ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №2, 2009 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ НЕКОНСЕРВАТИВНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ

Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: балка, сосредоточенная масса, сосредоточенный момент, устойчивость, флаттер.
Keywords: beam, concentrated mass, concentrated moment, stability, flatter.

Ս.Ռ. Մարտիրոսյան
Հեծանի կայունությունը ոչ կոնսերվատիվ մի խնդրի մասին
Դիտարկված է հեծանի, որի մի ծայրը ամրակցված է, իսկ մյուս ազատ ծայրի վրա կիրառված են կենտրոնացած զանգված և մոմենտ, կայունության խնդիրը.

S.R. Martirosyan
On the non-conservative problem of the cantilevered beam
The paper is devoted to the analysis of stability of the cantilevered beam with a concentrated mass and moment.

Рассматривается задача устойчивости консольного упругого стержня, нагруженного «следящей» силой при наличии сосредоточенной инерционной массы и инерционного момента на свободном конце.

1. Пусть консольный упругий стержень длины l и постоянного сечения нагружен «следящей» силой P и, кроме того, на его свободном конце имеются сосредоточенная инерционная масса m_c и сосредоточенный инерционный момент J_c. Будем полагать, что собственная масса стержня пренебрежимо мала по сравнению с сосредоточенной инерционной массой m_c.

В рамках обычных предположений элементарной теории изгиба уравнение малых изгибных колебаний стержня около невозмущенной формы равновесия описывается соотношением [1,2]

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0,\; w=w(x,t). \tag{1}$$

Здесь EJ – жесткость сечения при изгибе; $w=w(x,t)$ – динамический прогиб в каждой точке стержня.

Граничные условия определяются выражениями:

$$w=0,\; \frac{\partial w}{\partial x}=0,\; x=0; \tag{2}$$

$$EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-J_c\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2},\; EJ\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=m_c\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\; x=l.$$

Задача состоит в отыскании таких сочетаний параметров P, m_c и J_c, при которых краевая задача, описываемая уравнением (1) и соответствующими граничными условиями (2), имеет решения, отличные от тривиального $w(x,t)=0$, иными словами, в изучении поведения собственных значений краевой задачи (1), (2), зависящих от P, m_c и J_c как от параметров.

Отыскивая решение уравнения (1) в виде гармонических колебаний

$$w(x,t) = f(x)\exp(i\omega t)\,, \tag{3}$$

приходим к задаче на собственные значения

$$\frac{d^4 f}{dx^4} + k^2\frac{d^2 f}{dx^2} = 0\,,\; k^2 = \frac{P}{EJ}\,; \tag{4}$$

$$f = \frac{df}{dx} = 0\,,\; x = 0\,; \tag{5}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{J_c}{EJ}\omega^2\frac{df}{dx} = 0\,,\; \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{m_c}{EJ}\omega^2 f = 0\,,\; x = l\,.$$

Подставляя общий интеграл уравнения изогнутой оси стержня (4)

$$f(x) = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3 x + C_4$$

и его производные в граничные условия (5), получаем следующую однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_i, $i = \overline{1,4}$:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ kC_1 + C_3 = 0 \\ EJk^2(C_1\sin\nu + C_2\cos\nu) + J_c\omega^2 k(C_1(\cos\nu - 1) - C_2\sin\nu) = 0 \\ EJk^3(-C_1\cos\nu + C_2\sin\nu) + m_c\omega^2(C_1(\sin\nu - \nu) + C_2(\cos\nu - 1)) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$k^2 = P\left(EJ\right)^{-1},\; \nu = kl\,. \tag{7}$$

Для нахождения значений параметров P, m_c, J_c и их сочетаний, приводящих к потере устойчивости в задаче (1), (2), имеем алгебраическое уравнение относительно квадратов собственных частот колебаний стержня

$$\begin{aligned} &\alpha\beta(2 - 2\cos\nu - \nu\sin\nu)\omega^4 - \\ &-(\beta\sin\nu + \alpha(\sin\nu - \nu\cos\nu))\omega^2 + 1 = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\alpha = m_c\left(Pk\right)^{-1},\; \beta = J_c kP^{-1},\; \alpha > 0\,,\; \beta > 0\,, \tag{9}$$

которое получается приравниванием нулю определителя, составленного из коэффициентов системы (6).

Вводя обозначения

$$\Omega^2 = \omega^2\sqrt{\alpha\beta}\,,\; \chi = \sqrt{\alpha^{-1}\beta}\,,\; \chi > 0\,, \tag{10}$$

после несложных выкладок уравнение (8) запишется в виде:

$$\begin{aligned} &4\sin 0,5\nu(\sin 0,5\nu - 0,5\nu\cos 0,5\nu)\Omega^4 - \\ &-\chi^{-1}((\chi^2 + 1)\sin\nu - \nu\cos\nu)\Omega^2 + 1 = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Исследуем уравнение (11).

Корни уравнения (11) определяются из формулы

$$\Omega_{1,2}^2 = 0,5\left[B(\chi,\nu) \pm \sqrt{B^2(\chi,\nu) - 4A(\nu)}\right], \tag{12}$$

$$A(\nu) = 4\sin 0,5\nu(\sin 0,5\nu - 0,5\nu\cos 0,5\nu)\,, \tag{13}$$

$$B(\chi,\nu) = \chi^{-1}\left[(\chi^2 + 1)\sin\nu - \nu\cos\nu\right]. \tag{14}$$

Из уравнения (11) очевидно, что $\Omega_1^2 \neq 0$, $\Omega_2^2 \neq 0$. А это означает, что потери устойчивости в смысле Эйлера невозможны.

В соответствии с (3), возмущенное движение стержня устойчиво при значениях $\Omega_1^2 > 0$ и $\Omega_2^2 > 0$, что равносильно выполнению условий

$$A(\nu) \geq 0,\ B(\chi, \nu) > 0,\ B^2(\chi, \nu) - 4A(\nu) > 0. \qquad (15)$$

Колебательный вид неустойчивости будет иметь место, если в формуле (12) выражение под радикалом станет отрицательным. Отсюда следует, что критические значения параметров P, m_c и J_c должны удовлетворять уравнению

$$\chi^{-2}\left[(\chi^2+1)\sin\nu - \nu\cos\nu\right]^2 -$$
$$-16\sin 0{,}5\nu(\sin 0{,}5\nu - 0{,}5\nu\cos 0{,}5\nu) = 0, \qquad (16)$$

где χ и ν определяются выражениями (10).

Критическое значение параметров P, m_c и J_c, приводящих к неустойчивости апериодического вида с нарастающей экспонентой, определяется из уравнения

$$\left[(\chi^2+1)\sin\nu - \nu\cos\nu\right] = 0. \qquad (17)$$

Исследуя поведение функций (16) и (17) от параметров χ и ν с помощью графо-аналитических методов, приходим к выводу, что наименьший корень $\nu_{\min}$ уравнений (16) и (17), при котором устойчивое возмущенное движение стержня становится неустойчивым, определяется из условий

$$\left[(\chi^2+1)\sin\nu - \nu\cos\nu\right] = 0,\ \nu \in (3{,}14;\ 4{,}49),\ \chi \in (0,\ 1); \qquad (18)$$

$$\chi^{-2}\left[(\chi^2+1)\sin\nu - \nu\cos\nu\right]^2 -$$
$$-16\sin 0{,}5\nu(\sin 0{,}5\nu - 0{,}5\nu\cos 0{,}5\nu) = 0,\ \nu \in [2{,}32;\ 3{,}14),\ \chi \in [1, \infty).$$

Как следует из соотношений (18), наименьший корень $\nu_{\min}$ при $\chi \in (0,\ 1)$ определяет критические значения параметров P, m_c и J_c, приводящих к неустойчивости апериодического вида с нарастающей экспонентой, а при $\chi \in [1, \infty)$ – к неустойчивости колебательного вида с возрастающей амплитудой. При этом, $\nu_{\min} \approx 4{,}49$ при достаточно малых χ $(\chi \to 0)$ и $\nu_{\min} \approx 3{,}14$ при достаточно больших χ $(\chi \to \infty)$.

Подставляя конкретные значения χ в соотношения (18), определяем соответствующие наименьшие корни $\nu_{\min}$. Далее, в соответствии с (10), находим критические значения «следящей» силы $P_{\text{кр}}$ и отношения $(m_c J_c^{-1})_{\text{кр}}$ из следующих формул

$$P_{\text{кр}} = EJl^{-2}\nu_{\min}^2,\ \ (m_c J_c^{-1})_{\text{кр}} = P_{\text{кр}}(EJ\chi^2)^{-1}. \qquad (19)$$

Таким образом, при наличии сосредоточенной инерционной массы m_c и инерционного момента J_c на свободном конце консольного упругого стержня, нагруженного «следящей» силой P, возмущенное движение стержня становится неустойчивым при критических значениях параметров $P_{\text{кр}}$ и $(m_c J_c^{-1})_{\text{кр}}$, определяемых из формул (19). При этом имеем неустойчивость только флаттерного типа, а дивергентная неустойчивость невозможна.

1. Рассмотрим частные случаи.

1.1. Пусть на свободном конце консольного стержня, нагруженного «следящей» силой P, имеется сосредоточенная инерционная масса m_c, а инерционный момент отсутствует $(J_c = 0)$. Тогда, в соответствии с (9) и (10), имеем $\beta = 0$, $\chi = 0$. При этом уравнение (8) перепишется в виде

$$m_c \left(Pk\right)^{-1} (\sin \nu - \nu \cos \nu)\omega^2 - 1 = 0 . \tag{20}$$

Согласно (7) корни уравнения (20) определяются из формулы

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{Pk}{m_c(\sin kl - kl\cos kl)}} . \tag{21}$$

Формула (21) в точности совпадает с формулой, полученной В.В. Болотиным [1] при исследовании задачи устойчивости консольного стержня, сжатого «следящей» силой при наличии сосредоточенной инерционной массы на свободном конце и Ржаницыным А.Р. в [3].

Наименьший корень (21), соответствующий переходу от устойчивого возмущённого движения к неустойчивому, равен $\nu_{\min} = (kl)_{\min} \approx 4{,}49$, откуда, учитывая (7), находим критическое значение «следящей» силы [1]

$$P_{кр} \approx 20{,}19EJl^{-2} \text{ или } P_{кр} \approx 2\pi^2 EJl^{-2} . \tag{22}$$

1.2. А теперь рассмотрим случай, когда на свободном конце консольного стержня, нагруженного «следящей» силой P, приложен только сосредоточенный инерционный момент J_c, а сосредоточенная инерционная масса отсутствует $(m_c = 0)$. Тогда, в соответствии с (9) и (10), имеем $\alpha = 0$, $\chi = \infty$. При этом уравнение (8) перепишется в виде

$$J_c kP^{-1} \cdot s\,\text{in}\,\nu \cdot \omega^2 - 1 = 0 , \tag{23}$$

корни которого согласно (7) определяются из формулы

$$\omega_{1,2} = \pm\sqrt{EJk\left(J_c \sin kl\right)^{-1}} . \tag{24}$$

Из (24) очевидно следует, что переходу от устойчивого возмущенного движения к неустойчивому соответствует наименьший корень

$$\nu_{\min} = (kl)_{\min} = \pi . \tag{25}$$

В соответствии с (7), отсюда находим критическое значение «следящей» силы

$$P_{кр} = \pi^2 EJl^{-2},$$

которое примерно в два раза меньше критического значения «следящей» силы (22).

Автор выражает благодарность М.В.Белубекяну за постановку задачи, за обсуждение и внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 340 с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.
3. Ржаницын А.Р. Консольный упругий стержень, нагруженный следящей силой. //Изв.АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т. 38. №5. С. 33–44.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
17.09.2008