

УДК 539.3

О ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ
В ДВУХ ПОСТАНОВКАХ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: стержень, устойчивость, сила, перемещение, параметрический резонанс.

Keywords: Beam, stability, force, displacement, parametric resonance.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան

Ձողի դինամիկական կայունության երկու դրվածքների մասին

Ձողի կայունությունը դիտարկվում է երկու դեպքում, երբ եզրում տրվում է ուժ կամ տեղափոխություն պարբերական ֆունկցիայի տեսքով: Երկայնական տատանումների հավասարումը լուծվում է ճշգրիտ, իսկ կայունության հավասարման լուծումը բերվում է Կոշիի խնդրի անվերջ համակարգի համար: Ցույց է տրվում, որ գլխավոր պարամետրական ռեզոնանսի դեպքում երկայնական ուժը ըստ ձողի երկարության կարելի է ընդունել համասեռ:

Դիտարկված է նաև ձողի կայունությունը, երբ եզրում հարվածի տեսքով տեղափոխություն է ազդում:

L.A.Movsisyan, G.G.Nersisyan

On dynamic stability of beam in two statements

The stability of beam in two cases when on one edge of it the force or displacement in form of periodical function is investigated. The equation of longitudinal vibrations is solved exactly and solution of stability equation is reduced to Cauchy problem for infinite system. It is shown that in case of main parametric resonance one can account that compression force is constant along length of beam. Also is considered problem of stability when applied displacement is in impact form.

Устойчивость стержня изучается в двух случаях, когда на конце задаётся сила или перемещение в виде периодической функции. Уравнение продольных колебаний решается точно, а решение уравнения устойчивости сводится к задаче Коши для бесконечной системы. Показано, что при главном параметрическом резонансе можно принять постоянство сжимающей силы по длине стержня. Рассмотрена также задача устойчивости, когда на конце стержня прилагается перемещение в виде удара.

При исследовании задач динамической устойчивости стержня при нагружениях в продольном направлении обычно принимается, что продольная сила однородна по длине стержня за исключением случаев ударных нагрузок. Такое предположение имеет известное объяснение – время распространения упругой волны с одного конца в другой во много меньше, чем периоды основных частот. При таком подходе независимо от того, какие условия на конце заданы относительно перемещения или силы выражения продольной силы друг от друга, отличаются лишь постоянным множителем. Однако возникает вопрос – насколько (в количественном отношении) предположение однородности продольной силы оправдано. Поэтому здесь классическая задача динамической устойчивости при периодических воздействиях рассматривается в точной постановке. Приводится также решение задачи, когда ударным образом прикладывается перемещение.

1. Уравнение устойчивости стержня имеет вид

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Переходя к безразмерным координатам

$$y = \frac{\pi x}{l}, \quad \tau = \frac{at\pi}{l}, \quad a = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}, \quad P = EF \frac{\partial u}{l \partial y}, \quad (1.2)$$

вместо (1.1) будем иметь

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \Omega^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\pi}{l} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad \Omega^2 = \frac{J \pi^2}{Fl^2}. \quad (1.3)$$

Уравнение (1.3) будем исследовать для случая, когда на концах стержня заданы условия свободного опирания. Тогда, в предположении, что выражение продольного перемещения определено, функцию прогиба и $\frac{\partial u}{\partial y}$ представим в виде рядов

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(\tau) \sin m y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau) \cos n y. \quad (1.4)$$

Для каждой конкретной задачи $a_n(\tau)$ будут разные, а выражение для $w(y, \tau)$ удовлетворяет условиям свободного опирания. Из (1.3) при (1.4) получим следующую бесконечную систему [1]:

$$\frac{d^2 w_m}{d\tau^2} + \left[\Omega_m^2 - \frac{\pi}{l} \left(a_0 + \frac{a_{2m}}{2} \right) m^2 \right] w_m - \frac{\pi m}{2l} \sum_{\substack{m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} (a_{m+n} + a_{m-n}) n w_n = 0, \quad \Omega_m = m \Omega. \quad (1.5)$$

Об устойчивости стержня будем судить, исходя из системы (1.5). Прежде чем перейти к конкретным задачам, изучим такой вопрос: какие должны быть условия на конце стержня (относительно перемещения или силы), чтобы продольная сила была одинаковой?

2. Уравнение продольного колебания

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

проинтегрируем для двух случаев конечных условий в предположении нулевых начальных условий*)

$$\text{а) } u = \varphi(t) \text{ при } x = 0 \text{ и } u = 0 \text{ при } x = l \quad (2.2)$$

$$\text{б) } P = EF \frac{\partial u}{\partial x} = f(t) \text{ при } x = 0 \text{ и } u = 0 \text{ при } x = l \quad (2.3)$$

Подвергая преобразованию Лапласа уравнение движения со всеми условиями, получим следующие условия для того, чтобы (2.2) или (2.3) дали одинаковые результаты для продольной силы

$$f(p) = -\frac{EF}{a} p \varphi(p) \left(1 + 2e^{-\frac{2pl}{a}} + 2e^{-\frac{4pl}{a}} \dots \right) \quad (2.4)$$

*) Здесь удобнее воспользоваться небезразмерными координатами. Под словом «постановка» в заглавии имеются в виду именно эти два случая.

$$\varphi(p) = -\frac{af(p)}{EF \cdot p} \left(1 - 2e^{-\frac{2pl}{a}} + 2e^{-\frac{4pl}{a}} \dots + (-1)^n 2e^{-\frac{2npl}{a}} \right) \quad (2.5)$$

Функции $f(p)$ и $\varphi(p)$ – соответствующие изображениям функций $f(t)$ и $\varphi(t)$.

Ниже приводятся некоторые, практически важные, конкретные примеры:

$$1) \varphi(t) = u_0 H(t), \quad -\frac{1}{Au_0} f(t) = \begin{cases} \delta(t), & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) + 2\delta\left(t - \frac{2l}{a}\right), & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.6)$$

$$2) f(t) = -P_0 H(t), \quad \frac{A}{P_0} \varphi(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ \frac{4l}{a} - t, & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

$$3) P = C \sin \omega t, \quad \frac{A\omega}{C} \varphi(t) = \begin{cases} \cos \omega t - H(t), & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) + 2 \left[H\left(t - \frac{2l}{a}\right) - \cos \omega \left(t - \frac{2l}{a}\right) \right], & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.8)$$

$$4) u = ct \quad -\frac{1}{cA} f(t) = \begin{cases} H(t), & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) + 2H\left(t - \frac{2l}{a}\right), & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.9)$$

$$5) P = Ct, \quad -AC f(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \frac{2l}{a} \\ (\cdot) - \left(t - \frac{2l}{a}\right)^2, & \frac{2l}{a} \leq t \leq \frac{4l}{a}, \quad A = \frac{EF}{a} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (2.10)$$

В приведенных формулах $\delta(\cdot)$ и $H(\cdot)$ – соответственно, функции Дирака и Хевисайда, а скобки (\cdot) на вторых строках правой части означают повторение первой строки.

Перейдем к конкретным примерам.

3. Рассмотрим продольные колебания стержня, когда один конец неподвижен, а на другом задано произвольное перемещение:

$$u = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } u = f(\tau) \text{ при } y = \pi. \quad (3.1)$$

Как здесь, так и в следующих примерах, начальные условия нулевые.

Собственными функциями для случая типа (3.1) являются $\{\sin m y\}$, поэтому решение (2.1) при условиях (3.1) будет:

$$u = \frac{y}{\pi} f(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n y, \quad u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left[2f(\tau) + \int_0^{\tau} f(\xi) \sin n(\tau - \xi) d\xi \right] \quad (3.2)$$

В частном случае, когда $f(\tau)$ – периодическая функция

$$f(\tau) = c \sin \theta \tau \left(f(\tau) = c \sin p \tau, \quad q = \frac{\theta l}{a \pi} \right), \text{ коэффициенты } a_n \text{ для системы}$$

(1.5) будут:

$$a_0 = \frac{c}{\pi} \sin q \tau, \quad a_n = \frac{2c}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} q}{n^2 - q^2} \left(\frac{q}{n} \sin q \tau - \sin \tau \right). \quad (3.3)$$

В [1] рассмотрен случай, когда $f(\tau)$ – линейная функция от τ .

Систему (1.5) можно интегрировать только численно. Для начальных условий

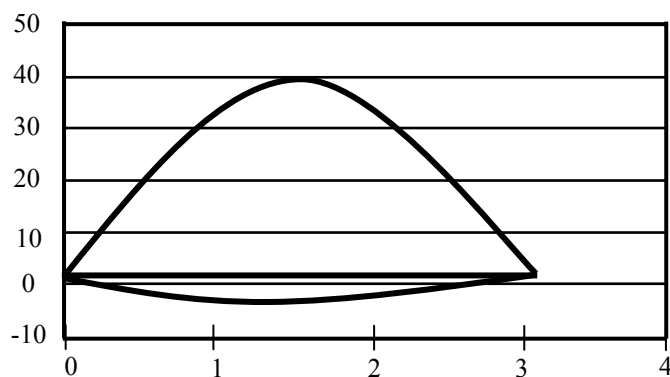
$$w_1(0) = 1, \quad \dot{w}_1(0) = w_n(0) = \dot{w}_n(0), \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.4)$$

интегрирование производилось для двух случаев:

а) брался только a_0 (что соответствует однородной сжимающей силе по длине),

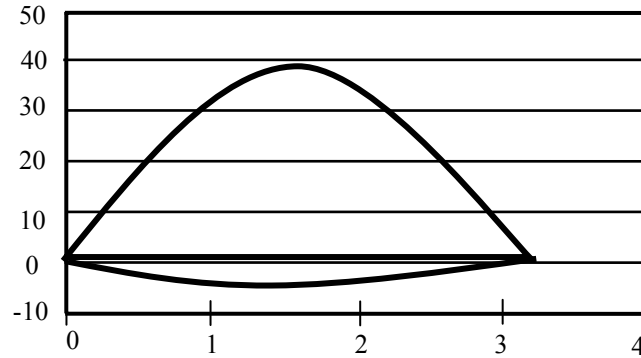
б) брались все коэффициенты для различных отношений Ω_1 и $\frac{c}{l}$ и $q = \Omega_1$ и

$q = 2\Omega_1$. Последнее значение q соответствует главному параметрическому резонансу [2]. На фиг.1 и 2 приведены кривые возрастания прогибов со временем



Фиг. 1

$\left(\tau = \frac{\pi}{\Omega_1}, \frac{2\pi}{\Omega_1} \right)$ для $\frac{c}{l} = 10^{-3}$ и $\Omega = 1/30$, соответственно, для случаев а) и б).



Фиг. 2

Как видно из приведенных фигур и имеющихся у нас данных, принятие однородности сжимающей силы вполне приемлемо. Конечно, для больших значений c/l такое утверждение сомнительно.

4. Теперь пусть на конце стержня $y = \pi$ мгновенно прикладывается перемещение и поддерживается постоянным, т.е.

$$u = 0 \text{ при } y = 0, \quad u = -u_0 H(t) \text{ при } y = \pi. \quad (4.1)$$

Тогда решение (3.2) будет

$$u = -\frac{u_0}{\pi} y + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos n\tau \sin ny \quad (4.2)$$

и, соответственно, коэффициенты a_n будут

$$a_0 = \frac{u_0}{\pi}, \quad a_n = 2(-1)^n \frac{u_0}{\pi} \cos n\tau \quad (4.3)$$

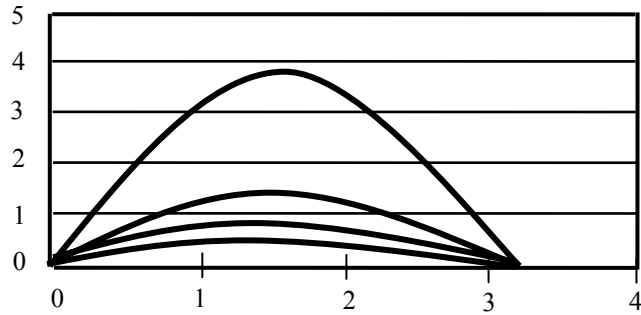
Значение u_0 , при котором стержень может потерять устойчивость по Эйлеру

$$\left(P_{\text{Эд}} = \frac{EJ\pi^2}{l^2} \right), \text{ есть}$$

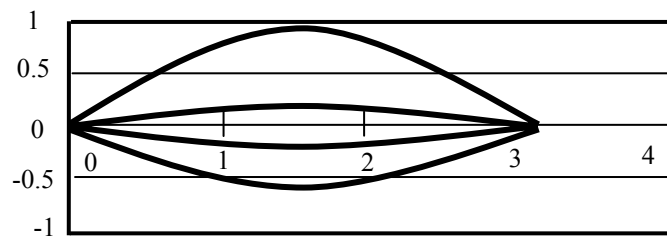
$$u_0 = \frac{J\pi^2}{Fl}. \quad (4.4)$$

Из (1.5) и (4.3) также видно, что и при динамической постановке при (4.4) имеем бесконечное возрастание прогибов. При статической постановке, когда u_0 меньше, чем (4.4), стержень устойчив, в то время, как при динамической постановке имеем возрастание прогибов. На фиг.3 приведена картина изменения прогибов для 0.9 от (4.4) при $u_0 = 10^{-3}l$.

Для u_0 , равного 0,5 (4.4), уже возрастания нет, имеется колебание относительно равновесного положения (фиг.4).



Фиг. 3



Фиг. 4

5. Здесь уже рассмотрим случай, когда на конце задана периодическая сила:

$$u = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } EF \frac{l}{\pi} \frac{\partial u}{\partial y} = C \sin p\tau \text{ при } y = \pi. \quad (5.1)$$

Подобная задача в постановке установившегося режима рассмотрена в [2] (стр.463).

Собственными функциями данного случая есть $\{\sin \mu_n y\}$

$\mu_n = \frac{2n-1}{2}$, $n = 1, 2, \dots$. Так что решение уравнения (2.1) с условиями (5.1) есть

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \sin \mu_k y, \quad u_k = \frac{2A_1}{\pi} \frac{1}{\mu_k^2 - q^2} \left(\sin q\tau - \frac{q}{\mu_k} \sin \mu_k \tau \right) \quad (5.2)$$

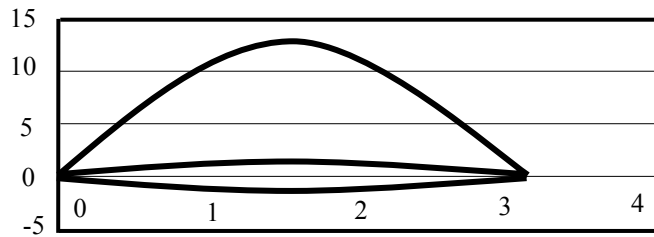
$$A_1 = \frac{IC}{EF\pi}$$

Как уже указывалось в п.1, система (1.5) получается только при условии разложения продольной силы по $\{\cos ny\}$, так что для определения a_n решение (5.2) необходимо разлагать по $\{\sin ny\}$. Такое сделано и для a_k , получены выражения:

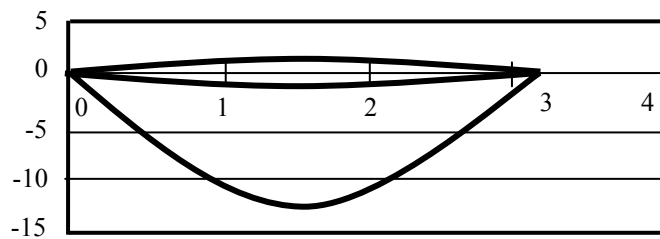
$$a_0 = \frac{2A_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k (\mu_k^2 - q^2)} (\mu_k \sin q\tau - q \sin \mu_k \tau) \quad (5.3)$$

$$a_n = \frac{4(-1)^n A_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{(\mu_k^2 - n^2)(\mu_k^2 - q^2)} (\mu_k \sin q\tau - q \sin \mu_k \tau)$$

На фиг. 5 и 6 приведены кривые возрастания прогибов, соответственно, для случаев $q = \Omega_1$ и $q = 2\Omega_1$. Как и в первом случае (п.2), учет неоднородности сжимающей силы по длине стержня незначительно влияет на картину увеличения прогибов – начально сообщённое возмущение по одной синусоидальной волне так и остаётся по форме и скорость возрастания одинакова.



Фиг. 5



Фиг. 6

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Устойчивость упругой балки при быстрых нагружениях // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1971. Т.24. №1. С.38-50.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.04.2008