

УДК 539.374

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ ИЗ
ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКИ

Вермишян Г. Б.

Ключевые слова: комплексный модуль, комплексная податливость, диссипативная сила, линейная и экспоненциальная аппроксимация.

Keywords: complex modules, complex compliant, dissipative forces, linear and exponential approximation.

Գ.Բ.Վերմիշյան

Մաժուցիկ առաձգական նյութից սնամեջ զլանում ջերմության բաշխումը վիբրացիոն բեռի ազդեցության տակ

Աշխատանքում հետազոտված է մաժուցիկ առաձգական նյութից սնամեջ զլանում ջերմության բաշխումը, երբ նրա վրա ներքին և արտաքին մակերևույթների վրա կիրառված է վիբրացիոն ուժ: Խնդիրը լուծված է երկու դեպքի համար, առաջին, երբ ներքին մակերևույթը ջերմամեկուսացված է, իսկ արտաքին մակերևույթի ջերմաստիճանը հավասար է արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանին: Երկրորդ դեպքում ներքին մակերևույթը ջերմամեկուսացված է, իսկ արտաքինից տեղի է ունենում ջերմափոխանակում արտաքին միջավայրի հետ Նյուտոնի օրենքով:

G. B. Vermishyan

Distribution of temperature in a quill cylinder made of visco-elastic material under the effect of vibratory load

The distribution of temperature in a quill cylinder made of visko-elastic is examined, which inner and outer surfaces are under the effect of vibratory load.

The problem is solved in two cases. In the first case the inner surface is heat insulated, and the temperature of the outer surface is equal to the ambient temperature. In the second case the inner surface is heat-insulated, and on the outer surface a free heat transfer into the surrounding medium takes place, which is conform to the Newton's law.

В работе рассматривается распределение температуры в полом цилиндре из вязкоупругого материала, когда на внутреннем и внешнем поверхностях действует вибрационная нагрузка.

Задача решена для двух случаев. Первый случай, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней температура равна температуре окружающей среды. Во втором случае, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней происходит теплообмен с окружающей средой, подчиняющейся закону Ньютона.

Исследуется нагружение трубы из вязкоупругого материала. На трубу действует изнутри и извне распределенная нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону с постоянной амплитудой.

Для установления связи между деформациями и напряжениями, возникающими в трубе, необходимо знать составляющие комплексной податливости, которые, как известно [1], существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом за счет работы диссипативных сил происходит выделение тепла. Поэтому для определения температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментально.

Задача решена при условии, что внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней поверхности температура равна температуре окружающей среды. Кроме

того, рассматривается случай, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней поверхности происходит теплообмен с окружающей средой, подчиняющейся закону Ньютона.

Предполагается, что температура по длине не меняется.

Будем рассматривать деформацию трубы с внутренним радиусом R_1 и с внешним R_2 , которая состоит из вязкоупругого материала. На внутренней и внешней поверхностях действует распределенная нагрузка, которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой, соответственно, P_1 и P_2 .

Полагаем, что составляющие комплексной податливости J^{II} малы по сравнению с J^I . Таким образом, для определения напряженного состояния можно воспользоваться решением упругой задачи для трубы, находящейся под внутренним и внешним давлениями [2].

В данном случае компоненты напряжения будут:

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 \cos \omega t, \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \cos \omega t, \tau_{\rho\theta} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_\rho^0 = -\frac{P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_\theta^0 = -\frac{P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (1.2)$$

$$\tau_{\rho\theta}^0 = 0$$

Связь между компонентами деформации и напряжения примем в виде [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= \frac{\sigma_\rho}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t-\tau) \sigma_\rho(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_\theta}{E} - \nu \int_{-\infty}^t K(T, t-\tau) \sigma_\theta(\tau) d\tau \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_\theta}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t-\tau) \sigma_\theta(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_\rho}{E} - \nu \int_{-\infty}^t K(T, t-\tau) \sigma_\rho(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\gamma_{\rho\theta} = 0$$

Используя из (1.1) значения σ_ρ , σ_θ и вводя переменную $\zeta = t - \tau$, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= (\sigma_\rho^0 - \nu \sigma_\theta^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t - \left[\operatorname{Im} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\} \\ \varepsilon_\theta &= (\sigma_\theta^0 - \nu \sigma_\rho^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t - \left[\operatorname{Im} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введем комплексную податливость (где φ^0 – сдвиг фаз между деформацией и напряжением):

$$\begin{aligned} J^*(T, \omega) &= \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta = J^I(T, \omega) - iJ^{II}(T, \omega) = \\ &= J(T, \omega) \cos \varphi^0 - iJ(T, \omega) \sin \varphi^0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учитывая (1.5), из (1.4) получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= (\sigma_p^0 - \nu\sigma_\theta^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + J^I(T, \omega) \right] \cos \omega t + J^{II}(T, \omega) \sin \omega t \right\} \\ \varepsilon_\theta &= (\sigma_\theta^0 - \nu\sigma_p^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + J^I(T, \omega) \right] \cos \omega t + J^{II}(T, \omega) \sin \omega t \right\}\end{aligned}\quad (1.6)$$

Работа, совершаемая при вязкоупругой деформации, равна

$$W = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_p \frac{d\varepsilon_p}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_\theta \frac{d\varepsilon_\theta}{dt} dt. \quad (1.7)$$

Из (1.1), (1.6) и (1.7) получим

$$W = \pi J^{II}(T, \omega) \left[(\sigma_p^0)^2 - 2\nu\sigma_p^0\sigma_\theta^0 + (\sigma_\theta^0)^2 \right]. \quad (1.8)$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации вязкоупругого тела, позволяет определить интенсивность выделения тепла $q = \omega \lambda k W / (2\pi)$, где k – величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ – коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. Для установления максимального нагрева будем полагать $\lambda = 1$.

Для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + f(\rho; \theta) J^{II}(T, \omega) = 0 \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}f(\rho; \theta) &= \frac{2\mu}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[(1-\nu)(P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2)^2 + (1+\nu)(P_2 - P_1)^2 \frac{R_1^4 R_2^4}{\rho^4} \right], \\ \mu &= \frac{\lambda \omega k}{2a_0 c_0},\end{aligned}\quad (1.10)$$

где a_0 – коэффициент температуропроводности, c_0 – теплоемкость.

Имея в виду, что труба более интенсивно нагревается вблизи внутренней поверхности, принимаем, что интенсивность выделения тепла принимает свое максимальное значение при $\rho = R_1$. Тогда получим верхнюю оценку температуры. Считаем, что интенсивность выделения тепла явно не зависит от радиуса ρ . При данных предположениях для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \mu f(r) J^{II}(T, \omega) = 0 \quad (1.11)$$

$$f(r) = \frac{2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[(1-\nu)(P_2 R_2^2 - P_1 R_1^2)^2 + (1+\nu)(P_2 - P_1)^2 R_2^4 \right] \quad (1.12)$$

$$J^{II}(T, \omega) = \frac{E^{II}(T, \omega)}{[E^I(T, \omega)]^2 + [E^{II}(T, \omega)]^2} \quad (1.13)$$

Известно [1], что $E^{II}(T, \omega) \ll E^I(T, \omega)$, а величиной $E^{II}(T, \omega)$ по сравнению с $E^I(T, \omega)$ можно пренебречь. Для компонентов комплексного модуля воспользуемся экспоненциальной аппроксимацией [4]:

$$E^I(T, \omega) = A e^{-BT}, \quad E^{II}(T, \omega) = C e^{DT}, \quad (1.14)$$

где A, B, C, D – физические постоянные. С учетом (1.13), (1.14) уравнение (1.11) примет вид:

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{\gamma C}{A^2} e^{\gamma T} = 0 \quad (1.15)$$

$(\gamma = 2B + D)$

Граничные условия при температуре T будут следующими (внутренняя поверхность теплоизолирована):

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} = 0, \quad \left. T \right|_{r=R_2} = T_0 \quad (1.16)$$

После введения новой переменной уравнение (1.15) примет вид:

$$\frac{d^2\tau}{d\rho^2} + a e^{\tau} = 0, \quad \gamma T + 2\rho = \tau, \quad r = e^{\rho} \quad (1.17)$$

где

$$a = \frac{\gamma \omega \lambda k C}{2a_0 c_0 A^2} P_1^2 f_0, \quad \frac{R_2}{R_1} = b, \quad \frac{P_2}{P_1} = \varepsilon \quad (1.18)$$

$$f_0 = \frac{2}{(b^2 - 1)^2} \left[(1 - \nu)(\varepsilon b^2 - 1)^2 + (1 + \nu)(\varepsilon - 1)^2 b^4 \right]$$

Представим способ нахождения общего решения уравнения (1.17):

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) + a \frac{d\tau}{d\rho} e^{\tau} = 0,$$

$$d \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) + a \frac{d\rho}{d\tau} d e^{\tau} = 0,$$

$$\left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) d \left(\frac{d\tau}{d\rho} \right) = -a d e^{\tau}.$$

После интегрирования получим:

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \pm \sqrt{2c_1 - 2a e^{\tau}} \quad (1.19)$$

Из постановки задачи следует, что $\frac{d\tau}{d\rho} < 0$, поэтому возьмем отрицательный корень.

После интегрирования уравнения (1.19) получим общее решение уравнения (1.17) в виде:

$$\ln \frac{1 - \sqrt{1 - a e^{\tau} / c_1}}{1 + \sqrt{1 - a e^{\tau} / c_1}} = -\sqrt{2c_1} \rho + \ln c_2$$

или

$$e^\tau = \frac{4c_1c_2e^{-\sqrt{2c_1}\rho}}{a(1+c_2e^{-\sqrt{2c_1}\rho})^2}.$$

Переходя к первоначальным переменным, получаем:

$$\dot{O} = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{4c_1c_2r^{-\sqrt{2c_1}}}{a(1+c_2r^{-\sqrt{2c_1}})^2 r^2} (R_1 < r < R_2), \quad (1.20)$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные.

После удовлетворения граничным условиям (1.16) получаем уравнения для определения постоянных c_1 и c_2 .

$$\begin{aligned} \frac{(t+2)b^{-t}}{t-2} &= 2\delta t^2 - 1 - 2t\sqrt{\delta(\delta t^2 - 1)} \\ t = \sqrt{2c_1}, c_2 &= \frac{(t+2)R_1^t}{t-2}, b = \frac{R_2}{R_1}, \delta = \frac{e^{-\gamma T_0}}{2ab^2 R_1^2} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Уравнение (1.21) решается численно.

Окончательное решение задачи получается в виде:

$$T = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{2t^2(t^2 - 4)(R_1/r)^t}{a[(t-2) + (t+2)(R_1/r)^t]^2 r^2}, \quad (1.22)$$

где t определяется из трансцендентного уравнения (1.21), a дается по формуле (1.18).

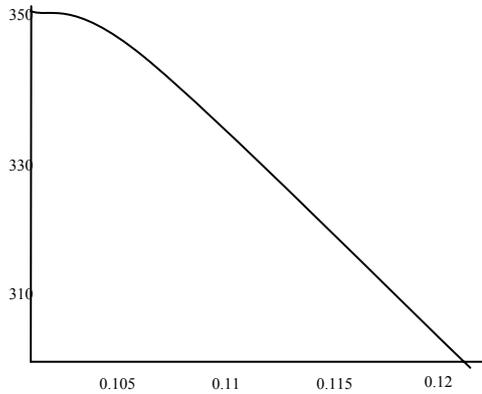
Вычисления проводилось для трубы из полиэтилена с отверстием радиуса $R_1=0.1$ м. При этом использовались следующие данные: $3,4 \cdot 10^9$ Н/м²; $B = D = 0,01$ м²/с; $\tilde{N} = 3,87 \cdot 10^7$ Н/м²; $a_0c_0=0,308$ Вт/мград.; $K=0.983$; $\omega=100$ м/с; $T_0=293$ К; $\alpha=7100$ м⁻².

В табл. 1 приведены значения температуры T , зависящей от r при различных значениях $\varepsilon, b, P_1 (R_1 \leq r \leq R_2)$.

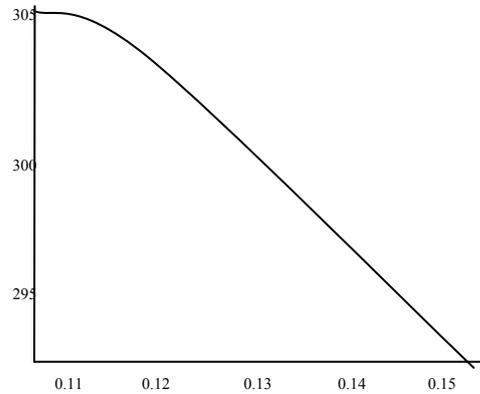
Таблица 1

$\varepsilon = 0,5; b = 1,2; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$
$T=355,1; 349,8; 335,5; 315,3; 293,0$
$\varepsilon = 0,5; b = 1,5; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$
$T=305,9; 302,5; 299,4; 295,1; 293,1$
$\varepsilon = 0,25; b = 1,2; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$
$T=347,3; 343,2; 331,6; 315,0; 293,1$
$\varepsilon = 0,25; b = 1,5; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$
$T=305,6; 303,3; 300,3; 296,8; 293,0$

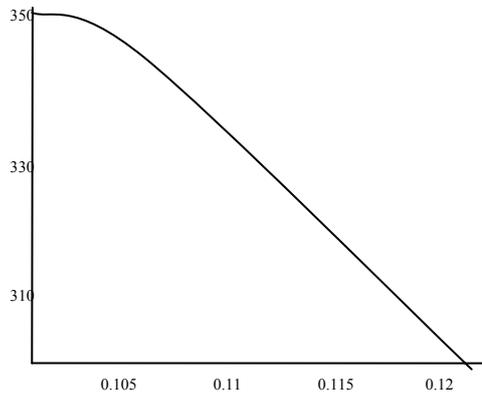
Кроме того, приведены графики (фиг.1– фиг.4) – соотношение между температурой T и радиусом r .



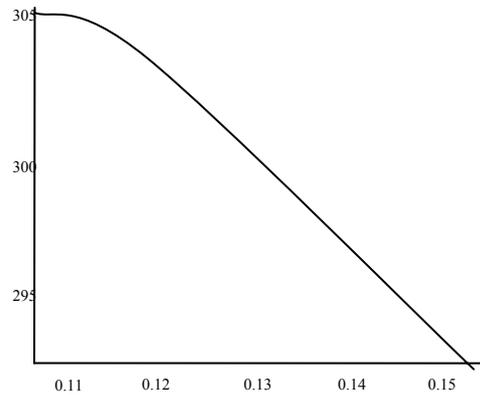
Фиг.1



Фиг.2



Фиг.3



Фиг.4

2. Рассмотрим решение задачи, когда внутренняя поверхность теплоизолирована, а на внешней поверхности происходит свободный теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

В этом случае уравнение теплопроводности имеет вид (1.17), общее решение дается по формуле (1.20).

Граничные условия при температуре T в этом случае имеют вид:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} = 0, \quad \left. T \right|_{r=R_2} = \alpha(T - T_0) \quad (2.1)$$

где α – коэффициент теплопроводности, T_0 – температура окружающей среды.

После удовлетворения граничным условиям (2.1) получается уравнение для определения произвольных постоянных C_1, C_2 , выражающихся через параметр t , который определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{(t^2 - 4)(b^t - 1)}{(t + 2) + (t - 2)b^t} = \alpha b R_1 \ln \frac{\delta^2 (t^2 - 4)b^t}{a [(t + 2) + (t - 2)b^t]^2} \quad (2.2)$$

$$b = R_2 / R_1, \quad \delta = \frac{2e^{-\gamma T_0}}{b^2 R_1^2}, \quad \gamma = 2B + D$$

a дается по формуле (1.18).

Уравнения (2.2) решаются численно.

Приведена таблица значения температуры $T(R_1)$ и $T(R_2)$ (на внутренней и внешней поверхностях) при различных значениях ε, b, P_1 .

Вычисления проводились при тех же данных, приведенных в предыдущем случае.

Таблица 2

$$\varepsilon = 0,5; b = 1,2; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Í / i }^2$$

$$T(R_1)=381,3^0\text{K}; \quad T(R_2)=294,7^0\text{K}$$

$$\varepsilon = 0,5; b = 1,5; P_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ Í / i }^2$$

$$T(R_1)=365,1^0\text{K}; \quad T(R_2)=293,3^0\text{K}$$

$$\varepsilon = 0,25; b = 1,2; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Í / i }^2$$

$$T(R_1)=371,6^0\text{K}; \quad T(R_2)=293,9^0\text{K}$$

$$\varepsilon = 0,25; b = 1,5; P_1 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Í / i }^2.$$

$$T(R_1)=349,7^0\text{K}; \quad T(R_2)=293,0^0\text{K}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд. ИЛ, 1963. 535с.
2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Физматгиз, 1966. 707 с.
3. Вермишян Г.Б. Действие вибрационной нагрузки на пластинку с круговым отверстием из вязкоупругого материала. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С.86-93.
4. Галин Л.А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. //Изв. АН СССР. Механика. 1965. № 6.

Ереванский Государственный
Университет Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
7.07.2008