

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С  
ВКЛЮЧЕНИЯМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

Члингарян Г.С.

**Ключевые слова:** плоскость, трещина, включение, напряжение, точное решение, преобразование, корневые и логарифмические особенности.

**Key words:** plane, crack, inclusion, stress, exact solution, transformation, singularities of square root and logarithmic singularities.

Գ.Ս. Չլինգարյան

Բաղադրյալ առաձգական հարթության լարվածային վիճակը, բաժանման գծի վրա կոշտ ներդիրների  
առկայության դեպքում

Դիտարկվում է որոշակի հատվածում միմյանց կոշտ ամրացված երկու առաձգական տարբեր նյութերից կազմված կիսահարթությունների կոնտակտային խնդիրը: Նյութերի ամրակցման գծի վրա կան ճաքեր, որոնցում տեղադրված են ներդիրներ՝ տրված եզրագծով: Նյութերի ամրակցման գծի մնացած մասը ազատ է շոշափող լարումից: Ֆուրիեյի ինտեգրալ ձևափոխության հիման վրա ստացված է խնդրի ճշգրիտ լուծումը ոչ բացահայտ տեսքով: Մասնավոր դեպքի համար ստացված է խնդրի ճշգրիտ լուծումը բացահայտ տեսքով և ուսումնասիրված է նորմալ և շոշափող լարումների եզակիությունները ճաքերի շրջակայքում:

G.S. Chlingaryan

Planar deformation of compound elastic plane with rigid inclusions on the attaching line

A contact plane task for two elastic half surfaces of different mediums hardly attached to each other on some given interval is considered. There are cracks on the boundary of two mediums and there are rigid inclusions of given form placed in the cracks. The rest part of the boundary of two mediums is free of tangent stresses. Based on Fourier's integral transformation an exact general solution of the task is obtained. For a special case an exact solution is obtained in explicit form and the singularities of normal and tangent stresses are examined around cracks.

Рассматривается плоская контактная задача для упругих полуплоскостей из разных материалов, жестко прикрепленных друг к другу на определенном интервале. На линии раздела материалов есть трещины, в которые помещены жесткие включения определенной формы. Остальной участок линии раздела материалов свободен от касательных напряжений. На основании интегрального преобразования Фурье получено точное общее решение задачи в неявном виде. Для конкретного частного случая получено решение задачи в явном виде и изучены особенности нормальных и касательных напряжений в области трещин.

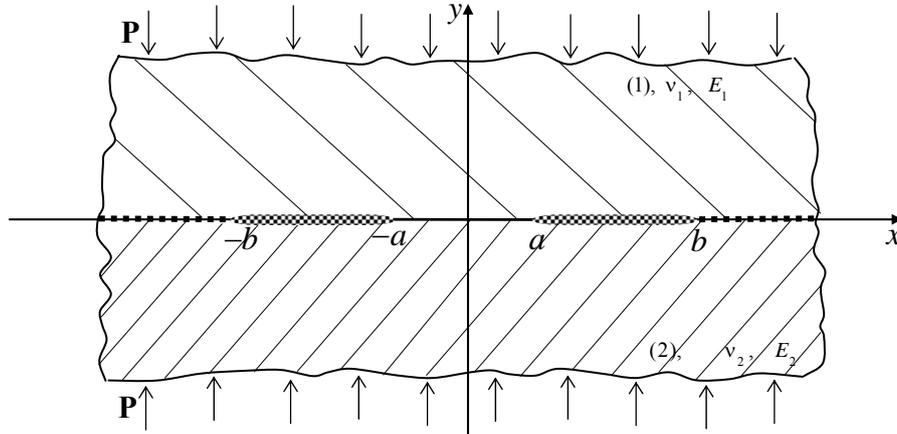
**1. Постановка и граничные условия задачи:** пусть две полуплоскости из различных материалов жестко прикреплены друг к другу на участке  $y = 0, |x| \leq a$ .

На бесконечности параллельно оси  $Oy$  действуют нагрузки интенсивности  $P$ , прижимающие полуплоскости друг к другу. Между границами упругих полуплоскостей на участках  $y = 0, x \in \Gamma \equiv [-b; -a] \cup [a; b]$  расположены симметричные относительно оси  $Oy$  жесткие включения, заданные следующими формулами:

$$v^{(1)}[x, 0] = v_1(x); \quad v^{(2)}[x, 0] = v_2(x) \quad (1)$$

$$\text{где} \quad v_i(-b) = v_i(-a) = v_i(a) = v_i(b) = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

Предполагается также, что в результате деформации участки границ полуплоскостей  $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$  входят в контакт между собой без трения (фиг. 1). Отнесем индексы “1” к верхней полуплоскости, а индексы “2” – к нижней.



Фиг. 1

Граничные условия запишем следующим образом:

$$\sigma_y^{(1)}[x, y] - \sigma_y^{(2)}[x, y] = \begin{cases} p(x) & y=0 & x \in \Gamma \\ 0 & y=0 & x \notin \Gamma \end{cases} \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}[x, y] = \begin{cases} 0 & y=0 & x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \\ q(x) & y=0 & -a < x < a \end{cases} \quad (4)$$

$$\tau_{xy}^{(2)}[x, y] = \begin{cases} 0 & y=0 & x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty) \\ q(x) & y=0 & -a < x < a \end{cases} \quad (5)$$

$$v^{(1)}[x, y] - v^{(2)}[x, y] = \begin{cases} v_1(x) - v_2(x) & y=0 & x \in \Gamma \\ 0 & y=0 & x \notin \Gamma \end{cases} \quad (6)$$

$$v^{(1)}[x, y] = v_1(x) \quad y=0 \quad x \in \Gamma \quad (7)$$

$$u^{(1)}[x, y] - u^{(2)}[x, y] = 0 \quad y=0 \quad -a < x < a, \quad (8)$$

где  $\Gamma \equiv [-b, -a] \cup [a, b]$ .

Условия полного равновесия включений имеют вид

$$\int_{-b}^{-a} p(x) dx = \int_a^b p(x) dx = \int_{\Gamma} p(x) dx = 0. \quad (9)$$

**2. Построение общего решения задачи:** решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции напряжений Эйри, которую представим в виде следующей суммы интеграла Фурье и вспомогательной функции:

$$\Phi_1 [x, y] = \int_{-\infty}^{\infty} [A_1(\lambda) + \lambda y B_1(\lambda)] e^{-|\lambda|y} e^{i\lambda x} d\lambda - \frac{P}{2} x^2 \quad -\infty < x < \infty \quad 0 < y < \infty$$

$$\Phi_2 [x, y] = \int_{-\infty}^{\infty} [A_2(\lambda) + \lambda y B_2(\lambda)] e^{|\lambda|y} e^{i\lambda x} d\lambda - \frac{P}{2} x^2,$$

$$-\infty < x < \infty \quad -\infty < y < 0. \quad (10)$$

Здесь  $A_1(\lambda)$ ,  $B_1(\lambda)$ ,  $A_2(\lambda)$  и  $B_2(\lambda)$  – неизвестные функции интегрирования, которые должны определиться из граничных условий (3) – (6). Как известно [3] компоненты напряжений и перемещений в плоской задаче теории упругости выражаются через бигармоническую функцию Эйри (10) при помощи следующих соотношений:

$$\Delta^2 \Phi [x, y] = 0 \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа,} \quad (11)$$

$$\sigma_x [x, y] = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y [x, y] = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} [x, y] = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad (12)$$

$$u [x, y] = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} + u_0, \quad (13)$$

$$v [x, y] = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} + v_0.$$

Здесь  $E$  и  $\nu$  – соответственно, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Выразив при помощи соотношений (12) – (13) компоненты напряжений и перемещений через бигармонические функции (10), удовлетворив далее граничным условиям (3) – (6), на основании интегрального преобразования Фурье получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$A_1(\lambda) = \frac{E_1}{(E_1 + E_2)\lambda^2} \left( \bar{p}(\lambda) - \left( (1 - \nu_2) - \frac{E_2}{E_1}(1 - \nu_1) \right) \operatorname{sgn}(\lambda) \bar{q}(\lambda) + E_2 \operatorname{sgn}(\lambda) \bar{v}(\lambda) \right),$$

$$A_2(\lambda) = \frac{-E_2}{2(E_1 + E_2)\lambda^2} \left( 2\bar{p}(\lambda) + \left( \frac{E_1}{E_2}(1 - \nu_2) - (1 - \nu_1) \right) \operatorname{sgn}(\lambda) \bar{q}(\lambda) - E_1 \operatorname{sgn}(\lambda) \bar{v}(\lambda) \right) \quad (14)$$

$$B_1(\lambda) = \frac{E_1}{2(E_1 + E_2)\lambda^2} \left( 2\operatorname{sgn}(\lambda) \bar{p}(\lambda) - \left( (3 - \nu_2) + \frac{E_2}{E_1}(1 + \nu_1) \right) \bar{q}(\lambda) + E_2 \bar{v}(\lambda) \right),$$

$$B_2(\lambda) = \frac{E_2}{2(E_1 + E_2)\lambda^2} \left( 2\operatorname{sgn}(\lambda) \bar{p}(\lambda) - \left( \frac{E_1}{E_2}(1 + \nu_2) + (3 - \nu_1) \right) \bar{q}(\lambda) - E_1 \bar{v}(\lambda) \right),$$

где

$$\bar{p}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} p(s) e^{-i\lambda s} ds \quad \bar{q}(\lambda) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-a}^a q(s) e^{-i\lambda s} ds, \quad (15)$$

$$\bar{v}(\lambda) = -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} (v_1(s) - v_2(s)) e^{-i\lambda s} ds.$$

Удовлетворив граничным условиям (7) – (8), учитывая значения (14) и (15), получим следующие уравнения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{p(s)}{x-s} ds = F(x) \quad x \in \Gamma, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds = G(x) + C_0 \quad -a < x < a, \quad (17)$$

где введены следующие обозначения:

$$G(x) = \frac{1}{(E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1))(E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1))} \times$$

$$\times E_1 E_2 (E_2(1-v_1) - E_1(1-v_2)) \int_{\Gamma} \frac{v'_1(s) - v'_2(s)}{x-s} ds, \quad (18)$$

$$F(x) = \frac{E_1}{2} v'_1(x) + \frac{E_2}{2} v'_2(x), \quad (19)$$

$$C_0 = \frac{2(E_1 + E_2)(E_2 v_1 - E_1 v_2)}{(E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1))(E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1))} P = \text{const}. \quad (20)$$

Как известно, решения интегральных уравнений (16) и (17) с учетом условий (9) представляются в следующем виде [3]:

$$p(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{(s^2 - a^2)(b^2 - s^2)}}{s-x} F(s) ds, \quad (21)$$

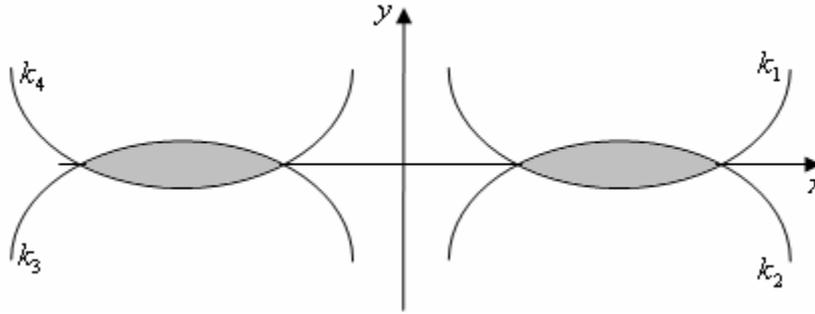
$$q(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{s^2 - a^2}}{s-x} G(s) ds - \frac{C_0 x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (22)$$

Рассмотрим частный случай, когда функции перемещений взяты в виде пересечений следующих парабол:

$$v_i(x) = \mp k_i (a-x)(b-x) \quad i = 1, 2 \quad x > 0, \quad (23)$$

$$v_i(x) = \mp k_i (a+x)(b+x) \quad i = 3, 4 \quad x < 0, \quad (24)$$

где  $k_1 = k_4$  и  $k_2 = k_3$ .



Фиг. 2

Тогда нормальные и касательные напряжения на линии  $y = 0$  примут следующий вид:

1. При  $|x| < a$

$$\begin{aligned} \sigma_y [x, 0] = & P(2 - a_1) + \frac{2}{\pi} a_2 (k_1 + k_2) \left( (b - a) - 2x \ln \left| \frac{(a - x)(b + x)}{(a + x)(b - x)} \right| + \right. \\ & \left. + (a + b) \ln \frac{a^2 - x^2}{b^2 - x^2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

2. При  $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \sigma_y [x, 0] = & \frac{a_6}{\pi} (a - b) + a_1 P + a_4 P \left( \frac{1}{\pi} \operatorname{sgn} x \ln \left| \frac{x + a}{x - a} \right| - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) + \\ & + \frac{a_5}{2\pi} \left( (a + b) \left( k_2 - \frac{E_1}{E_2} k_1 \right) - 2(k_1 + k_2) |x| \right) \ln \frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2} + \\ & + \frac{a_5}{2\pi} \left( (a + b)(k_1 + k_2) \operatorname{sgn} x + 2 \left( k_2 - \frac{E_1}{E_2} k_1 \right) x \right) \ln \left| \frac{(x - a)(x + b)}{(x - b)(x + a)} \right| - \frac{2a_3}{\pi} (k_1 + k_2)(a - b) \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} + \\ & + \frac{a_6}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} \int_{\Gamma} \frac{(s^2 - x^2)(a^2 + b^2 - s^2 - x^2)}{\sqrt{(s^2 - a^2)(b^2 - s^2)} + \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}} \frac{(a + b) \operatorname{sgn} s - 2s}{x - s} ds - \\ & - \frac{a_3 (k_1 + k_2)}{4\pi^2} \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \int_{-a}^a \left[ (a + b) \ln \frac{a^2 - s^2}{b^2 - s^2} - 2s \ln \left| \frac{(a - s)(b + s)}{(b - s)(a + s)} \right| \right] \frac{\sqrt{a^2 - s^2}}{x - s} ds \end{aligned} \quad (26)$$

3. При  $x \in (-\infty, -b] \cup [b, +\infty)$

$$\begin{aligned} \sigma_y [x, 0] = & P + \frac{a_5}{2\pi} (k_1 + k_2) \left( (a + b) \operatorname{sgn} x \ln \left| \frac{(a - x)(b + x)}{(b - x)(a + x)} \right| - 2|x| \ln \frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} \right) - \\ & - \left( a_4 P - \frac{2}{\pi} a_3 (k_1 + k_2)(b - a) \right) \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \end{aligned}$$

$$-\frac{a_3(k_1+k_2)}{2\pi^2} \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{x^2-a^2}} \int_{-a}^a \left[ (a+b) \ln \frac{a^2-s^2}{b^2-s^2} - 2s \ln \left| \frac{(a-s)(b+s)}{(b-s)(a+s)} \right| \right] \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{x-s} ds \quad (27)$$

при  $|x| < a$

$$\tau_{xy}(x,0) = \left( \frac{4a_7}{\pi} (b-a)(k_1+k_2) + 2Pa_8 \right) \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{a_7}{\pi} (k_1+k_2) \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{-a}^a \left[ (a+b) \ln \frac{a^2-s^2}{b^2-s^2} - 2s \ln \left| \frac{(a-s)(b+s)}{(b-s)(a+s)} \right| \right] \frac{\sqrt{a^2-s^2}}{x-s} ds; \quad (28)$$

$$\text{при } |x| > a \quad \tau_{xy}(x,0) = 0, \quad (29)$$

где введены следующие обозначения:

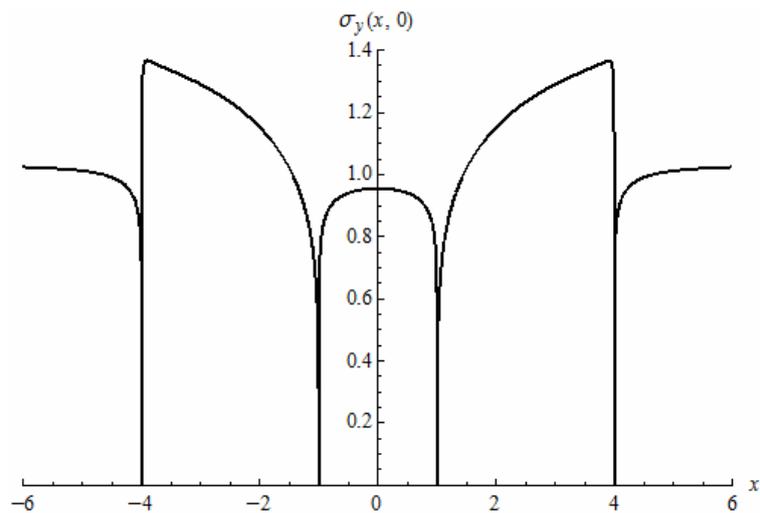
$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{3E_1 + E_2}{E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1)} + \frac{E_1 + 3E_2}{E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1)} \right), \\ a_2 &= \frac{E_1 E_2 (E_1 + E_2)}{(E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1))(E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1))}, \\ a_3 &= \frac{E_1 E_2 (E_1(1-v_2) - E_2(1-v_1))^2}{(E_1 + E_2)(E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1))(E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1))}, \\ a_4 &= \frac{(E_1(1-v_2) - E_2(1-v_1))(E_2 v_1 - E_1 v_2)}{(E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1))(E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1))}, \\ a_5 &= \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad a_6 = \frac{E_1}{E_1 + E_2} (E_1 k_1 - E_2 k_2), \\ a_7 &= \frac{E_1 E_2 (E_2(1-v_1) - E_1(1-v_2))}{(E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1))(E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1))}, \\ a_8 &= \frac{(E_1 + E_2)(E_2 v_1 - E_1 v_2)}{(E_1(3-v_2) + E_2(1+v_1))(E_1(1+v_2) + E_2(3-v_1))}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из формул (25) – (29) легко заметить, что касательные напряжения в точках  $x = \pm a$  имеют особенность в виде квадратного корня, нормальные же напряжения при  $x \rightarrow \pm a \mp 0$  имеют логарифмическую особенность, а при  $x \rightarrow \pm a \pm 0$  – особенность в виде квадратного корня.

**3. Численный пример.** Рассмотрим численный пример для последнего случая, когда функции перемещений взяты в виде (23) – (24) и приняты следующие числовые значения для параметров:

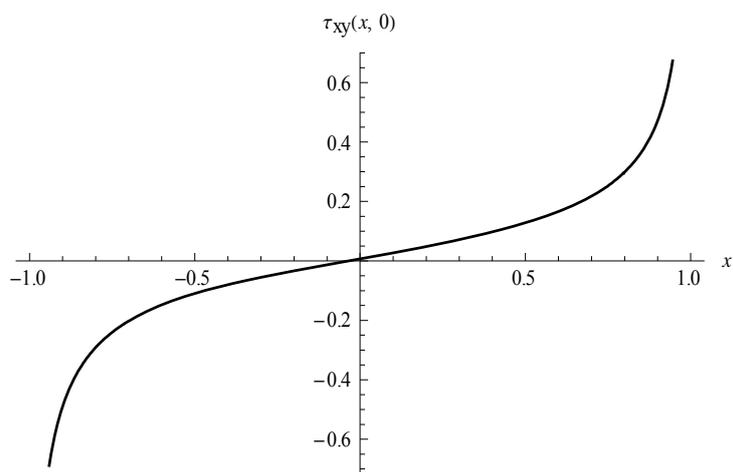
$$P = 1 \quad \frac{E_1}{E_2} = 0,25 \quad \frac{k_1}{k_2} = 1 \quad \frac{v_1}{v_2} = 0,5 \quad a = 1 \quad b = 4 \quad (31)$$

Тогда график нормального напряжения будет иметь следующий вид:



Фиг. 3

а график касательного напряжения будет иметь вид:



Фиг. 4

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В.С., Члингярян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с трещиной, перпендикулярной к границе раздела материалов. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. № 2. С.3-12.
2. Макарян В.С., Члингярян Г.С. Плоская и осесимметричная контактные задачи для упругой плоскости и пространства с жесткими включениями. //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №3. С.17-27.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 639с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
6.08.2008