ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №3, 2009 Механика

УДК 539.3

К ЗАДАЧЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Амбарцумян С.А., Белубекян М.В.

Ключевые слова: колебание, цилиндрическая оболочка, микровращение, поперечный сдвиг.
Key words: vibration, cylindrical shell, microrotation, transversal shear

Ս.Ա. Համբարձումյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան
Շրջանային գլանային թաղանթի առանցքասիմետրիկ տատանումների խնդրի վերաբերյալ
Առաջարկվում է գլանային թաղանթի տատանումների հավասարումների մոդել: Հաշվի են առնվում միկրոպտույտները և լայնական սահքերը: Որոշված են մեմբրանային, ծռման և պտտական տատանումների հաճախականությունները:

S.A.Hambartsumian, M.V.Belubekyan
On a problem of axis-symmetric vibrations of circular cylindrical shell
The model of vibration equations of cylindrical shell with regard to microrotations and transversal shears is suggested. The frequency of membrane, bending and rotational vibrations are determined.

Предлагается модель уравнений колебаний цилиндрической оболочки с учетом микровращений и поперечных сдвигов. Определяются частоты мембранных, изгибных и вращательных колебаний.

1. Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка (R,h,l) в системе смешанных координат α_i (α_1 и α_2 совпадают, соответственно, с образующими и с направляющими срединной поверхности оболочки, α_3 – нормальная к срединной поверхности прямолинейная координата)

Задача решается согласно микрополярной теории [1]. Предполагается, что:

а) нормальные к срединной поверхности оболочки перемещения u_3 не зависят от координаты $\alpha_3, u_3 = w(\alpha_1)$; (1.1)

б) касательные напряжения σ_{31} по толщине оболочки меняются по заданному закону [2]

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\varphi_1(\alpha_1); \tag{1.2}$$

в) силовые напряжения σ_{33} и моментные напряжения μ_{3i} пренебрежимо малы;

г) повороты ω_1 и ω_3 равны нулю, а повороты ω_2 имеют структуру поворотов, определяемых по уточненным теориям оболочек [1,2]

$$\omega_2 = \frac{\partial w(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\psi_1(\alpha_1), \tag{1.3}$$

$w(\alpha_1), \varphi(\alpha_1), \psi(\alpha_1)$ – искомые функции.

Напряжение определяется следующим образом [1,3]:

$$\sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ji},$$
$$\mu_{ji} = (\gamma+2)\chi_{ji} + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij}, \qquad (1.4)$$

где

$$\mu = \frac{E}{2(1+v)},\ \lambda = \frac{vE}{(1+v)(1-2v)} - \left(ML^{-1}T^{-2}\right),$$

$\alpha - \left(ML^{-1}T^{-2}\right);\ \gamma, \varepsilon, \beta - \left(MLT^{-2}\right)$ – новые постоянные.

γ_{ji}, χ_{ji} – компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения, для которых имеем [1]

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1},\ \gamma_{22} = \frac{u_3}{R},\quad \gamma_{13} = \frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1} + w_2,$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_3} - w_2\quad \gamma_{12} = 0,\ \gamma_{21} = 0,\ \gamma_{23} = 0, \gamma_{32} = 0, \qquad (1.5)$$

$$\chi_{11} = 0,\ \chi_{22} = 0,\ \chi_{33} = 0, \chi_{12} = 0\quad \chi_{21} = 0,\ \chi_{31} = 0, \chi_{32} = \frac{\partial w_2}{\partial \alpha_3},$$

$$\chi_{13} = 0,\ \chi_{23} = 0.$$

Поступая обычным образом [1,2], для тангенциальных перемещений $u_1(u_2 = 0)$ имеем

$$u_1 = u(\alpha_1) - \alpha_3 \frac{\partial w(\alpha_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)(\varphi_1 - 2\alpha\psi_1), \qquad (1.6)$$

где $u(\alpha_1)$ – искомое тангенциальное перемещение срединной поверхности.

Согласно (1.1)-(1.6) для отличных от нуля напряжений получим

$$\sigma_{11} = B\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + v\frac{w}{R}\right) - \alpha_3 B\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + I_0\frac{B}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + 2\alpha\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$\sigma_{22} = B\left(\frac{w}{R} + v\frac{\partial u}{\partial \alpha_1}\right) - \alpha_3 B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + I_0\frac{B_{12}}{\mu+\alpha}\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_1} + 2\alpha\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}\right),$$

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\varphi_1, \qquad (1.7)$$

$$\sigma_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1 + \frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right),$$

$$\mu_{12} = -(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + (\gamma+\varepsilon)\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1},$$

$$\mu_{21} = -(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha_1^2} + (\gamma-\varepsilon)\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \alpha_3^2\right)\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1}, \qquad (1.8)$$

$$\mu_{23}=(\gamma+\varepsilon)\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-\left[\frac{\gamma+\varepsilon}{2R}\left(\frac{h^2}{4}-\alpha_3^3\right)+\alpha_3(\gamma-\varepsilon)\right]\psi_1.$$

где

$$B=\frac{E}{1-\nu^2},\ B_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2},\ I_0=\frac{\alpha_3}{2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{\alpha_3^2}{3}\right) \tag{1.9}$$

Далее для внутренних усилий и моментов получим:

$$T_{11}=Bh\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+B_{12}\frac{h}{R}w,\ T_{22}=B\frac{h}{R}w+B_{12}h\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}$$

$$N=\frac{h^3}{12}\left(\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\psi_1\right) \tag{1.10}$$

$$\mu_{11}=-\frac{Bh^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+\frac{Bh^5}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}+2\alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}\right)$$

$$\mu_{22}=-\frac{B_{12}h^3}{12}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+\frac{B_{12}h^5}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}+2\alpha\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}\right) \tag{1.11}$$

$$Q_{23}=(\gamma+\varepsilon)\frac{h}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-(\gamma+\varepsilon)\frac{h^3}{12R}\psi_1 \tag{1.12}$$

$$R_{12}=-(\gamma+\varepsilon)h\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{h^3}{12}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}$$

$$R_{21}=-(\gamma-\varepsilon)h\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha_1^2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{h^3}{12}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1} \tag{1.13}$$

Уравнения движения имеют вид [1]:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial N}{\partial\alpha_1}-\frac{T_{22}}{R}=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{dM_{11}}{\partial\alpha_1}-\frac{h^3}{12}\phi_1=-\rho\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{h^2}{10(\mu+\alpha)}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2}-\frac{\alpha h^2}{20(\mu+\alpha)}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right), \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial R_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{R}Q_{23}+\frac{h^3}{12}\phi_1-N=-Jh\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{h^2}{12}\frac{\mu+\alpha}{4\mu}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right),$$

где $J-\left(ML^{-1}\right)$ – динамическая характеристика среды, мера инерции при вращении, $\rho-\left(ML^{-3}\right)$ – плотность материала.

Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (1.10)-(1.13) в уравнения (1.14), получим уравнения движения в искомых функциях $u(\alpha_1),\ w(\alpha_1),\ \varphi_1(\alpha_1),\ \psi_1(\alpha_1)$

$$Bh\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha_1^2}+B_{12}h\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.15}$$

$$B_{12}h\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha_1}+Bh\frac{w}{R^2}-\frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\frac{h^3}{12}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_1}-\frac{\mu\alpha h^3}{3(\mu+\alpha)}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (1.16)$$

$$\frac{Bh^3}{12}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^3}-\frac{Bh^5}{120(\mu+\alpha)}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha_1^2}+2\alpha\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^2}\right)+\frac{h^3}{12}\varphi_1=$$
$$=\rho\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{\alpha h^2}{20(\mu+\alpha)}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right) \qquad (1.17)$$

$$(\gamma+\varepsilon)h\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1^3}-(\gamma+\varepsilon)\frac{h^3}{12}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\alpha_1^2}-\frac{h^3}{12}\frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\varphi_1-$$
$$-(\gamma+\varepsilon)\frac{h}{R^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{R^2}+\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\right)\psi_1= \qquad (1.18)$$
$$=Jh\left(\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha_1\partial t^2}-\frac{h^2}{48}\frac{\mu+\alpha}{\mu}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)$$

2. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку, шарнирно закрепленную по торцам $\alpha_1=0,\ \alpha_1=l$.

Граничные условия, очевидно, запишутся следующим образом:

$$T_{11}=0, M_{11}=0,\ w=0, R_{12}=0 \text{ при } \alpha_1=0,l. \qquad (2.1)$$

Решения системы уравнений (1.15)-(1.18), удовлетворяющие граничным условиям (2.1), представим следующим образом:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{iwt}\cos\lambda_n\alpha_1,\ w=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{iwt}\sin\lambda_n\alpha_1,$$
$$\phi_1=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{iwt}\cos\lambda_n\alpha_1,\ \psi_1=\sum_{n=1}^{\infty}D_n e^{iwt}\cos\lambda_n\alpha_1, \qquad (2.2)$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – постоянные интегрирования, $\lambda_n=n\pi/l$, ω – частота колебаний.

Подставляя (2.2) в систему уравнений движения (1.15)-(1.18), при этом введя следующие обозначения:

$$\eta_n=\frac{\rho\omega^2}{B\lambda_n^2},\ \xi_n=\frac{1}{R\lambda_n},\ C_n=B\lambda_n^3F_n,\ D_n=\frac{12\lambda_n}{h^2}E_n,$$
$$\zeta_n=\frac{\lambda_n^2h^2}{12},\ \alpha_0=\frac{\alpha}{\mu},\ \gamma_0=\frac{\gamma+\varepsilon}{B}\lambda_1^2,\ j_0=\frac{J\lambda_1^2}{\rho}, \qquad (2.3)$$

получим следующую алгебраическую систему с безразмерными коэффициентами относительно искомых постоянных A_n, B_n, F_n, E_n:

$$(1-\eta_n)A_n-v\xi_nB_n=0 \qquad (2.4)$$

$$v\xi_nA_n-(\xi_n^2-\eta_n)B_n-\frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_nF_n-\frac{2(1-v)\alpha_0}{1+\alpha_0}E_n=0 \qquad (2.5)$$

$$(1-\eta_n)B_n-\left[1+\frac{12\zeta_n(1-\eta_n)}{5(1-v)(1+\alpha_0)}\right]F_n-\frac{3\alpha_0}{5(1+\alpha_0)}(4-\eta_0)E_n=0 \qquad (2.6)$$

$$n^2\left[\left(1+\xi_n^2\right)\gamma_0 - j_0\eta_n\right]B_n + \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_n F_n -$$
$$-\left\{\frac{2(1-\nu)\alpha_0}{1+\alpha_0} + n^2\left[\left(1+\zeta_n^2\right)\gamma_0 - \frac{1+\alpha_0}{4}j_0\eta_n\right]\right\}E_n = 0 \qquad (2.7)$$

Приравнивая к нулю детерминант системы уравнений (2.4)-(2.7), получим уравнение для определения параметров частот колебаний оболочки η_n:

$$\begin{vmatrix} (1-\eta_0) & -\nu\xi_n & 0 & 0 \\ -\nu\xi_n & \left(\xi_n^2-\eta_n\right) & \frac{1-\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_n & \frac{2(1-\nu)\alpha_0}{1+\alpha_0} \\ 0 & -(1-\eta_n) & P_1 & \frac{3\alpha_0(4-\eta_n)}{5(1+\alpha_0)} \\ 0 & P_2 & \frac{2\alpha_0}{1+\alpha_0}\zeta_n & P_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.8)$$

где введены следующие обозначения:

$$P_1 = 1 + \frac{12\zeta_n(1-\eta_n)}{5(1-\nu)(1+\alpha_0)},\; P_2 = n^2 j_0\left[\left(1+\xi^2\right)\frac{\gamma_0}{j_0} - \eta_n\right],$$
$$P_3 = \frac{2(1-\nu)\alpha_0}{1+\alpha_0} + n^2 j_0\frac{(1+\alpha_0)}{4}\left[\frac{4\left(1+\xi_n^2\right)\gamma_0}{(1+\alpha_0)j_0} - \eta_n\right]. \qquad (2.9)$$

Таким образом, поставленная задача решена. Имея значение упругих постоянных и геометрических размеров оболочки, мы можем вычислить значения частот свободных колебаний оболочки.

В частности, например, для пластинки $(\xi_n = 0)$, если $\alpha = 0\;(\alpha_0 = 0)$ и не учитываются сдвиговые деформации $\zeta_n << 1$, из (2.8) получаются следующие корни, определяющие частоты колебаний:

$$\eta_{n1} = 1,\quad \eta_{n2} = \zeta_n,\quad \eta_{n3} = \frac{4\gamma_0}{j_0}, \qquad (2.10)$$

где первым равенством определяются частоты планарных (мембранных) колебаний, вторым равенством – изгибных колебаний, третьим равенством – внутренних вращений, при этом упругие колебания на зависят от микровращений. В этом случае, если пластинка изготовлена из материала «алюминиевая дробь в эпоксидной смоле» [4-6] со следующими характеристиками:

$$\alpha = 7{,}45\,МПа,\;\; \gamma+\varepsilon = 2{,}64\,КН,\;\; j = 0{,}42910^{-3}\,кг/М,$$
$$\mu = 1{,}89\,ГПа,\;\; E = 5{,}29\,ГПа,\;\; \rho = 0{,}8\,кг/М^3,$$

из (2.10) согласно (2.3) получим

$$\eta_{n3} = 3{,}13\;\;10^{-3}. \qquad (2.11)$$

Сравнивая (2.11) с (2.10) с учетом (2.3) и приведенных характеристик материала, нетрудно заметить, что частоты изгибных колебаний вероятно могут совпадать с частотами колебаний вращения.

3. Рассмотрим пластинку-полосу шириной l , изготовленную из материала «алюминиевая дробь в эпоксидной смоле». Поперечные сдвиги не рассматриваются, принимается также, что $\zeta_1 << 1,\ \alpha_0 << 1$. Определим лишь первые частоты колебаний.

При указанных допущениях частота планарных колебаний определяется из равенства

$$\eta_{11} = 1. \tag{3.1}$$

Частоты изгибных и вращательных колебаний при $\nu = 0{,}4$, согласно (2.8), будут определены из следующего уравнения:

$$\begin{vmatrix} -\eta_1 & \zeta_1 & 1{,}2\alpha_0 \\ \eta_1 - 1 & 1 & 0{,}6\alpha_0\left(4 - \eta_1\right) \\ \gamma_0 - j_0\eta_1 & 2\alpha_0\zeta_1 & 0{,}25\, j_0\eta_1 - \left(1{,}2\,\alpha_0 + \gamma_0\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

Ниже приводится значения искомых частот колебаний в зависимости от значений относительной толщины пластинки ζ_1

Таблица

ζ_1	10^{-2}	$5\ 10^{-3}$	10^{-4}	$0{,}5\ 10^{-4}$	$\zeta \to 0$
η_{12}	$1{,}02\ 10^{-2}$	$5{,}325\ 10^{-3}$	$4{,}089\ 10^{-4}$	$3{,}555\ 10^{-4}$	$3{,}017\ 10^{-4}$
η_{13}	$1{,}63\ 10^{-4}$	$0{,}35\ 10^{-4}$	$0{,}485\ 10^{-4}$	$0{,}505\ 10^{-4}$	$0{,}548\ 10^{-4}$

Из таблицы видно, что частоты изгибных колебаний (η_{12}) при уменьшении относительной толщины пластинки уменьшаются, а частоты колебаний внутренних вращений вначале уменьшаются, а в последующем увеличиваются. Однако, обе частоты имеют предел при $\zeta_1 \to 0$. Кроме того, они не могут быть равными [5,6] в отличие от случая, рассмотренного в пункте 2.

В заключение отметим, что другой вариант двумерных уравнений микрополярных оболочек, полученный на основе применения асимптотического метода интегрирования, предложен в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд. НАН Армении, 1999. 214 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. МГУ, 1999. 327с.
5. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе нессиметричной теории упругости // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. № 2. С. 3-17.
6. Бровко Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной структуры типа Коссера. //МТТ. 2008. № 1. С. 22-36.
7. Саркисян С.О. Общая теория упругих оболочек на основе несимметричной теории упругости // Докл.НАН Армении. 2008. Т.108. №4. С.309–319.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.10.2008