

УДК 539.3

**О РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ АБСОЛЮТНО
ЖЁСТКИХ ШТАМПОВ ПО ГРАНИЦЕ КУСОЧНО-
ОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: смешанная задача, штамп, составная полуплоскость, контактные напряжения, преобразование Фурье.

Key words: mixed problem, indentation, piecewise homogeneous half-plane, Fourier transform.

Վ. Ն. Հակոբյան, Հ. Ա. Ամիրջանյան

Կոորդատ-կոորդ համաստեղ կիսահարթության եզրով հավասարաչափ շարժվող բացարձակ կոշտ դրոշմների համակարգի մասին

Ուսումնասիրված է հաստատուն արագությամբ շարժվող բացարձակ կոշտ դրոշմների համակարգի կոնտակտային փոխազդեցությունը բաղադրյալ կիսահարթության հետ: Շարժվող կոորդինատական համակարգում խնդրի լուծումը բերված է երկրորդ սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որի լուծումը կառուցված է դիսկրետ եզակիություններ մեթոդով:

V.N.Hakobyan, H.A. Amirjanyan

About indentation of the system of uniformly moving rigid punches in piecewise homogeneous half-plane

The contact interaction between the system of absolutely rigid stamps with constant rate of movement and compound half-plane is investigated. The solution of considered problem in movable system of coordinates is reduced to the system of second kind singular integral equations. The solution of last one is built by the method of discrete singularities.

Исследована задача о контактном взаимодействии движущейся с постоянной скоростью системы абсолютно жестких штампов с упругой, кусочно-однородной полуплоскостью. В движущейся системе координат решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений второго рода, решение которой построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

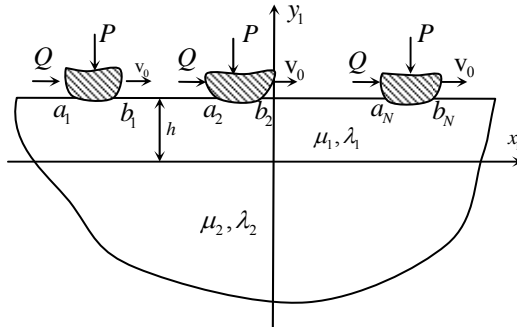
Исследованию контактного взаимодействия движущихся с постоянной скоростью абсолютно жестких штампов с упругой полуплоскостью или полосой посвящены работы [6-8]. В работе Н.Х.Арутюняна и В.М.Александрова [2] исследовано контактное взаимодействие движущегося с постоянной скоростью абсолютно жесткого штампа с упругой полуплоскостью через тонкую упругую накладку или через тонкий слой жидкости.

В настоящей работе исследована задача о контактном взаимодействии движущейся с постоянной скоростью системы абсолютно жестких штампов с упругой, кусочно-однородной полуплоскостью. В движущейся системе координат решение задачи сведено к решению системы сингулярных интегральных уравнений

второго рода, решение которой построено численно-аналитическим методом дискретных особенностей. Выявлены закономерности изменения контактных напряжений в зависимости от физико-механических и геометрических параметров.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть по границе составной полуплоскости, состоящей из бесконечной упругой полосы толщины h с коэффициентами Ламэ λ_1, μ_1 и упругой полуплоскости с коэффициентами λ_2, μ_2 , со скоростью V_0 равномерно движется система, состоящая



Фиг. 1

из N абсолютно жёстких штампов, на каждый из которых действуют нормальные нагрузки P и горизонтальные нагрузки Q (фиг. 1). Нагрузки приложены таким образом, что штампы скользят, не переворачиваясь. Будем считать, что полоса сцеплена с полуплоскостью, скорость движения штампов V_0 меньше скорости распространения поверхностных волн в составной полуплоскости, а в зонах контакта

штампов с составной полуплоскостью имеет место сухое трение, т.е. касательные напряжения, действующие под штампами, связаны с давлениями под абсолютно жёсткими штампами по закону Кулона

$$\tau_j(x) = f \sigma_j(x) \quad (j = 1, \dots, N), \quad (1.1)$$

где f – коэффициент трения.

Ставится задача: определить контактное давление под абсолютно жёсткими штампами и контактные напряжения, действующие на линии контакта полуплоскости с полосой.

В движущейся со скоростью V_0 системе координат условие контакта абсолютно жёстких штампов с полуплоскостью имеет вид

$$v_j(x) = \delta_j + g_j(x); \quad (a_j < x < b_j); \quad (j = 1, \dots, N), \quad (1.2)$$

где $v_j(x)$ – ($j = 1, N$) – нормальные смещения точек границы составной полуплоскости, δ_j – осадки штампов, а $g_j(x)$ – функции, описывающие основания штампов.

Используя результаты работы [3], для нормальных смещений точек границы составной полуплоскости можем записать следующее выражение:

$$v(x) = \frac{\vartheta_1}{2\pi\mu_1} \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \left(\ln|x-s| + K_1 \left(\frac{x-s}{h} \right) \right) \sigma_i(s) ds + \frac{\vartheta_1 \vartheta_0}{2\pi\mu_1} \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x-s) + K_2 \left(\frac{x-s}{h} \right) \right) \tau_i(s) ds. \quad (1.3)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_1 &= \frac{(1-\beta_1)\alpha_{11}}{R_1^-}; \quad \mathfrak{G}_0 = \frac{C_1^-}{(1-\beta_1)\alpha_{11}}; \\
\alpha_{ij} &= \sqrt{1-v_0^2/c_{ij}^2}; \quad \beta_j = 1-v_0^2/2c_{2j}^2; \\
c_{1j}^2 &= (\lambda_j + 2\mu_j)/\rho_j; \quad c_{2j}^2 = \mu_j/\rho_j; \quad (i, j=1, 2); \\
\alpha_{\pm} &= \alpha_{11} \pm \alpha_{21}; \quad R_i^{\pm} = \beta_i^2 \pm \alpha_{1i}\alpha_{2i}; \quad C_i^{\pm} = \beta_i \pm \alpha_{1i}\alpha_{2i}; \quad H_i^{\pm} = 1 \pm \alpha_{1i}\alpha_{2i}; \\
\Delta(k) &= \mu^2 R_2^- + R_1^- (d_1^- (\operatorname{ch} \alpha_+ k - 1) + d_2^+ \operatorname{sh} \alpha_+ k) + \\
&\quad + R_1^+ (d_1^+ (\operatorname{ch} \alpha_- k - 1) + d_2^- \operatorname{sh} \alpha_- k); \\
F(k) &= R_1^- (d_2^+ - d_1^-) \exp(-\alpha_+ k) + (R_1^- d_2^- - R_1^+ d_1^+) \operatorname{ch} \alpha_- k + \\
&\quad + (R_1^- d_1^+ - R_1^+ d_2^-) \operatorname{sh} \alpha_- k + \mu^2 R_2^- - R_1^- d_1^- - R_1^+ d_1^+; \\
G(k) &= \left(R_1^- \frac{C_1^+}{C_1^-} - R_1^+ \right) (d_1^+ (\operatorname{ch} k \alpha_- - 1) + d_2^- \operatorname{sh} k \alpha_-) + \mu \left(R_1^- \frac{C_2^-}{C_1^-} - \mu R_2^- \right); \\
d_1^{\pm} &= \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{21}(1-\beta_1)^2} (R_1^{\pm} H_2^- - 2\mu C_1^{\pm} C_2^- + \mu^2 H_1^{\pm} R_2^-); \\
d_2^{\pm} &= \frac{1}{2} \rho \begin{pmatrix} \alpha_{12} \pm \alpha_{22} \\ \alpha_{11} \quad \alpha_{21} \end{pmatrix}; \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad c = \frac{c_{22}^2}{c_{21}^2} = \frac{\mu}{\rho}; \\
K_1(x) &= \int_0^{\infty} \frac{F(k)}{\Delta(k)k} \cos kx \, dk, \quad K_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{G(k)}{\Delta(k)k} \sin kx \, dk.
\end{aligned}$$

Подставляя значения $v(x)$ из (1.3) в условия контакта (1.2), дифференцируя по x и учитывая соотношения (1.2), получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\begin{aligned}
f \mathfrak{G}_0 \frac{\sigma_j(x)}{\mu_1} + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{s-x} \frac{\sigma_i(s)}{\mu_1} ds + \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{h} K\left(\frac{s-x}{h}\right) \frac{\sigma_i(s)}{\mu_1} ds = \frac{g'_j(x)}{\mathfrak{G}_1} \quad (1.4) \\
(a_j < x < b_j; \quad j=1, \dots, N),
\end{aligned}$$

где

$$K(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{F(s)}{\Delta(s)} \sin sx \, ds + f \mathfrak{G}_0 \int_0^{\infty} \frac{G(s)}{\Delta(s)} \cos sx \, ds \right).$$

Систему уравнений (1.4) нужно рассматривать при условиях

$$\int_{a_j}^{b_j} \sigma_j(s) ds = P; \quad (j=1, \dots, N), \quad (1.5)$$

которые описывают равновесие каждого из штампов в отдельности.

Отметим, что в случае, когда $v_0 = 0$, а материалы полосы и полуплоскости одинаковые, т.е. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_*$, $v_1 = v_2 = v$, уравнение (1.4) переходит в известное

уравнение контакта штампов с полуплоскостью с учётом сил трения [6]

$$-f \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \sigma_j(x) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{s-x} \sigma_i(s) ds = \frac{\mu_*}{(1+\nu)} g'_j(x).$$

Систему сингулярных интегральных уравнений (1.4) можно решать различными методами. В частности, методом ортогональных многочленов Якоби её можно свести к решению квазивполне регулярной системы бесконечных алгебраических уравнений [1,4]. Однако, численная реализация этих систем связана со значительными вычислительными трудностями. Исходя из этого, систему (1.4) будем решать численно-аналитическим методом дискретных особенностей [7], который, на наш взгляд, значительно облегчает и ускоряет численную реализацию полученных уравнений.

Чтобы использовать метод дискретных особенностей, при помощи замены переменных

$$x = d_j + l_j t; \quad s = d_j + l_j \tau; \quad \left(d_j = \frac{b_j + a_j}{2}; l_j = \frac{b_j - a_j}{2}; \right) \quad s, x \in (a_j, b_j), \\ (j = 1, \dots, N)$$

систему интегральных уравнений (1.4) сформулируем на интервале (-1,1) и введём обозначения

$$\sigma_j^*(t) = \frac{1}{\mu_1} \sigma_j(d_j + l_j t); \quad g_j^*(t) = \frac{g'_j(d_j + l_j t)}{\vartheta_1}; \quad p_j^* = \frac{P}{l_j \mu_1}; \\ K_{ij}^*(\tau, t) = \frac{l_j}{h} K \left(\frac{l_j}{h} (\tau - l_j/l_i t + (d_i - d_j)/l_i) \right); \quad (i, j = 1, \dots, N).$$

Получим систему

$$f \vartheta_0 \sigma_j^*(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_j^*(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1, i \neq j}^N \int_{-1}^1 \frac{\sigma_i^*(\tau)}{\tau - l_j/l_i t + (d_i - d_j)/l_i} d\tau + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 K_{ij}^*(\tau, t) \sigma_i^*(\tau) d\tau = g_j^*(t). \quad (1.6)$$

Условия равновесия штампов при этом принимают вид

$$\int_{-1}^1 \sigma_j^*(\tau) d\tau = p_j^*.$$

Используя известные результаты Н.И.Мухелишвили [5] о поведении сингулярного интеграла у концов отрезка интегрирования, решение уравнения (1.6) представим в виде

$$\sigma_j^*(t) = (1-t)^{\alpha_j} (1+t)^{\beta_j} \varphi_j(t) = \omega_j(t) \varphi_j(t), \quad (1.7)$$

где α_j и β_j – те решения уравнений

$$\text{ctg}(\alpha_j \pi) + f \vartheta_0 = 0; \quad -\text{ctg}(\beta_j \pi) + f \vartheta_0 = 0; \quad 0 < |\alpha_j|, |\beta_j| < 1,$$

которые обеспечивают надлежащее поведение искомых функций в точках ± 1 . В частности, в случае, когда во всех концевых точках искомые функции не

ограничены, α_j и β_j будут даваться формулами

$$\alpha_j = \alpha = -\frac{1}{2} + \gamma; \quad \beta_j = \beta = -\frac{1}{2} + \gamma; \quad \gamma = \frac{1}{\pi} \arctg(f \vartheta_0).$$

Неизвестные функции $\varphi_j(t)$ заменим интерполяционными многочленами $\Phi_{nj}(t)$, определяемыми формулой

$$\Phi_{nj}(t) = \sum_{m=1}^n \frac{\Phi_{mj}^* P_n^{(\alpha_j, \beta_j)}(t)}{(t - \tau_m) P_n^{(\alpha_j, \beta_j)}(\tau_m)}, \quad (1.8)$$

где $\Phi_{mj}^* = \Phi_{nj}(\tau_m^j)$; $\{\tau_m^j\}_{m=1}^n$ – корни многочлена $P_n^{(\alpha_j, \beta_j)}(t)$. Подставляя представление функции $\sigma^*(t)$ из (1.7) в (1.6) и в условие равновесия штампов,

придём к системе $\sum_{j=1}^N n - \kappa_j + 1$; ($\kappa_j = -\alpha_j - \beta_j$) алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \Phi_{mi}^* \chi_m^i \left(\frac{1}{\tau_m^i - l_j / l_i t_k^j + (d_i - d_j) / l_i} + \pi K_{ij}^*(\tau_m^i, t_k^j) \right) = g_j^*(t_k), \quad (1.9)$$

$$\sum_{m=1}^n \Phi_{mj}^* \chi_m^j = p_j^*. \quad (1.10)$$

Здесь ($j = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, n - \kappa_j$)

$$\chi_m^j = -\frac{1}{2^{\kappa_j} \sin \pi \alpha_j} \frac{P_{n-\kappa_j}^{(-\alpha_j, -\beta_j)}(\tau_m)}{P_n^{(\alpha_j, \beta_j)}(\tau_m)},$$

а $\{t_k^j\}_{k=1}^{n-\kappa_j}$ – корни многочлена $P_{n-\kappa_j}^{(-\alpha_j, -\beta_j)}(t)$.

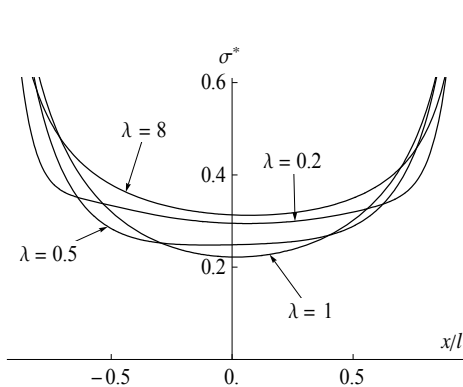
2. Численное решение некоторых частных случаев поставленной задачи

Сначала рассмотрим случай одного штампа с плоским основанием. В этом случае уравнения (1.9) и (1.10) принимают вид

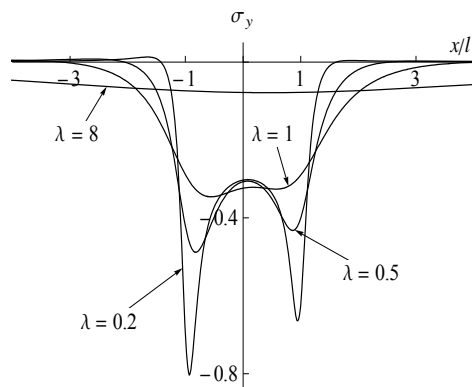
$$\sum_{m=1}^n \Phi_m \chi_m \left(\frac{1}{\tau_m - t_k} + \pi K^*(\tau_m - t_k) \right) = g^*(t_k), \quad (2.1)$$

$$\sum_{m=1}^n \Phi_m \chi_m = p^*; \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.2)$$

Не нарушая общности, в уравнениях (2.1) – (2.2) приняв $p^* = 1$, проведён численный анализ и выявлены закономерности изменения напряжений, действующих как на линии стыка полосы с полуплоскостью, так и в зоне контакта штампа с полосой, в зависимости от геометрических и механических характеристик рассматриваемой задачи, а также от скорости движения штампа. Результаты вычислений приведены в виде графиков (фиг.2-5).

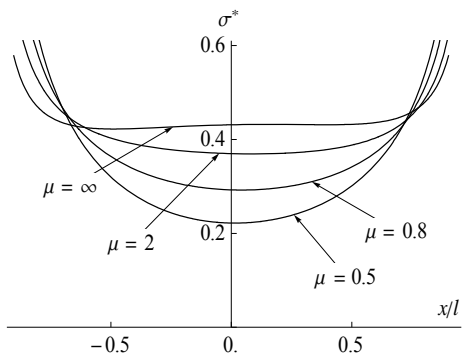


Фиг.2а

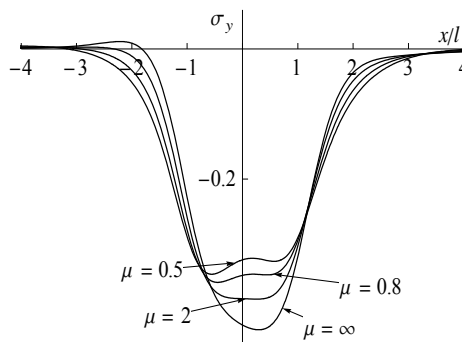


Фиг.2б

На фигурах 2а и 2б приведены графики контактных давлений, действующих под штампом и в зоне стыка полосы с полуплоскостью, соответственно, при различных значениях параметра $\lambda = h/l$, в случае, когда $\mu = 0.5$; $\rho = 1$; $v_0 = 0.4c_{21}$; $v_1 = v_2 = 0.3$; $f = 0.27$. Они показывают, что при увеличении параметра λ уменьшается влияние механических характеристик полуплоскости на распределение давления под штампом и при $\lambda > 25$ имеет место практическое совпадение с распределением контактных давлений в случае однородной полуплоскости (разность составляет менее 0,6%). На линии стыка полосы с полуплоскостью при увеличении параметра λ давления в зоне, расположенной под штампами, уменьшаются.



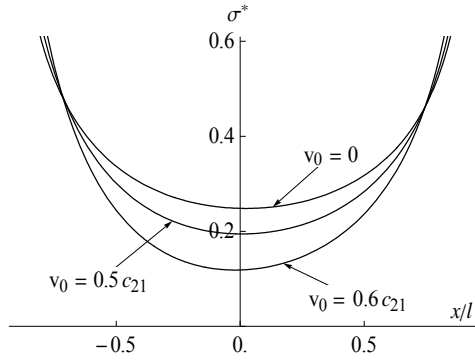
Фиг.3а



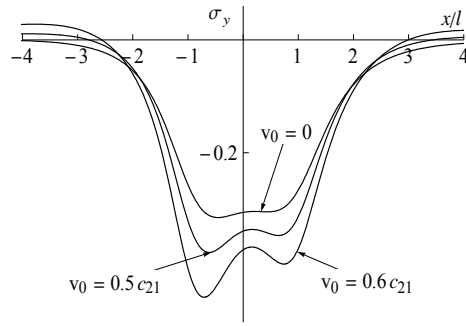
Фиг.3б

Расчеты показывают, что с увеличением отношения ρ плотностей полосы и полуплоскости давление в центре контактной зоны под штампом уменьшается, а коэффициенты концентрации напряжений увеличиваются, но изменения давления под штампом проявляются только при приближении скорости движения штампов V_0 к скорости распространения поверхностных волн и находятся в пределах 6-8%. Указанные особенности сохраняются и при других значениях μ , а в предельных случаях $\mu \rightarrow 0, \infty$, и $v_0 = 0$ все указанные величины не зависят от ρ . На фигурах 3а и 3б приведены графики контактного давления, действующего под штампом и контактных напряжений в зоне стыка полосы с полуплоскостью, соответственно, при различных значениях параметра μ , в случае, когда $\rho = 1$; $v_0 = 0.4c_{21}$;

$\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\lambda = 1$; $f = 0.27$, из которых видно, что с увеличением μ давление в центре контактной зоны под штампом увеличивается, а коэффициенты концентрации напряжений уменьшаются.

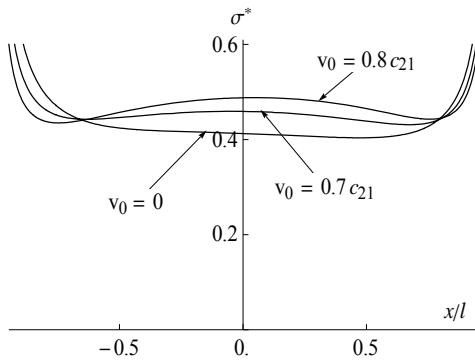


Фиг.4а

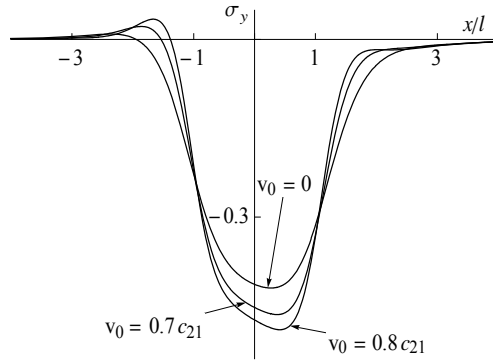


Фиг.4б

В зависимости от отношения модулей сдвига полосы и полуплоскости μ изменяется характер зависимости контактных напряжений от скорости движения штампа. Так, при больших μ с увеличением v_0 давление в центре контактной зоны под штампом увеличивается (фиг. 4: $\mu = \infty$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\lambda = 1$; $f = 0.27$), а при малых μ уменьшается (фиг. 5: $\mu = 0.5$; $\rho = 1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $\lambda = 1$; $f = 0.27$).



Фиг.5а



Фиг.5б

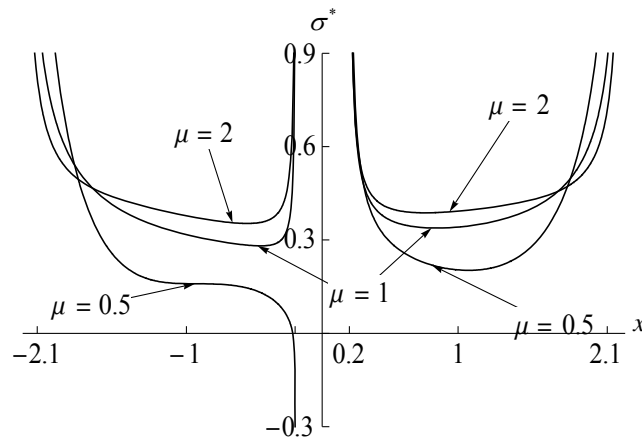
Для значений μ , близких к единице, зависимость контактных давлений от скорости движения штампа незначительна и проявляется только при скоростях, близких к фазовой скорости поверхностных волн.

Проведены также вычисления для случая двух одинаковых штампов с плоским основанием. В этом случае уравнения (1.9) и (1.10) принимают вид

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^n \varphi_n^i(\tau_m) \chi_m \left(\frac{1}{\tau_m - t_k + (d_i - d_j)/l} + \pi K_{ij}^*(\tau_m, t_k) \right) = 0;$$

$$\sum_{m=1}^n \varphi_n^i(t_m) \chi_m = p_i^* \quad (i=1,2); \quad (k=1, n-1).$$

На фиг. 6 приведены результаты для случая, когда $v_0 = 0.6c_{21}$; $\rho = 1$; $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$; $f = 0.3$; $l = h$; $d = 1.2l$. Они показывают, что, когда полоса жестче полуплоскости, в передней части следящего штампа возникает зона отрицательных напряжений, что может привести к отрыву штампа от основания.



Фиг.6

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян В.Н. Напряжённо-деформированное состояние составного клина, усиленного жёстким включением. /В сб.: Механика деформируемого твёрдого тела. Ереван: Изд. АН Арм ССР, 1993. С.63-78.
2. Александров В.М., Арутюнян Н.Х. Взаимодействие движущегося упругого штампа с упругой полуплоскостью через накладку или тонкий слой идеальной жидкости. // ПММ. 1978. Т.42. Вып. 3. С.475-485.
3. Амирджанян А.А. О равномерном движении силовых нагрузок по границе кусочно-однородной полуплоскости. /В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Ереван. 2007. С.54-58.
4. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скреплёнными упругими накладками. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1972. Т.25. №2. С.15-35.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510 с.
6. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 296 с.
7. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавливании движущегося штампа в упругую полуплоскость с учётом тепловыделения. //ПММ. 1982. Т.46. Вып.3. С.494-501.
8. Саакян А. В. О вдавливании пары равномерно движущихся штампов в упругую полосу. /В кн.: Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М.: Наука, 1985. С.217-221.

