=b_{45}^{(1)}\lambda_2^{(1)2}q_2^{*(0)},\ c_{(6n-5)k}=0,\ k>4,\ d_{(6n-5)}^{(s)}=U^{-(s)}/l-I_u^{(1,s)}(\zeta_0)$$
$$c_{(6n-4)1}=b_{45}^{(1)}\lambda_1^{(1)2}p_1^{*(0)},\ c_{(6n-4)2}=b_{45}^{(1)}\lambda_1^{(1)2}q_1^{*(0)},\ c_{(6n-4)3}=\mu_2^{(1)}p_2^{*(0)}\qquad (3.7)$$
$$c_{(6n-4)4}=\mu_2^{(1)}q_2^{*(0)},\ c_{(6n-4)k}=0,\ k>4,\ d_{(6n-4)}^{(s)}=V^{-(s)}/l-I_v^{(1,s)}(\zeta_0)$$
$$c_{(6n-3)5}=p_3^{*(0)},\ c_{(6n-3)5}=q_3^{*(0)},\ c_{(6n-3)k}=0,\ k=1,2,3,4,\ k>6$$
$$d_{(6n-3)}^{(s)}=W^{-(s)}/l-I_w^{(1,s)}(\zeta_0),\ U^{\pm(0)}=U^{\pm},\ \ U^{\pm(s)}=0,\ \ s>0\ \ (U,V,W)$$

Из условий (1.2) при $\zeta_n=\varphi_n/h$ для тангенциальных перемещений получаем элементы двух предпоследних строк:
$$c_{(6n-2)(6n-5)}=\mu_1^{(n)}p_1^{(n)},\ c_{(6n-2)(6n-4)}=\mu_1^{(n)}q_1^{(n)},\ c_{(6n-2)(6n-3)}=b_{45}^{(n)}\lambda_2^{(n)2}p_2^{(n)}$$
$$c_{(6n-2)(6n-2)}=b_{45}^{(n)}\lambda_2^{(n)2}q_2^{(n)},\ c_{(6n-2)k}=0,\ k<(6n-5),\ k=(6n-1),(6n)\qquad (3.8)$$
$$c_{(6n-1)(6n-5)}=b_{45}^{(n)}\lambda_1^{(n)2}p_1^{(n)},\ c_{(6n-1)(6n-4)}=b_{45}^{(n)}\lambda_1^{(n)2}q_1^{(n)},\ c_{(6n-1)(6n-3)}=\mu_2^{(n)}p_2^{(n)}$$
$$c_{(6n-1)(6n-2)}=\mu_2^{(n)}q_2^{(n)},\ c_{(6n-2)k}=0,\ k<(6n-5),\ k=(6n-1),(6n)$$
$$d_{(6n-1)}^{(s)}=V^{+(s)}/l-I_v^{(n,s)}(\zeta_n),\ \ d_{(6n-2)}^{(s)}=U^{+(s)}/l-I_u^{(n,s)}(\zeta_n)$$
а элементы последней строки получаем из граничного условия (1.2) для нормального перемещения
$$c_{(6n)(6n-1)}=p_3^{(n)},\ c_{(6n)(6n)}=q_3^{(n)},\ c_{(6n)k}=0,\ k<(6n-1)\qquad (3.9)$$
$$d_{(6n)}^{(s)}=W^{+(s)}/l-I_w^{(n)}(\zeta_0).$$
Следовательно, решение краевой задачи с граничными условиями (1.2) определяется рекуррентными формулами (2.5),(3.1)–(3.3), где функции интегрирования определяются из матричного уравнения (3.4), когда элементы матриц имеют вид (3.5)–(3.9). Условием существования решения является
$$\Delta_u=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0.\qquad (3.10)$$

Для решения краевой задачи с граничными условиями (1.3) изменятся элементы только последних шести строк матриц в левых и правых частях (3.4) следующим образом:

удовлетворив граничным условиям (1.3) при $\zeta_0=\varphi_0/h$, получаем
$$c_{(6n-5)1}=\alpha_1^{(1)}q_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)2}=-\alpha_1^{(1)}p_1^{*(0)},\ c_{(6n-5)3}=\beta_2^{(1)}q_2^{*(0)},\ c_{(6n-5)4}=-\beta_2^{(1)}p_2^{*(0)},$$

$$c_{(6n-5)5}=\lambda_3^{(1)}D_1^{*(0)}q_3^{*(0)},\; c_{(6n-5)6}=-\lambda_3^{(1)}D_1^{*(0)}p_3^{*(0)},\; c_{(6n-2)k}=0,\; k>6$$
$$d_{(6n-5)}^{(s)}=\delta_0\Phi_x^{-(s)}-I_{xx}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0x}-I_{xy}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0y}-I_{xz}^{(1,s)}(\zeta_0)$$
$$\big((6n-5),(6n-4);1,2;x,y\big) \tag{3.11}$$
$$c_{(6n-3)1}=E_1^{*(0)}q_1^{*(0)},\; c_{(6n-3)2}=-E_1^{*(0)}p_1^{*(0)},\; c_{(6n-3)3}=E_2^{*(0)}q_2^{*(0)},$$
$$c_{(6n-3)4}=-E_2^{*(0)}p_2^{*(0)},\; c_{(6n-3)5}=\lambda_3^{(1)}b_{33}^{(1)}q_3^{*(0)},\; c_{(6n-3)6}=-\lambda_3^{(1)}b_{33}^{(1)}p_3^{*(0)},$$
$$c_{(6n-3)k}=0,\; k>6\;\; d_{(6n-3)}^{(s)}=\delta_0\Phi_z^{-(s)}-I_{xz}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0x}-I_{yz}^{(1,s)}(\zeta_0)\psi_{0y}-I_{zz}^{(1,s)}(\zeta_0)$$
$$\Phi_{\vartheta j}^{(0)}=\varepsilon\Phi_j^{\pm},\; \Phi_{\vartheta j}^{(s)}=0\;\; s>0,\; j=x,y,z\,,$$

при $\zeta_n=\varphi_n/h$ из условий (1.3) для тангенциальных напряжений имеем:

$$c_{(6n-2)(6n-5)}=\alpha_1^{(n)}q_1^{(n)},\; c_{(6n-2)(6n-4)}=-\alpha_1^{(n)}p_1^{(n)},\; c_{(6n-2)(6n-3)}=\beta_2^{(n)}q_2^{(n)}$$
$$c_{(6n-2)(6n-2)}=-\beta_2^{(n)}p_2^{(n)},\; c_{(6n-2)(6n-1)}=\lambda_3^{(n)}D_1^{(n)}q_3^{(n)}\;\; c_{(6n-2)(6n)}=-\lambda_3^{(n)}D_1^{(n)}p_3^{(n)},$$
$$c_{(6n-2)k}=0,\; k<6n-5\,, \tag{3.12}$$
$$d_{(6n-2)}^{(s)}=\delta_n\Phi_x^{+(s)}-I_{xx}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{nx}-I_{xy}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{ny}-I_{xz}^{(n,s)}(\zeta_n)$$
$$\big((6n-2),(6n-1);1,2;x,y\big)$$

и для нормальных напряжений

$$c_{(6n)(6n-5)}=E_1^{(n)}q_1^{(n)},\; c_{(6n)(6n-4)}=-E_1^{(n)}p_1^{(n)},\; c_{(6n)(6n-3)}=E_2^{(n)}q_2^{(n)} \tag{3.13}$$
$$c_{(6n)(6n-2)}=-E_2^{(n)}p_2^{(n)},\; c_{(6n)(6n-1)}=\lambda_3^{(n)}b_{33}^{(n)}q_3^{(n)},\; c_{(6n)(6n)}=-\lambda_3^{(n)}b_{33}^{(n)}p_3^{(n)}$$
$$c_{(6n)k}=0, k<(6n-5),\; d_{(6n)}^{(s)}=\delta_n\Phi_z^{+(s)}-I_{xz}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{nx}-I_{yz}^{(n,s)}(\zeta_n)\psi_{ny}-I_{zz}^{(n,s)}(\zeta_n)$$

Следовательно, решение краевой задачи с граничными условиями (1.3) определяется теми же рекуррентными формулами (2.5),(3.1)–(3.3), где функции интегрирования определяются из матричного уравнения (3.4), когда элементы матриц имеют вид (3.5),(3.6),(3.11)–(3.13), условием существования решения является

$$\Delta_\sigma=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0\,. \tag{3.14}$$

В решениях краевых задач со смешанными граничными условиями изменятся элементы только части последних шести строк матриц (3.4). Для задачи со смешанными граничными условиями (1.4) элементами матрицы будут (3.5)–(3.8), (3.13), а условие существования решения будет

$$\Delta_{1(u\sigma)}=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0\,. \tag{3.15}$$

А для задачи со смешанными граничными условиями (1.5) элементами матрицы будут (3.5)–(3.7), (3.9), (3.12) с условием существования решения

$$\Delta_{2(u\sigma)}=\det\left\|c_{mk}\right\|_{(6n)\times(6n)}\neq 0\,. \tag{3.16}$$

Заметим, что выведенные рекуррентные формулы решений сформулированных краевых задач после каждого шага итерации подразумевают интегрирование по поперечной координате $z(\zeta)$ и дифференцирование по продольным координатам x,y (ξ,η), следовательно, итерационный процесс позволяет решить краевые задачи с любой асимптотической точностью $O(\varepsilon^s)$, если все заданные в условиях задач величины, в том числе физико-механические коэффициенты, вместе со своими производными необходимого порядка являются функциями класса C^S с изменяемостью $O(\varepsilon^0)$ [14].

Из условий (3.10),(3.14),(3.15),(3.16) существования решений краевых задач следует, что невыполнение этих условий приводит к резкому возрастанию амплитуд колебаний. Нетрудно доказать, что уравнения

$$\Delta_u = 0,\ \ \Delta_\sigma = 0,\ \ \Delta_{1(u\sigma)} = 0,\ \ \Delta_{2(u\sigma)} = 0 \tag{3.17}$$

являются дисперсионными уравнениями главных значений частот собственных колебаний анизотропного слоистого тонкого тела. Поскольку для слоистого тела решение уравнений (3.17) в общем случае громоздко, приведем решение дисперсионного уравнения $\Delta_u = 0$ и соответствующие им значения собственных частот для однослойного анизотропного неоднородного тела (слоя) переменной толщины:

$$\sin\lambda_3(\zeta_1-\zeta_0)=0,\ \ \varpi_{rez.} = \frac{\pi k}{\varphi_1-\varphi_0}\sqrt{\frac{b_{33}}{\rho}} \tag{3.18}$$

$$\sin\lambda_1(\zeta_1-\zeta_0)=0,\ \ \sin\lambda_2(\zeta_1-\zeta_0)=0,\ \varpi_{rez.} = \frac{\pi k}{\varphi_1-\varphi_0}\sqrt{\frac{2\Delta}{\rho(b_{44}+b_{55}\pm\sqrt{c})}}$$

Заметим, что собственные частоты являются функциями продольных координат x, y.

Резюмируя приведенное выше, можем констатировать, что асимптотический метод позволяет найти решения широкого класса динамических задач для слоистых, неоднородных и анизотропных тел. При этом, выведенные рекуррентные соотношения могут служить готовым алгоритмом для получения окончательного решения не только численно, но и аналитически, используя современные вычислительные средства.

Укажем также, что полученные результаты применимы для решения так называемых "некорректных по Адамару" [18] краевых задач, т.е. когда на одной лицевой поверхности тела условий заданы больше чем надо, а на противоположной – наоборот, заданы меньше условий, чем необходимо.Такие задачи встречаются, в частности, в геофизике при изучении тектоники литосферных плит по данным системы GPS (Система Глобального Местоположения) – в определенном регионе заданы перемещения точек свободной от нагрузки поверхности земли (данные системы GPS) за определенное время. Требуется изучить напряженно-деформированное состояние земной коры [18,19] данного региона. Для решения такой задачи из всех комбинаций граничных условий (1.2)–(1.3) нужно выбирать все шесть условия с верхним индексом “+”, а именно:

$$\sigma_{jx}\left(z=\varphi_n\right)c\,\mathrm{os}\left(\vartheta_n,x\right)+\sigma_{jy}\left(z=\varphi_n\right)\cos\left(\vartheta_n,y\right)+\sigma_{jz}\left(z=\varphi_n\right)\cos\left(\vartheta_n,z\right)=$$

$$=\bar{\Phi}^+_j\left(x,y,t\right),\ u_j(x,y,\varphi_n,t)=u^+_j(x,y,t),\ \left(j=x,y,z\right). \tag{3.19}$$

Найденное общее асимптотическое решение позволяет удовлетворить и этим условиям. Удовлетворив им, элементы матрицы (3.4) определятся по формулам (3.5), (3.6), (3.8), (3.9) и

$$c_{(6n-5)(6n-5)} = \alpha_1^{(n)}q_1^{(n)},\ c_{(6n-5)(6n-4)} = -\alpha_1^{(n)}p_1^{(n)},\ c_{(6n-5)(6n-3)} = \beta_2^{(n)}q_2^{(n)},$$

$$c_{(6n-5)(6n-2)} = -\beta_2^{(0)}p_2^{(0)},$$

$$c_{(6n-5)(6n-1)} = \lambda_3^{(n)}D_1^{(n)}q_3^{(n)},\ c_{(6n-5)(6n)} = -\lambda_3^{(n)}D_1^{(n)}p_3^{(n)},$$

$$c_{(6n-5)k} = 0,\ \ k < 6n-5\,,$$
$$d^{(s)}_{(6n-5)} = \delta_n \Phi^{+(s)}_x - I^{(n,s)}_{xx}(\zeta_n)\psi_{nx} - I^{(n,s)}_{xy}(\zeta_n)\psi_{ny} - I^{(n,s)}_{xz}(\zeta_n)\,,$$
$$\big((6n-5),(6n-4);1,2;x,y\big),\ c_{(6n-3)} = 0, k = (6n-5) \tag{3.20}$$
$$c_{(6n-3)(6n-5)} = E^{(n)}_1 q^{(n)}_1,\ c_{(6n-3)(6n-4)} = -E^{(n)}_1 p^{(n)}_1,\ c_{(6n-3)(6n-3)} = E^{(n)}_2 q^{(n)}_2$$
$$c_{(6n-3)(6n-2)} = -E^{(n)}_2 p^{(n)}_2,\ c_{(6n-3)(6n-1)} = \lambda^{(n)}_3 b^{(n)}_{33} q^{(n)}_3, c_{(6n-3)(6n)} = -\lambda^{(n)}_3 b^{(n)}_{33} p^{(n)}_3$$
$$d^{(s)}_{(6n-3)} = \delta_n \Phi^{+(s)}_z - I^{(n,s)}_{xz}(\zeta_n)\psi_{nx} - I^{(n,s)}_{yz}(\zeta_n)\psi_{ny} - I^{(n,s)}_{zz}(\zeta_n)\,.$$

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учёными из новых независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS 06-100017-8886).

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией //Сб.тр. IV Всесоюзн. Симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С.105-110.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С.271-278.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С. 290–298.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН АрмССР. Механика. 1989. Т.42. №3. С.28-36.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во „Гитутюн" НАН РА, 2005. 468 с.
7. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V., Ghulghazaryan L.G. Analysis of Forced Vibrations of Base-Foundation Packet and Seismoisolator on the Base of Dinamic Equations Theory //Proccedings of the Third World Conference on Structural Control. Como, Italy.2002. P.759-764.
8. Aghalovyan L.A., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V. Optimization of the Resistance of Base-foundation Packet of constructions under Seismic and Force Actions // Third European Conference on Structural Control.Vienna. Austria.2004. P. M6-21–M6-24.
9. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L. On Forced Vibrations of Beams under Seismic and Force Actions when There is a Viscous Resistance // Third European Conference on Structural. Control Vienna. Austria. 2004. P. M6-26–M6-28.
10. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. К определению частот и форм собственных колебаний ортотропной полосы.// Докл. НАН РА. 2003. №4. С. 296-301.

11. Агаловян М.Л. Асимптотика решения пространственной динамической задачи для анизотропных пластин. //В сб.: Механика оболочек и пластин (Тр. XX международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд.: Нижегородского Госунта, Нижний Новгород, РФ. 2002. С.78-82.
12. Агаловян М.Л. Пространственная задача о вынужденных колебаниях пластин с общей анизотропией.//В сб.: Избранные вопросы теории упругости, пластичности и ползучести. Ереван: “Гитутюн” НАН Армении, 2006. С. 42-49.
13. Nowacki W.Dynamiczne zagadnienia termosprezystosci. Warszawa: PWN, 1966= Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
14. Немировский В.Ю., Янковский А.П. Метод асимптотических разложений решений задач стационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин.//ПММ. 2008. Т.72. Вып.1. С.157-175.
15. Немировский В.Ю., Янковский А.П. Асимптотический анализ стационарной задачи теплопроводности конструктивно и физически неоднородных композитных стержней при анизотропии общего вида.// Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №4. С.71-85.
16. Геворкян Р.С. Асимптотические решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости для изотропных пластин. // ПММ. АН РФ. 2008. Вып.1. С.148-156.
17. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.
18. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
19. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвуз. сб. н.трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С.51-58.
20. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв.АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37. №6. С.3-15.
21. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
22. Lenser A. Aghalovyan, Ruben S. Gevorgyan, Avetik V.Sahakyan. Mathematical Simulation of Collision of Arabian and Euroasian Plates on the Base of GPS Data // Изв.НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №4. С.3-9.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.10.2008