

УДК 539.3

ЗАДАЧА ОРТОТРОПНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ПОВЕРХНОСТНЫХ КАСАТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНОГО  
СДВИГА

Киракосян Р. М., Степанян С. П.

**Ключевые слова:** пластинка, ортотропия, поправочные коэффициенты, касательные напряжения, форма распределения.

**Keywords:** plate, orthotropic, corrected coefficients, tangential stresses, the form of distribution.

Ռ.Մ. Կիրակոսյան, Ս.Պ. Ստեփանյան

Սակերևութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ գտնվող օրթոտրոպ կլոր սալի խնդիրը  
ընդլայնական սահմանի հաշվառմամբ

Դիտարկվել է հաստատուն հաստությամբ օրթոտրոպ կլոր սալի ծոման առանցքային մետրիկ խնդիրը, որը գտնվում է մակերևութային շոշափող բեռների ազդեցության տակ: Խնդիրը լուծվել է օգտագործելով առաջին կարի սահմանի տեսությունը: Մաքսիմալ ձկվածքի համար ստացվել է ուղղման գործակիցը:

R.M. Kirakosyan, S.P. Stepanyan

The Problem of an orthotropic round plate under the action of the  
surface tangential loadings taking into account the transversal shear.

An asymptotic problem of bend of an orthotropic round plate of constant thickness which is under the action of radially directed surface tangential loadings is, considered. The Problem is solved with the application of shear theory of the first order. For the maximum bend the coefficient of corrections is calculated.

Рассмотрена осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины, которая находится под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок. Задача решена с применением сдвиговой теории первого порядка. Для максимального прогиба рассчитан коэффициент поправок.

Рассматривается осесимметричная задача изгиба ортотропной круглой пластинки постоянной толщины под действием радиально направленных поверхностных касательных нагрузок. Применяется сдвиговая теория первого порядка [3], [4], которая, в отличие от теории [2], позволяет учитывать влияние изменения поперечного касательного напряжения по толщине пластинки при отсутствии поперечного усилия.

Рассматриваются случаи шарнирного опирания и защемления контура пластинки. Получаются аналитически замкнутые выражения прогиба и изгибающих моментов пластинки.

1. Рассмотрим цилиндрически ортотропную круглую пластинку радиуса  $a$  и постоянной толщины  $h$ . Пластинку отнесем к системе цилиндрических координат  $r, \theta, z$ . Координатные оси направим по осям анизотропии материала. Плоскость  $r\theta$  совместим со срединной плоскостью пластинки, направив ось  $Oz$  вертикально вниз.

Рассмотрим случай, когда на лицевых поверхностях пластинки действуют только радиально направленные касательные силы постоянной интенсивности  $\tau$ :

$$R|_{z=+h/2} = R^+ = \tau; R|_{z=-h/2} = R^- = -\tau. \quad (1.1)$$

Будем считать, что пластинка шарнирно оперта или защемлена по всему контуру  $r = a$ .

Уравнения равновесия дифференциального элемента срединной плоскости изгибаемой пластинки в усилиях и моментах имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} N_r &= -Z_2, \\ \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= N_r - hR_1, \\ \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} &= N_\theta - h\theta_1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $N_r, N_\theta$  и  $M_r, M_\theta, M_{\theta r}$  – внутренние усилия и моменты пластинки. Из-за отсутствия нормальных и кольцевых касательных поверхностных нагрузок имеем [1]:

$$Z_2 = \theta_1 = 0, \quad (1.3)$$

а для  $R_1$ , с учетом (1.1), получим:

$$R_1 = \frac{R^+ - R^-}{2} = \tau. \quad (1.4)$$

Первое уравнение системы (1.2) имеет тривиальное решение

$$N_r \equiv 0. \quad (1.5)$$

В силу осесимметричности задачи третье уравнение этой системы отпадает. Остается только второе уравнение, которое с учетом (1.4) и (1.5) принимает вид:

$$\frac{dM_r}{dr} + \frac{M_r - M_\theta}{r} = -h\tau. \quad (1.6)$$

В рамках теории [3], [4] имеем:

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{5}{6} B_{55} h \left( \varphi + \frac{dw}{dr} \right) + \frac{\tau h}{6}, \quad M_r = D_{11} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{D_{12}}{r} \varphi, \\ M_\theta &= D_{12} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{D_{22}}{r} \varphi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь  $w$  – прогиб,  $\varphi$  – функция, характеризующая положение первоначально нормального элемента пластинки после ее изгиба. Через  $B_{55}$  обозначен модуль сдвига материала в плоскости  $r\theta z$ , а  $D_{ij}$  – жесткости пластинки

$$D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3}{12}. \quad (1.8)$$

Параметры  $B_{11} = B_r$ ,  $B_{22} = B_\theta$ ,  $B_{12} = B_{r\theta}$  выражаются через упругие постоянные материала по известным формулам [1].

Из первого выражения (1.7) с учетом (1.5) получим:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} - \frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (1.9)$$

Уместно отметить, что в классической теории пластин

$$\varphi^{\text{кл}} = -\frac{dw}{dr} \quad (1.10)$$

Поскольку в рамках сдвиговой теории первого порядка радиальное перемещение  $u_r$ , возникшее изгибом пластинки, определяется формулой

$$u_r = z\varphi, \quad (1.11)$$

в сечениях защемления или симметрии вместо  $dw/dr = 0$  должно выполняться условие

$$\varphi = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dr} = -\frac{\tau}{5B_{55}}. \quad (1.12)$$

Следовательно, в этих сечениях происходит излом срединной плоскости пластинки. Это обстоятельство характерно всем уточненным теориям.

С учетом (1.9) и выражений моментов (1.7), уравнение (1.6) можно представить в виде

$$r^2 \frac{d^3 w}{dr^3} + r \frac{d^2 w}{dr^2} - k^2 \frac{dw}{dr} = \frac{\tau hr^2}{D_{11}} + \frac{k^2 \tau}{5B_{55}}, \quad (1.13)$$

где обозначено

$$k = \sqrt{\frac{D_{22}}{D_{11}}} = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}. \quad (1.14)$$

Здесь  $E_r$  и  $E_\theta$  – модули упругости материала по радиальному и кольцевому направлениям, соответственно.

Общий интеграл уравнения (1.13) при  $k \neq 2$  имеет вид:

$$w = c_1 + c_2 r^{1+k} + c_3 r^{1-k} + \frac{\tau hr^3}{3D_{11}(4-k^2)} - \frac{\tau r}{5B_{55}} \quad (1.15)$$

Здесь  $c_i$  – постоянные интегрирования.

Из ограниченности прогиба и его первого производного в центре пластинки  $r = 0$  следует

$$c_3 = 0. \quad (1.16)$$

Таким образом, общее выражение прогиба пластинки будет:

$$w = c_1 + c_2 r^{1+k} + \frac{\tau hr^3}{3D_{11}(4-k^2)} - \frac{\tau r}{5B_{55}}. \quad (1.17)$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$  должны определяться из условий на контуре пластинки  $r = a$ .

После определения прогиба  $w$  изгибающие моменты пластинки можно вычислить по формулам (1.7), которые с учетом (1.9) принимают вид:

$$\begin{aligned} M_r &= -D_{11} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{12}}{r} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}} \right), \\ M_\theta &= -D_{12} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{D_{22}}{r} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отметим, что решение при  $k = 2$  можно получить из окончательных выражений  $w$ ,  $M_r$  и  $M_\theta$  путем предельного перехода  $k \rightarrow 2$ .

2. Рассмотрим случай шарнирного опирания вдоль всего контура  $r = a$ . Краевые условия имеют вид:

$$w|_{r=a} = M_r|_{r=a} = 0. \quad (2.1)$$

Используя выражения  $w$  и  $M_r$ , для постоянных  $c_1$  и  $c_2$  получим:

$$c_1 = \frac{\tau a}{5B_{55}} + \frac{\tau h a^3 \left[ (6-k-k^2)D_{11} + (2-k)D_{12} \right]}{3D_{11}(1+k)(4-k^2)(kD_{11} + D_{12})}, \quad (2.2)$$

$$c_2 = -\frac{\tau h a^{2-k} (2D_{11} + D_{12})}{(1+k)(kD_{11} + D_{12})D_{11}(4-k^2)}. \quad (2.3)$$

Подставляя эти значения в (1.17) и (1.18), для прогиба и изгибающих моментов пластинки находим:

$$w = \frac{\tau h}{3D_{11}(1+k)(4-k^2)(kD_{11} + D_{12})} \left\{ (1+k)(kD_{11} + D_{12})r^3 + \left[ \begin{array}{l} (6-k-k^2)D_{11} + \\ + (2-k)D_{12} \end{array} \right] a^3 - \right. \\ \left. - 3r^{1+k} a^{2-k} (2D_{11} + D_{12}) \right\} + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}} \quad (2.4)$$

$$M_r = \frac{\tau h (2D_{11} + D_{12}) r}{D_{11} (4-k^2)} (a^{2-k} r^{k-2} - 1), \quad (2.5)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{D_{11}} \cdot \frac{a^{2-k} r^{k-2} (kD_{12} + D_{22})(2D_{11} + D_{12}) - (2D_{12} + D_{22})(kD_{11} + D_{12})}{(4-k^2)(kD_{11} + D_{12})}. \quad (2.6)$$

Переходя к пределу при  $k \rightarrow 2$  из (2.4)–(2.6), получим: при  $k = 2$

$$w = \tau h \left\{ \frac{(5D_{11} + D_{12})(a^3 - r^3) - 3r^3 (2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r}}{36D_{11} (2D_{11} + D_{12})} \right\} + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}}, \quad (2.7)$$

$$M_r = \frac{\tau h r (2D_{11} + D_{12})}{4D_{11}} \ln \frac{a}{r}, \quad (2.8)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \cdot \frac{(2D_{12} + D_{22})(2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r} + D_{11}D_{22} - D_{12}^2}{2D_{11} + D_{12}}. \quad (2.9)$$

Для простоты вопрос о величине поправки в значении наибольшего прогиба, вносимой учетом формы распределения поперечного касательного напряжения  $\tau_{rz}$  по толщине пластинки, обсудим для случая  $k = 2$ , т.е., когда  $E_\theta = 4E_r$ .

Наибольший прогиб получается в центре пластинки  $r = 0$ . Из (2.7) находим:

$$w|_{r=0} = \frac{\tau h a^3 (5D_{11} + D_{12})}{36D_{11} (2D_{11} + D_{12})} \left[ 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11} + D_{12})B_{11}h^2}{(5D_{11} + D_{12})B_{55}a^2} \right] \quad (2.10)$$

Здесь

$$w^{\text{êê}} \Big|_{r=0} = \frac{\tau h a^3 (5D_{11} + D_{12})}{36D_{11} (2D_{11} + D_{12})} \quad (2.11)$$

представляет собой наибольший прогиб пластинки по классической теории. Поправка составляет

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2D_{11} + D_{12}) B_{11} h^2}{(5D_{11} + D_{12}) B_{55} a^2} \quad (2.12)$$

при  $D_{12} = 0.2D_{11}$ ,  $B_{11} = 10B_{55}$ ,  $h = 0.2a$ , что вполне разумно, она равна 0.102 или 10%.

Изгибающий момент  $M_r$  в центре пластинки имеет нулевое значение. С удалением от центра его значение возрастает, при  $r = a/e$  становится максимальным

$$M_r^{\text{max}} = M_r \Big|_{r=\frac{a}{e}} = \frac{\tau h a}{4eD_{11}} (2D_{11} + D_{12}), \quad (2.13)$$

а затем, монотонно убывая, на контуре пластинки превращается в нуль.

Изгибающий момент  $M_\theta$  также в центре пластинки равен нулю. С удалением от центра он возрастает, в некотором сечении имеет максимум, а на контуре принимает значение :

$$M_\theta \Big|_{r=a} = \frac{\tau h a}{4D_{11}} (2D_{11} - D_{12}). \quad (2.14)$$

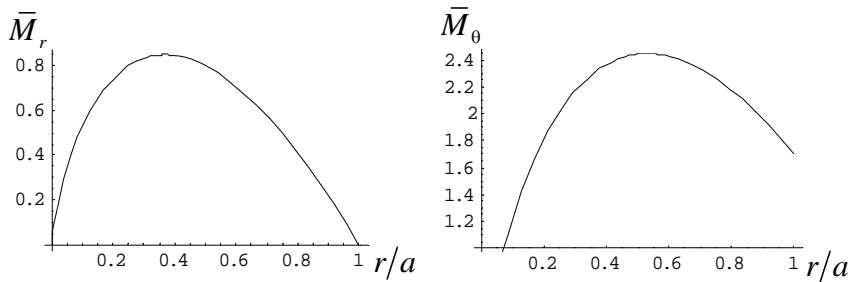
При

$$D_{22} = 4D_{11}, \quad D_{12} = 0.3D_{11} \quad (2.15)$$

для безразмерных моментов из (2.8) и (2.9) получим

$$\begin{aligned} \bar{M}_r &= \frac{4M_r}{\tau h a} = -2.3 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a}, \\ \bar{M}_\theta &= \frac{4M_\theta}{\tau h a} = -4.6 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} + 1.7 \frac{r}{a}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

На фиг. 1 представлены графики изменения  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$  по радиальной координате



Фиг.1

3. Рассмотрим случай защемления контура  $r = a$ . Краевые условия в этом случае имеют вид:

$$w|_{r=a} = 0; \varphi|_{r=a} = -\left(\frac{dw}{dr} + \frac{\tau}{5B_{55}}\right)\Big|_{r=a} = 0 \quad (3.1)$$

С учетом выражения (1.17), из (3.1) для постоянных  $c_1$  и  $c_2$  получим:

$$c_1 = \frac{\tau h a^3}{3D_{11}(1+k)(2+k)} + \frac{\tau a}{5B_{55}}, \quad (3.2)$$

$$c_2 = -\frac{\tau h a^{2-k}}{D_{11}(1+k)(4-k^2)}. \quad (3.3)$$

Подставляя эти значения в (1.17) и (1.18), для прогиба и моментов пластинки находим:

$$w = \frac{\tau h}{3D_{11}} \cdot \frac{(1+k)r^3 + (2-k)a^3 - 3r^{1+k}a^{2-k}}{(1+k)(4-k^2)} + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}}, \quad (3.4)$$

$$M_r = \tau h r \cdot \frac{r^{k-2}a^{2-k}(kD_{11} + D_{12}) - 2D_{11} - D_{12}}{D_{11}(4-k^2)}, \quad (3.5)$$

$$M_\theta = \tau h r \cdot \frac{r^{k-2}a^{2-k}(kD_{12} + D_{22}) - 2D_{12} - D_{22}}{D_{11}(4-k^2)}. \quad (3.6)$$

В случае  $k = 2$  предельным переходом получим:

$$w = \frac{\tau h}{36D_{11}} \left( a^3 - r^3 - 3r^3 \ln \frac{a}{r} \right) + \frac{\tau(a-r)}{5B_{55}}, \quad (3.7)$$

$$M_r = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \left[ (2D_{11} + D_{12}) \ln \frac{a}{r} - D_{11} \right], \quad (3.8)$$

$$M_\theta = \frac{\tau h r}{4D_{11}} \left[ (2D_{12} + D_{22}) \ln \frac{a}{r} - D_{12} \right]. \quad (3.9)$$

Наибольший прогиб будет:

$$w|_{r=0} = \frac{\tau h a^3}{36D_{11}} \left[ 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11} h^2}{B_{55} a^2} \right]. \quad (3.10)$$

Поправка составляет

$$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{B_{11} h^2}{B_{55} a^2}. \quad (3.11)$$

При  $B_{11} = 10B_{55}$ ,  $h = 0.2a$  она равна 0.24 или 24%.

Изгибающие моменты в центре пластинки равны нулю. С удалением от центра они возрастают, имеют максимум, в некоторых сечениях превращаются в нуль, после чего меняют знак и возрастают по абсолютному значению. Как и следовало ожидать, при защемлении контура пластинки изгибающие моменты получаются знакопеременными.

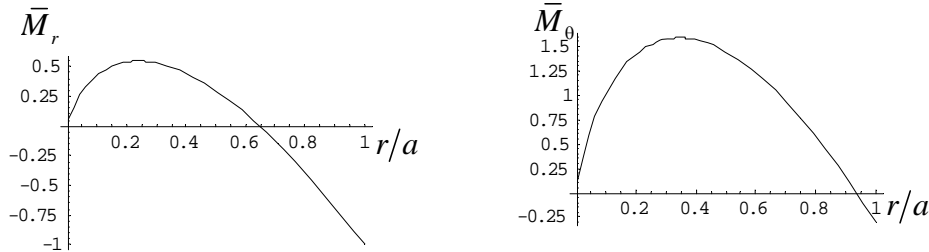
На контуре они равны:

$$M_r|_{r=a} = -\frac{\tau h a}{4}, \quad M_\theta|_{r=a} = -\frac{\tau h a}{4} \frac{D_{12}}{D_{11}}. \quad (3.12)$$

При (2.15) безразмерные моменты имеют вид:

$$\bar{M}_r = -2.3 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} - \frac{r}{a}, \quad \bar{M}_\theta = -4.6 \frac{r}{a} \cdot \ln \frac{r}{a} - 0.3 \frac{r}{a}. \quad (3.13)$$

На фиг. 2 приведены графики  $\bar{M}_r$  и  $\bar{M}_\theta$ .



Фиг.2

В заключение отметим:

а) решения задач для изотропных пластин можно получить из найденных решений, подставляя в них  $k = 1$ ;

б) если в случае действия нормальных поверхностных нагрузок изгибающие моменты в центре пластинки при  $k < 1$  имеют особенность, при  $k = 1$  принимают одинаковые конечные значения, а при  $k > 1$  они равны нулю [5], то в случае действия только касательных поверхностных нагрузок моменты в центре пластинки независимо от характера анизотропии материала всегда равны нулю;

в) учет поперечного сдвига в рассмотренных случаях не влияет на значения изгибающих моментов и они совпадают с соответствующими значениями классической теории пластин;

г) в рассмотренных случаях при  $N_r = 0$  теория [2] для прогиба поправок не дает.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.:Наука, 1987. 360 с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. //Иzv. РАН. МТТ. 1998. №3. С.46-58.
3. Киракосян Р.М. О поправочных коэффициентах, учитывающих влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №3. С.245-251.
4. Киракосян Р.М. Влияние распределения касательных напряжений по толщине пластинки при наличии касательных поверхностных нагрузок. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.304–311.
5. Лехницкий С.Г Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат,1957. 463с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
19.08.2008