ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №2, 2009 Механика

УДК 519.6

ОЦЕНКА РАССТОЯНИЯ ЛОМАНОЙ ЭЙЛЕРА ОТ СТАБИЛЬНОГО МНОЖЕСТВА

Габриелян М. С.

Ключевые слова: ломаная Эйлера, экстремальная стратегия, стабильный мост.
Keywords: Euler`s Broken Line, extremal strategy, stable bridge.

Մ.Ս. Գաբրիելյան
Էյլերի բեկյալի հեռավորության գնահատականը ստաբիլ բազմությունից
Որոշված է բավականին ճիշտ գնահատական՝ էքստրեմալ ստրատեգիայով կառուցված Էյլերի բեկյալի և համապատասխան մաքսիմալ ստաբիլ բազմության հեռավորության միջև, ցանկացած վերջավոր ժամանակահատվածի համար:

M.S.Gabrielyan
Estimation of Distance of Euler`s Broken Line From Constant Multitude
The sharp estimation of distance of Euler`s broken line which is built by extremal strategy relative to maximal stable bridge for any terminal time interval is determined.

Определяется достаточно точная оценка расстояния ломаной Эйлера, построенной экстремальной стратегией относительно максимального стабильного моста для любого конечного промежутка времени

Движение конфликтно-управляемой системы определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^{(1)}[t] = f\left(t, x^{(1)}[t], u^*, v[t]\right) \text{ при } x^{(1)}[t_*] = x_*^{(1)} . \qquad (1)$$

Пусть функция $x^{(2)}(t)$ является решением уравнения в контингенциях

$$\dot{x}^{(2)}(t) \in co\left[f : f(t,x,u,v) \quad u \in P, \ v = v^*\right] \quad \text{при} \quad x^{(2)}(t_*) = x_*^{(2)} .$$

Известно, что правую часть этой системы можно записать в виде (1) [1, с.56]

$$\dot{x}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} f\left(t, x^{(2)}(t), u_k, v^*\right),$$

где $\alpha_k^{(t)} \geq 0$; $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^{(t)} = 1$.

Векторы u^* и v^* определяются из следующих условий:

$$\max_{v \in Q} \left(x_*^{(1)} - x_*^{(2)}\right)' f\left(t_*, x_*^{(1)}, u^*, v\right) = \min_{u \in p} \max_{v \in Q} \left(x_*^{(1)} - x_*^{(2)}\right)' f\left(t_*, x_*^{(1)}, u, v\right)$$

$$\min_{u \in P} \left(x_*^{(1)} - x_*^{(2)}\right)' f\left(t_*, x_*^{(1)}, u, v^*\right) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \left(x_*^{(1)} - x_*^{(2)}\right)' f\left(t_*, x_*^{(1)}, u, v\right)$$

Обозначим

$$\rho(t) = \left\| x^{(2)}(t) - x^{(1)}[t] \right\| ;$$

$$\rho(t_*)=\left\| x^{(2)}\,(t_*)-x^{(1)}[t_*]\right\|=\left\| x_*^{(2)}-x_*^{(1)}\right\| .$$

Оценим следующую величину:

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt}=2\left[\dot{x}^{(2)}(t)-\dot{x}^{(1)}[t]\right]'\left[x^{(2)}(t)-x^{(1)}[t]\right]=2\left[x^{(2)}(t)-x^{(1)}[t]\right]'\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left[f\left(t,\,x^{(2)}(t),\,u_k,v^*\right)-f\left(t,\,x^{(1)}[t],\,u^*,v[t]\right)\right]\right\}=2\left[x^{(2)}(t)-x^{(1)}[t]\right]\times'$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left[\begin{array}{l}f\left(t,\,x^{(2)}(t),\,u_k,v^*\right)-f\left(t,\,x^{(1)}[t],\,u_k,v^*\right)+\\+f\left(t,\,x^{(1)}[t],\,u_k,v^*\right)-f\left(t,x^{(1)}[t],\,u^*,v[t]\right)\end{array}\right]\right\}=$$

$$=2\left[x^{(2)}(t)-x^{(1)}[t]\right]'\times\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left[f\left(t,x^{(2)}(t),u_k,v^*\right)-f\left(t,\,x^{(1)}[t],\,u_k,v^*\right)\right]\right\}+$$

$$+2\left[x^{(2)}(t)-x^{(1)}[t]\right]'\times\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left[f\left(t,x^{(2)}(t),u_k,v^*\right)-f\left(t,\,x^{(1)}[t],\,u_k,v^*\right)\right]\right\}+$$

$$+2\left[x^{(2)}(t)-x^{(1)}[t]\right]'\times\left\{\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left[f\left(t,\,x^{(1)}[t],\,u_k,v^*\right)-f\left(t,x^{(1)}[t],\,u^*,v[t]\right)\right]\right\}\leq$$

$$\leq 2\lambda\rho^2(t)+2\left[\left(x_*^{(2)}-x_*^{(1)}\right)+\psi(t-t_*)\right]'\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left[f\left(t_*,\,x_*^{(1)},\,u_k,v^*\right)-f\left(t,x_*^{(1)},\,u^*,v[t]\right)+\psi_1(t-t_*)\right]\cdot$$

Здесь $\psi\to 0,\ \psi_1\to 0$ при $t\to t_*,\ \lambda>0$ – постоянная Липшица системы (1).

Из определения векторов u^* и v^* следует следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\times\left(x_*^{(2)}-x_*^{(1)}\right)'\times\left[f\left(t_*,\,x_*^{(1)},\,u_k,v^*\right)-f\left(t_*,\,x_*^{(1)},\,u^*,v[t]\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left(x_*^{(1)}-x_*^{(2)}\right)'\times\left[f\left(t_*,\,x_*^{(1)},\,u_k,v^*\right)-f\left(t_*,x_*^{(1)},\,u^*,v[t]\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left(x_*^{(1)}-x_*^{(2)}\right)'\times\left[f\left(t_*,\,x_*^{(1)},\,u^*,v[t]\right)-f\left(t_*,x_*^{(1)},\,u^*,v^*\right)\right]-$$

$$-\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_k^{(t)}\left(x_*^{(1)}-x_*^{(2)}\right)'\times\left[f\left(t_*,\,x_*^{(1)},\,u_k,v^*\right)-f\left(t_*,x_*^{(1)},\,u^*,v^*\right)\right]\leq 0$$

Таким образом, получаем неравенство:

$$\frac{d}{dt}\rho^2(t)\leq 2\lambda\rho^2(t)+\psi(t-t_*)A+\psi_1(t-t_*)B=2\lambda\rho^2(t)+\tilde{\varphi}(t-t_*)$$

(причем $\tilde{\varphi}(t-t_*)\to 0$ при $t\to t_*$). Интегрируя полученное неравенство положительной ориентацией, получаем неравенство:

$$\rho^2(t)\leq e^{2\lambda(t-t_*)}\times\rho^2(t_*)+\varphi(t-t_*)\frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda(t-t_*)}-1\right).$$

Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{k+1}$ – ограниченные числа. Тогда используя полученное неравенство, получим:

$$\rho^2(t_* + \Delta_1) \le \rho^2(t_*) e^{2\lambda\Delta_1} + \varphi_1(\Delta_1) \frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda\Delta_1} - 1\right)$$

$$\rho^2(t_* + \Delta_1 + \Delta_2) \le \rho^2(t_* + \Delta_1) e^{2\lambda\Delta_2} + \varphi_2(\Delta_2) \times \frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda\Delta_2} - 1\right) \le$$

$$\le \rho^2(t_*) e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} + \varphi_1(\Delta_1) \times \frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} - e^{2\lambda\Delta_2}\right) +$$

$$+ \varphi_2(\Delta_2) \frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda\Delta_2} - 1\right) \le \rho^2(t_*) e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} + \overline{\varphi}(\Delta) \frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda(\Delta_1 + \Delta_2)} - 1\right)$$

Здесь $\overline{\varphi}(\Delta) = \max\left(\varphi_1(\Delta_1), \varphi_2(\Delta_2)\right)$; $\quad \Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$.

Продолжая такую итерацию, получим:

$$\varepsilon^2 \le \rho^2(t_*) e^{2\lambda\sum_{i=1}^{k+1}\Delta_i} + \overline{\varphi}(\Delta) \frac{1}{2\lambda}\left(e^{2\lambda\sum_{i=1}^{k+1}\Delta_i} - 1\right), \text{ где}$$

$$\Delta = \max(\Delta_1, \cdots, \Delta_{k+1});$$

$$\overline{\varphi}(\Delta) = \max\left(\varphi_1(\Delta_1), \cdots, \varphi_{k+1}(\Delta_{k+1})\right)$$

Из полученной формулы следует, что расстояние ломаной Эйлера от стабильного множества стремится к нулю, если

$$\rho(t_*) \to 0 \quad \text{и} \quad \overline{\varphi}(\Delta) \to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
15. 09. 2008