

УДК 532.529.6: 536.246

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ ПУЛЬСАЦИИ ТЕРМИЧЕСКИ
РЕЛАКСИРУЮЩЕГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ
В НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Оганян Г.Г.

Ключевые слова: пузырьрек, жидкость, межфазный теплообмен, нелинейность, пульсации.

Key words: bubble, liquid, interphase heat transfer, nonlinearity, oscillations.

Գ.Գ. Օհանյան

Անստեղծելի մածուցիկ հեղուկում ջերմառելարազովող գնդաձև գազային պղպջակի
նշ գծային հարկադիր զարկումները

Միջփուլային ջերմափոխանակության դեպքում դիտարկված է մենակյաց պղպջակի հարկադիր զարկումների վարքը: Ցույց է տրված, որ երբ հարկադիր ուժի մեծությունը գերազանցում է կրիտիկականին՝ նշ գծայնության ազդեցությունը հանգեցնում է հաստատված զարկումների ամպլիտուդայի թռիչքաձև փոփոխությանը: Այդ երևույթի իրականացումն բացատրվում է նրանով, որ հարկադիր հաճախությունների որոշակի արժեքների դեպքում հեղուկ-պղպջակ համակարգի հավասարակշռված կայուն վիճակը անցում է կատարում մեկ այլ հավասարակշռված կայուն վիճակի:

G.G. Oganyan

The nonlinear forced pulsation of thermally relaxing gas bubble of spherical form
in a noncompressible viscous liquid

The influence of nonlinearity on forced pulsations of bubble is investigated. The account of nonlinearity is bring to variations of amplitudes of steady pulsations for stabilities states of equilibrium of system fluid– bubble and for values of forced force more than critical. Such phenomenon is realized in some values of forced frequencies, when system transmits from one state of equilibrium to another, also stable.

Исследован квазиadiaбатический режим вынужденных осцилляций пузырька при наличии межфазного теплообмена между ними и жидкостью. Показано, что в случае мелкого пузырька эффекты вязкости и теплообмена могут быть одного порядка малости, в то время как для крупного межфазный теплообмен является доминирующим в общем механизме диссипации. При наличии в жидкости источника возбуждения гармонических колебаний в системе жидкость–пузырек возможна реализация явлений резонанса. В случае главного резонанса, возникающего на вынуждающей частоте, равной собственной частоте пузырька, в термодинамической системе может реализоваться равновесное состояние, в которой пульсации являются установившимися. Показано, что при значениях вынуждающей силы, большей критической, для состояний устойчивого равновесия учет нелинейности приводит к явлениям скачка и срыва амплитуд установившихся пульсаций, когда при определенных вынуждающих частотах происходит скачкообразное изменение их значений. При таких значениях вынуждающих частот происходит переход системы от одного состояния устойчивого равновесия к другому, также устойчивому.

В реальной системе жидкость–газ пузырьковой структуры имеет место необратимый межфазный теплообмен. Тепловое и динамическое взаимодействия одиночного газового пузырька с безграничной несжимаемой жидкостью как в линейной, так и в нелинейной постановках исследованы многими авторами, в частности, в [1-5]. Влияние малых несферических колебаний системы на радиальные пульсации пузырька изучено в [6]. Линейная задача об установившихся вынужденных малых пульсациях в акустическом поле рассмотрена в [1].

1. Исходные уравнения. Пусть в безграничной вязкой несжимаемой жидкости находится одиночный сферически симметричный пузырек с постоянной массой

калорически совершенного газа. Полагается, что между пузырьком и жидкостью происходит теплообмен, который проявляется, в основном, через процесс необратимого межфазного взаимодействия. Свободные осцилляции такого пузырька в нелинейной постановке исследованы в [5], а вынужденные будут описываться уравнением

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega_{ar}^2 R + 2\delta^* \frac{dR}{dt} - \varepsilon \frac{3n+1}{2} \omega_{ar}^2 R^2 + \varepsilon R \frac{d^2 R}{dt^2} + \varepsilon \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_{ar}^2}{3\gamma} p_1 \right] = \\ & = -\frac{1}{t_T} \left[\frac{d^2 R}{dt^2} + \omega_{ir}^2 R + 2\delta^* \frac{dR}{dt} - \varepsilon (n+1) \omega_{ir}^2 R^2 + \varepsilon R \frac{d^2 R}{dt^2} + \varepsilon \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 + \frac{\omega_{ir}^2}{3} p_1 \right] \\ & t_T = \frac{2}{3\gamma} \frac{R_0^2}{\lambda_2 \text{Nu}}, \quad \omega_{ar}^2 = \gamma \omega_{ir}^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_1} \frac{1}{R_0^2}, \quad \delta^* = \frac{2\mu}{\rho_1} \frac{1}{R_0^2}, \quad 1 \leq n \leq \gamma. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь t – время, R – безразмерный возмущенный радиус пузырька, λ_2 и n , γ – температуропроводность, и, соответственно, показатели политропы и адиабаты газа, p – давление, μ и ρ_1 – динамическая вязкость и плотность жидкости, Nu – безразмерное число Нуссельта, характеризующее интенсивность межфазного теплообмена, ω_{ar} – резонансная частота Миннаерта, ε – безразмерный малый параметр, характеризующий отклонение возмущенного радиуса от своего значения в состоянии термодинамического равновесия (покоя). Индекс «0» отнесён к исходному состоянию покоя, t_T – время тепловой релаксации, p_1 – безразмерная сила, приложенная вдали от пузырька к жидкости.

При адиабатическом режиме ($n = \gamma$) пульсаций восстановление термодинамического равновесия длится бесконечно долго в сравнении с макроскопическим, например, периодом свободных пульсаций пузырька $t = 2\pi/\omega_{ar}$, т.е. $t_T \gg t$ ($\text{Nu} \rightarrow 0$) и тогда для рассмотрения следует оставить лишь левую часть уравнения (1.1). При изотермическом режиме ($n = 1$) восстановление термодинамического равновесия происходит мгновенно, т.е. $t_T \ll t$ ($\text{Nu} \rightarrow \infty$) и в (1.1) необходимо рассматривать только его правую часть. В обоих предельных режимах можно пренебречь эффектом межфазного теплообмена ввиду его практического отсутствия.

Квазиадиабатический режим. Положим $n = \gamma$, $t_T > t$, $\text{Nu} \neq 0$, т.е. предполагается, что в рассматриваемой системе жидкость–пузырек происходит необратимый межфазный теплообмен, пусть малой интенсивности. Для оценки порядков величин диссипативных слагаемых в (1.1) уравнение следует представить в безразмерной форме, что достигается введением переменной $t' = \omega_{ar} t$. Выясняется,

что в силу требования слабого затухания пульсаций за счет вязкости и теплообмена при мелком пузырьке влияние каждого эффекта на формирование общего механизма диссипации может быть одного порядка малости, а их совместное воздействие на величину приведенной собственной частоты пульсаций пренебрежимо мало:

$$\frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \sim \varepsilon, \quad R_0 \sim \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{4}{3\gamma}} \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0} \frac{\mu}{\rho_1}}. \quad (1.2)$$

Примем, что вдали от пузырька в жидкости имеется источник возбуждения гармонических колебаний с заданными частотой ω и амплитудой F , так что $p_1 = 3\gamma F \cos \omega t$. Тогда из (1.1) следует нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{R} + \omega_{ar}^2 \dot{R} + \varepsilon 2\delta \ddot{R} - \varepsilon 2\alpha R \dot{R} + \varepsilon 4\dot{R} \ddot{R} + \varepsilon R \ddot{R} + \varepsilon \frac{1}{\gamma} \frac{\omega_{ar}^2}{t_T} R - \varepsilon^2 \frac{\gamma+1}{\gamma} \frac{\omega_{ar}^2}{t_T} R^2 + \\ + \varepsilon^2 \frac{1}{t_T} R \ddot{R} + \varepsilon^2 \frac{3}{2} \frac{1}{t_T} \dot{R}^2 = \omega_{ar}^2 \omega F \sin \omega t - \varepsilon \frac{\omega_{ar}^2}{t_T} F \cos \omega t, \\ \delta = \delta^* + \frac{1}{2} \frac{1}{t_T}, \quad \alpha = \frac{3\gamma+1}{2} \omega_{ar}^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь точки над искомой функцией R означают кратности дифференцирования по t . Решение уравнения (1.3) ищется в виде ряда:

$$R = r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \dots, \quad r_0 = a \cos \varphi, \quad \varphi = \omega_{ar} t + \beta, \quad (1.4)$$

где r_0 – решение его линейного варианта без учета вязкости, теплообмена и внешней вынуждающей силы, в котором амплитуда a и фаза β – постоянные. При вынужденных пульсациях возникают резонансные явления и посему для нахождения значений вынуждающих частот, при которых они проявляются, к уравнению (1.3) прямо применяется разложение (1.4), откуда методом последовательных приближений определяются функции r_1 и r_2 . Результаты выкладок свидетельствуют, что эти функции, наряду с секулярными членами, содержат выражения, знаменатели которых могут стать сколь угодно малыми. Отсюда находят значения резонансных частот $\omega \approx \omega_{ar}$ и $\omega \approx 2\omega_{ar}$, $\omega \approx \omega_{ar}/2$, соответствующие главному (основному) и вторичным резонансам. Построенное таким путем приближенное решение, очевидно, не является равномерно пригодным разложением функции R .

2. Главный резонанс на частоте $\omega \approx \omega_{ar}$. Его исследование будет проводиться методом Крылова-Боголюбова-Митропольского [7,8], свободным от дефекта прямого разложения. Примем, что величина внешней вынуждающей силы мала: $F \sim \varepsilon^2 f$, $f \sim 1$. Полагается, что величины a и β из (1.4) теперь являются

не постоянными, а медленно меняющимися по t функциями и потому их производные можно представить в виде разложений по степеням ε :

$$\dot{a} = \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots, \quad \dot{\beta} = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \dots, \quad \dot{\varphi} = \omega_{ar} + \dot{\beta}. \quad (2.1)$$

Здесь $A_i, \phi_i (i = 1, 2)$ – коэффициенты, определяемые в процессе построения приближенного решения. Согласно методу, в качестве новых независимых переменных принимаются a, φ и, аналогично [7,8], в рассмотрение вводятся преобразования, которые в силу (2.1) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \omega_{ar} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon \left(A_1 \frac{\partial}{\partial a} + \phi_1 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \varepsilon^2 \left(A_2 \frac{\partial}{\partial a} + \phi_2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \omega_{ar}^2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \varepsilon 2\omega_{ar} \left(A_1 \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + \phi_1 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \varepsilon^2 \left[(\phi_1^2 + 2\omega_{ar}\phi_2) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \right. \\ &+ 2(A_1\phi_1 + \omega_{ar}A_2) \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + A_1 \left(A_1 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + A_1' \frac{\partial}{\partial a} + \phi_1' \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left. \right] + \dots \\ \frac{d^3}{dt^3} &= \omega_{ar}^3 \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + \varepsilon 3\omega_{ar}^2 \left(\phi_1 \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + A_1 \frac{\partial^3}{\partial a \partial \varphi^2} \right) + \varepsilon^2 3\omega_{ar} \left[(\phi_1^2 + \omega_{ar}\phi_2) \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + \right. \\ &+ (2A_1\phi_1 + \omega_{ar}A_2) \frac{\partial^3}{\partial a \partial \varphi^2} + A_1 \left(A_1 \frac{\partial^3}{\partial a^2 \partial \varphi} + A_1' \frac{\partial^2}{\partial a \partial \varphi} + \phi_1' \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left. \right] + \dots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где штрихи над A_1, ϕ_1 означают дифференцирование по a . Подставляя разложение (1.4) в преобразованное посредством (2.2) уравнение (1.3), приравняем слагаемые при одинаковых степенях ε . В нулевом приближении придем к линейному однородному уравнению

$$\frac{\partial^3 r_0}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} = 0, \quad r_0(a, \varphi) = a \cos \varphi + r_0^*(a) \quad (2.3)$$

Функция $r_0^*(a)$ определится из требования перехода (2.3) в решение нулевого приближения, получаемого из уравнения без учета теплообмена, когда порядок уравнения (1.3) понижается на единицу. Тогда $r_0^*(a) = 0$. Из первого приближения (порядка ε) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 r_1}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} &= -\frac{\phi_1}{\omega_{ar}} \left(3 \frac{\partial^3 r_0}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} \right) - \frac{A_1}{\omega_{ar}} \left(3 \frac{\partial^3 r_0}{\partial a \partial \varphi^2} + \frac{\partial r_0}{\partial a} \right) - 2 \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \frac{\partial^2 r_0}{\partial \varphi^2} - \\ &- \frac{1}{\gamma \omega_{ar} t_T} r_0 + 2 \frac{\alpha}{\omega_{ar}^2} r_0 \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} - 4 \frac{\partial r_0}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 r_0}{\partial \varphi^2} - r_0 \frac{\partial^3 r_0}{\partial \varphi^3} \end{aligned}$$

Подстановка решения (2.3) дает

$$\frac{\partial^3 r_1}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} = -2 \frac{\phi_1}{\omega_{ar}} a \sin \varphi + \frac{2}{\omega_{ar}} \left[A_1 + \left(\delta^* + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{t_T} \right) a \right] \cos \varphi - \frac{2\alpha + 5\omega_{ar}^2}{2\omega_{ar}^2} a^2 \sin 2\varphi$$

Решение однородного уравнения будет включено в формулу (2.3) и потому не приводится. Из требования отсутствия секулярных членов в выражении решения $r_1(a, \varphi)$ определяются коэффициенты

$$\phi_1 = 0, \quad A_1 = -\omega_{ar} \delta_1 a, \quad \delta_1 = \frac{1}{\omega_{ar}} \left(\delta^* + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{t_T} \right) \quad (2.4)$$

Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$r_1 = -\frac{2\alpha + 5\omega_{ar}^2}{\omega_{ar}^2} \frac{a^2}{12} \cos 2\varphi + r_1^*(a), \quad (2.5)$$

где функция r_1^* определится ниже. Из второго (порядка ε^2) приближения выявляется уравнение, куда подставляются решения (2.3)–(2.5) и вводится в рассмотрение параметр линейной расстройки частоты $\sigma = \omega_{ar} - \omega$, так что $\omega t = \varphi - (\sigma t + \beta)$. В результате выкладок получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 r_2}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial r_2}{\partial \varphi} = & 2 \left[\frac{A_1}{\omega_{ar}} - \frac{f}{2} \sin(\sigma t + \beta) \right] \cos \varphi - 2a \left[\frac{\phi_2}{\omega_{ar}} - \frac{3\gamma(\gamma+2)}{16} a^2 + \right. \\ & \left. + \frac{3\gamma+2}{2} r_1^* + \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3 - \frac{f}{2a} \cos(\sigma t + \beta) \right] \sin \varphi - \frac{A_1}{\omega_{ar}} \left(\frac{dr_1^*}{da} + \frac{1}{\gamma} \frac{1}{t_T} \frac{r_1^*}{A_1} - \right. \\ & \left. - \frac{3\gamma}{2} a - \frac{\gamma+2}{4\gamma} \frac{1}{t_T} \frac{a^2}{A_1} \right) + 2(\gamma-1) \delta_2 a^2 \cos 2\varphi + \frac{9(\gamma+2)(\gamma+4)}{8} a^3 \sin 3\varphi, \\ \delta_2 = & \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} + \frac{2\gamma+1}{2\gamma-1} \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T}, \quad \delta_3 = \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} + \frac{\gamma+3}{2\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Отсюда, требуя отсутствие секулярного члена в решении r_2 , приходим к уравнению

$$\frac{dr_1^*}{da} - E \frac{r_1^*}{a} - \frac{3\gamma}{2} \left(1 - \frac{\gamma+2}{6\gamma} E \right) a = 0, \quad E = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \frac{1}{\delta_1},$$

общим решением которого является функция

$$r_1^* = \frac{3\gamma}{4} \left(1 + \frac{\gamma-1}{3\gamma^2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \frac{1}{\delta_4} \right) a^2, \quad \delta_4 = \frac{\delta^*}{\omega_{ar}} - \frac{2-\gamma}{2\gamma} \frac{1}{\omega_{ar} t_T}. \quad (2.7)$$

Одновременно, согласно тому же требованию и формуле (2.7), из уравнения

(2.6) определяются коэффициенты

$$\frac{A_2}{\omega_{ar}} = \frac{f}{2} \sin(\sigma t + \beta), \quad \frac{\phi_2}{\omega_{ar}} = -Ba^2 - \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3 + \frac{f}{2a} \cos(\sigma t + \beta),$$

$$B = \frac{3\gamma(5\gamma + 2)}{16} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{3\gamma + 2}{5\gamma + 2} \frac{\gamma - 1}{\gamma^2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \frac{1}{\delta_4} \right). \quad (2.8)$$

Частное решение уравнения (2.6) приводиться не будет. После подстановки формул (2.4), (2.8) в разложения (2.1) придем к неавтономной системе уравнений, которая заменой $v = \sigma t + \beta$ сведётся к автономной:

$$\frac{\dot{a}}{\omega_{ar}} = -\delta_1 a + \varepsilon \frac{F}{2} \sin v, \quad F = \varepsilon^2 f,$$

$$\frac{\dot{v}}{\omega_{ar}} = \sigma_1 - \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3 - Ba^2 + \varepsilon \frac{F}{2a} \cos v, \quad \sigma_1 = \frac{\sigma}{\omega_{ar}} = 1 - \frac{\omega}{\omega_{ar}}. \quad (2.9)$$

Здесь малый параметр ε отнесен к величинам a , δ^*/ω_{ar} и $1/(\omega_{ar} t_T)$.

3. Стационарный режим пульсаций. При фиксированных параметрах $\sigma_1, \delta_1, \delta_3$ и F численное интегрирование системы (2.9) с произвольными начальными условиями, аналогичное проведенному в [7,8], указывает, что при $t \rightarrow \infty$ $a(t) \rightarrow a_0$, $v(t) \rightarrow v_0$. Тогда в термодинамической системе жидкость-пузырек устанавливается стационарный режим пульсаций, реализуемый в состоянии равновесия, которое характеризуется параметрами a_0 и v_0

$$\delta_1 a_0 = \varepsilon \frac{F}{2} \sin v_0, \quad (Ba_0^2 - \sigma^*) a_0 = \varepsilon \frac{F}{2} \cos v_0, \quad \sigma^* = \sigma_1 - \frac{1}{2} \delta_1 \delta_3. \quad (3.1)$$

Исследуем систему (2.9) на устойчивость к малым возмущениям вблизи состояния, описываемого уравнениями (3.1).

Полагая в (2.9) $a = a_0 + a'$, $v = v_0 + v'$, где штрихи отнесены к малым возмущениям, проведем линеаризацию и в получаемой системе уравнений решения будем искать в виде

$$a'(t) = B_1 e^{\Omega t}, \quad v'(t) = B_2 e^{\Omega t}, \quad B_1, B_2, \quad \Omega = \text{const}.$$

Опуская стандартные выкладки для нахождения величины Ω , получим

$$\Omega_{1,2}/\omega_{ar} = -\delta_1 \pm K, \quad K = \sqrt{(Ba_0^2 - \sigma^*)(\sigma^* - 3Ba_0^2)}.$$

Здесь и далее индексы 1, 2 отнесены к верхнему и нижнему знакам соответственно. Отсюда определяются критерии устойчивости равновесного состояния, описываемого соотношениями (3.1):

$$\sigma^* < Ba_0^2, \quad \sigma^* > 3Ba_0^2, \quad \Omega_1/\omega_{ar} = -\delta_1 + iK \quad (3.2)$$

$$Ba_0^2 \leq \sigma^* \leq 3Ba_0^2, \quad \Sigma = \sigma^{*2} - 4Ba_0^2\sigma^* + 3B^2a_0^4 + \delta_1^2 > 0, \quad \Omega_{1,2} < 0 \quad (3.3)$$

Если же реализуются значения

$$Ba_0^2 < \sigma^* < 3Ba_0^2, \quad \Sigma < 0, \quad (3.4)$$

то $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 < 0$ и состояние равновесия системы (2.9) неустойчиво к малым возмущениям.

Из системы (3.1) можно в неявном виде получить зависимость a_0 от σ^*

$$(Ba_0^2)^3 - 2(Ba_0^2)^2\sigma^* + Ba_0^2(\sigma^{*2} + \delta_1^2) = B(\varepsilon F/2)^2, \quad (3.5)$$

называемую [7-9] амплитудно-частотной характеристикой, а ее графическое изображение – резонансной кривой. Из выражения для производной $da_0/d\sigma^*$ можно получить уравнения вертикальных касательных и определить максимальную амплитуду a_{0m}

$$\sigma_{1,2}^* = 2Ba_0^2 \pm \sqrt{B^2a_0^4 - \delta_1^2}, \quad Ba_{0m}^2 = \sigma_m^*.$$

Требование совпадения касательных $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_*^*$ и последующее комбинирование с (3.5) позволяют получить критические значения амплитуды a_{0*} , расстройки частоты σ_*^* и вынуждающей внешней силы F_*

$$F_*^2 = \frac{8}{B}\delta_1\left(\frac{\delta_1}{\varepsilon}\right)^2, \quad Ba_{0*}^2 = \delta_1, \quad \sigma_*^* = 2\delta_1, \quad Ba_{0m}^2 = 2\delta_1\left(\frac{F}{F_*}\right)^2.$$

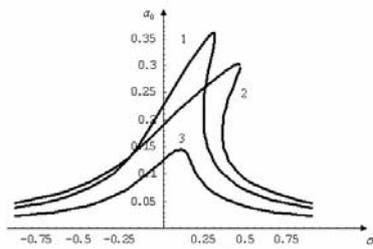
Отметим, что в отсутствие теплообмена всегда $B > 0$, в то время как при его наличии, в силу определения δ_4 из (2.7), величина B может стать отрицательной в зависимости от интенсивности (закона) теплообмена. В этом случае формула для F_* сохранит силу, если B заменить на $|B|$.

Для каждого сорта газа и размера пузырька существует присущее только им свое значение F_* . В последующих вычислениях все расчеты будут проводиться при значении $P_0 = 0.1$ МПа исходного давления.

На фиг. 1 приведены резонансные кривые, отнесенные к пульсирующему в воде мелкому воздушному пузырьку при разных значениях вынуждающей силы F .

Кривая 1 соответствует случаю отсутствия ($t_T \rightarrow \infty$) теплообмена. Кривые 2 и 3 построены при наличии теплообмена, описываемого законом

$$\delta^* = \frac{2-\gamma}{2\gamma} \frac{1}{t_T}, \quad Nu = \frac{8}{3\gamma} \frac{1}{2-\gamma} \frac{\mu}{\rho_1} \frac{1}{\lambda_2} \quad (3.6)$$



Фиг. 1. Резонансные кривые пульсирующих в воде мелких ($R_0 = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}$) воздушных пузырьков.

Кривая 1 –случай отсутствия теплообмена при $B = 2.36, F/F_* = 1.25, F_* = 0.575, \delta_1 = 0.098$.

Кривая 2 ($F = 1.25F_* = 0.89$) и 3 ($F = 0.6F_* = 0.43$) –наличие теплообмена (3.6) при $B = 4.95, \delta_1 = 0.144$.

Кривые 1 и 2, построенные при значениях $F > F_*$, характерны неоднозначностью, которая отсутствует на кривой 3, построенной при $F < F_*$. Степень искривленности кривых, приводящая к неоднозначности, обусловлена нелинейностью, количественно выражаемой через отношение F/F_* , а именно, чем больше единицы величина F/F_* , тем сильнее проявляется эффект нелинейности. Из сопоставления кривых 1 и 2 следует, что учет теплообмена уменьшает максимальное значение амплитуды a_0 , что типично при наличии не только мелкого, но и крупного пузырька. Интересно, что подобные 2 и 3 резонансные кривые приведены в [10] при исследовании стационарных колебаний вязкоупругой квадратной пластинки из винипласта.

В силу специфики рассматриваемой системы жидкость-пузырек, помимо (1.2), могут иметь место оценки

$$\frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \sim \varepsilon^3, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_{ar} t_T} \sim \varepsilon, \quad R_0 = \frac{1}{\varepsilon^m} \sqrt{\frac{4}{3\gamma}} \sqrt{\frac{\mu}{p_0} \frac{\mu}{\rho_1}}, \quad m \geq 2 \quad (3.7)$$

которые характерны для крупного пузырька. Увеличение поверхности, контактирующей с жидкостью, способствует улучшению и усилению межфазного теплообмена и потому эффектом вязкости можно пренебречь. Такой вывод согласуется с утверждением [1] о доминирующем вкладе межфазного теплообмена в формировании общего механизма диссипации смеси при наличии крупных пузырьков. В соответствии с (3.6), можно полагать, что теплообмен в них происходит по закону ($1 < M < 10$)

$$\frac{1}{\omega_{ar} t_T} = M \left(\frac{\delta^*}{\omega_{ar}} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{Nu} = M \left(\frac{4}{3\gamma} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \left(\sqrt{\frac{p_0}{\rho_1} \frac{R_0}{\lambda_2}} \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\frac{\mu}{\rho_1} \frac{1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (3.8)$$

Влияние сорта газа на изменения амплитуд пульсирующих в воде крупных

пузырьков равного радиуса при одинаковых значениях вынуждающей силы F показано на фиг. 2. Кривая 1 отнесена к пузырьку с воздухом, кривая 2 – с гелием, для которых теплообмен происходит по закону (3.8) с $M = 6$, $m = 3$. Поскольку коэффициент затухания $\delta_1 = 0.117$ гелиевых пузырьков превосходит тот же параметр воздушных $\delta_1 = 0.086$, постольку с переходом от воздуха к гелию затухание пульсации усиливается.

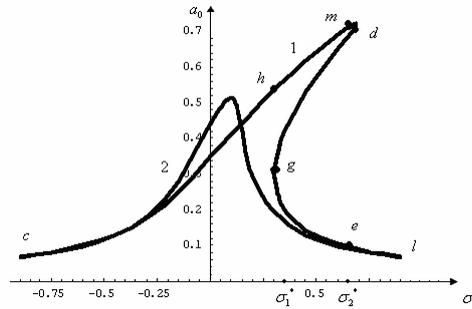
Координаты (σ_1^*, a_{0g}) и (σ_2^*, a_{0d}) точек касания вертикальных касательных с резонансной кривой вычисляются по формулам

$$(Ba_0^2)^3 \pm (Ba_0^2)^2 \sqrt{B^2 a_0^4 - \delta_1^2} = \delta_1^3 (F/F_*)^2, \quad \sigma_{1,2}^* = 2Ba_0^2 \pm \sqrt{B^2 a_0^4 - \delta_1^2} \quad (3.9)$$

При заданных значениях δ_1, F и Ba_0^2 соответствующее им значение σ^* определится из уравнения резонансной кривой (3.5), откуда получим также выражение для производной функции $a_0(\sigma^*)$

$$\sigma^* = Ba_0^2 \pm \delta_1 \sqrt{\frac{2\delta_1 F^2}{Ba_0^2 F_*^2} - 1}, \quad \frac{da_0}{d\sigma^*} = \frac{a_0 (Ba_0^2 - \sigma^*)}{\Sigma} \quad (3.10)$$

где явный вид функции Σ приведен в (3.3).



Фиг. 2. Резонансные кривые пульсирующих в воде крупных ($R_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}$) пузырьков при теплообмене

(3.8) и одинаковых значениях $F = 1.25$.

Кривая 1 – воздух при $F_* = 0.626$, $B = 1.32$, $\delta_1 = 0.086$, кривая 2 – гелий при

$F_* = 1.92$, $B = -0.374$, $\delta_1 = 0.117$.

Покажем, что с точки зрения устойчивости к различным участкам резонансной кривой (3.5) соответствуют разные состояния равновесия рассматриваемой термодинамической системы. Доказательство проведем на примере кривой 1 фиг.2, которая, как для мелкого, так и для крупного пузырька, является типичной при значениях вынуждающей силы $F/F_* > 1$.

На участке cm , где $m(\sigma_m^*, a_{om})$ – точка максимума, имеем

$$\sigma^* \leq \sigma_m^* = Ba_{0m}^2, \quad Ba_0^2 \leq Ba_{0m}^2; \quad \sigma^* \leq Ba_0^2.$$

Отсюда, в силу критерия (3.2), можно заключить, что состояния равновесий, характеризуемые координатами точек ветви cm , устойчивы к малым возмущениям. На участке md , где $d(\sigma_2^*, a_{0d})$ – точка касания, функция $a_0(\sigma^*)$ убывает и, в силу (3.9), (3.10), на этом участке имеем

$$\frac{da_0}{d\sigma^*} < 0, \quad Ba_0^2 < Ba_{0m}^2 = \sigma_m^* < \sigma^* \leq \sigma_2^* < 3Ba_0^2 < 3Ba_{0d}^2, \quad \Sigma > 0.$$

Согласно критерию (3.3), отсюда следует вывод, что состояния равновесий устойчивы. На участке dg , где $g(\sigma_1^*, a_{0g})$ – точка касания, функция $a_0(\sigma^*)$ возрастает, так что

$$\frac{da_0}{d\sigma^*} > 0, \quad \sigma_1^* < \sigma^* < \sigma_2^*, \quad \Sigma = (\sigma^* - \sigma_1^*)(\sigma^* - \sigma_2^*) < 0, \quad \sigma^* > Ba_0^2.$$

Поскольку в силу (3.9) $\sigma_2^* < 2Ba_0^2 < 3Ba_0^2$, постольку диапазон изменения σ^* предстанет в виде $Ba_0^2 < \sigma^* < 3Ba_0^2$. Тогда, согласно (3.4), можно заключить, что все состояния равновесий, описываемые координатами точек ветви dg , неустойчивы к малым возмущениям. На участке ge , где $e(\sigma_2^*, a_{0e})$ – точка пересечения вертикальной касательной с резонансной кривой, функция $a_0(\sigma^*)$ убывает, при этом, в силу (3.10), выполняются соотношения

$$\frac{da_0}{d\sigma^*} < 0, \quad \sigma_1^* < \sigma^* < \sigma_2^*, \quad \Sigma < 0, \quad \sigma^* < Ba_0^2$$

из которых последнее совпадает с критериями (3.2). Таким образом, координатам точек ветви ge соответствуют параметры состояния устойчивого равновесия. На ветви el выполняется критерий устойчивости (3.3) к малым возмущениям.

Перейдем к изучению поведения амплитуды a_0 установившихся пульсаций при перемещении по кривой 1 фиг. 2. Числовые параметры, характеризующие малые пульсации воздушного пузырька в воде при исходных данных $R_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ м, $\delta_1 = 0.086$, $B = 1.32$, $F/F_* = 2$, будут вычислены по формулам (3.9), (3.10).

Пусть первоначально частота Ω вынуждающей силы больше собственной, т.е. $\Omega > \omega_{ar}$. Перемещение по резонансной кривой вдоль положительного направления оси σ^* , в силу определения (2.9), соответствует уменьшению Ω . На ветви cd координаты любой точки являются характерными параметрами некоего состояния устойчивого равновесия, так что передвижение по ней приводит к росту амплитуды до максимального значения $a_{0m} = 0.722$ и последующему незначительному ее

уменьшению. По достижении точки касания $d(\sigma_2^* = 0.69, a_{0d} = 0.72)$ происходит скачкообразный переход в точку $e(\sigma_2^* = 0.69, a_{0e} = 0.09)$, поскольку координатам ветви dg соответствуют параметры состояния неустойчивого равновесия. Таким образом, термодинамическая система (3.1) из состояния устойчивого равновесия с параметрами (σ_2^*, a_{0d}) переходит в такое же состояние, однако, с иными (σ_2^*, a_{0e}) параметрами, вследствие чего реализуется явление сброса (срыва) амплитуды. Далее перемещение происходит по ветви el , координатам точек которой соответствуют параметры состояния устойчивого равновесия, при этом амплитуда a_0 плавно уменьшается.

Пусть теперь первоначально имеем $\omega < \omega_{ar}$ и тогда перемещение по кривой вдоль отрицательного направления оси σ^* соответствует увеличению частоты ω вынуждающей силы F . Ветвь lg соответствует состоянию устойчивого равновесия, поэтому, перемещаясь по ней, a_0 монотонно возрастает. По достижении точки $g(\sigma_1^* = 0.115, a_{0g} = 0.295)$ происходит скачкообразный переход в точку $h(\sigma_1^* = 0.115, a_{0h} = 0.54)$ ветви dc , поскольку ветвь gd соответствует состоянию неустойчивого равновесия. Так как на ветви hc координаты точек являются параметрами состояния устойчивого равновесия, то с последующим увеличением ω амплитуда a_0 уменьшается. Итак, система (3.1) из одного состояния устойчивого равновесия с параметрами (σ_1^*, a_{0g}) переходит в другое, также устойчивое, но с другими параметрами (σ_1^*, a_{0h}) и вследствие такого перехода реализуется явление скачка амплитуды. При последующем увеличении ω (уменьшении σ^*) амплитуда a_0 монотонно убывает.

Закключение. Динамика пульсаций термически релаксирующего газового пузырька описывается уравнением третьего порядка, содержащим слагаемые с квадратичными нелинейностями, исходящими как из уравнений состояния, так и вследствие учета теплообмена, в отсутствие которого порядок уравнения понижается на единицу. Для главного резонанса в режиме установившихся пульсаций учет нелинейностей может привести к скачкообразным изменениям значений их амплитуд, что связано с переходом термодинамической системы из одного состояния устойчивого равновесия в другое, также устойчивое. Реализация явлений срыва и скачка амплитуды может иметь место лишь при воздействии внешней вынуждающей силы, большей критической, когда эффекты нелинейностей проявляются наиболее

ярко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1 М.: Наука, 1987. 360с.
2. Devin Ch. Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water // J. Acoust. Soc. Amer. 1959. V.31. №12. P.1654-1667.
3. Нигматулин Р.И., Хабеев Н.С. Декременты затухания колебаний и эффективные коэффициенты теплообмена пузырьков, радиально пульсирующих в жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. №6. С.80-87.
4. Ивченко В.М., Приходько Н.А., Сирый Б.С. Численное решение задачи охлаждения пузырька горячего газа в жидкости // Гидромеханика. Киев: Наукова Думка. 1971. №19. С.9-14
5. Оганян Г.Г. Нелинейные свободные пульсации термически релаксирующего газового пузырька сферической формы в несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №1. С.58-69.
6. Ахунова А.А., Сибгатуллин Н.Р. О несимметричных колебаниях изолированного газового пузыря // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, Механика. 2005. №3. С.29-32.
7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503с.
8. Nayfeh A.S. Introduction to Perturbation Techniques. N.Y.: etc.: Wiley. 1981. = Найфэ А. Введение в методы теории возмущений. М.: Мир, 1984. 535с.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456с.
10. Минасян М.М. Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ереван: Изд. ЕГУ, 2007. 256с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.06.2008