ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 62, №1, 2009 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА СДВИГОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СЛОЕМ

Григорян Э.Х., Синанян С.С.

Ключевые слова: Пьезоэлектрическое пространство,бесконечный металлический слой, линейный источник, поверхностная волна, асимптотические формулы, дальняя зона.
Keywords: Piezoelectric space, infinite metallic layer, linear source, surface wave, asymptotic formula, farther zone.

Է.Խ. Գրիգորյան, Ս.Ս. Սինանյան
Անվերջ մետաղական շերտով պյեզոէլեկտրական տարածությունում սահքային տատանումների գծային աղբյուրի խնդիրը

Աշխատանքում դիտարկվում է անվերջ մետաղական շերտով պյեզոէլեկտրական տարածությունում հաստատված սահքային տատանումների գծային աղբյուրի խնդիրը: Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի իրական ձևափոխության օգնությամբ: Գտնված են տեղափոխության ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ բանաձևերը հեռավոր գոտում: Ցույց է տրված, որ անվերջ մետաղական շերտի առկայությունը բերում է մակերևութային ալիքի առաջացմանը և ալիքի առաջացմանը, որը ճառագայթի ուղղությամբ տարածվում է ճառագայթի բացվածքի անկյունից կախված արագությամբ:

E.Kh. Grigoryan, S.S. Sinanyan
Linear source of shift oscillations problem in piezoelectric space with infinite metallic layer

Linear source of established shift oscillations problem is discussed in piezoelectric space with infinite metallic layer. The problem is solved using Fourier real transformation. Shift amplitude asymptotic formulae in farther zone are found. It is shown that the existence of infinite metallic layer yields to appearance of surface wave and another wave spreading with a speed depending on the opening angle of direction.

В работе рассматривается задача линейного источника установившихся колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. Задача решается с помощью действительного преобразования Фурье. Относительно амплитуд перемещений получены асимптотические формулы в дальней зоне. Показано, что наличие бесконечного металлического слоя приводит к появлению поверхностной волны и волны, распространяющейся по направлению луча со скоростью зависящей от угла раствора луча.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса 6mm гексагональной симметрии с осью OZ, совпадающей с осью симметрии кристалла.В пьезоэлектрическом пространстве имеется включение в виде бесконечного заземленного тонкого металлического слоя. Считается, что толщина металлического слоя настолько мала, что его жесткостью можно пренебречь, т.е. слой можно рассматривать как электрод, занимающий плоскость $-\infty < x < \infty, y = 0, -\infty < z < \infty$.

Пьезоэлектрическое пространство совершает установившиеся колебания под действием линейного источника $F\delta(x)\delta(y - y_0)e^{-i\omega t}$, где $F-$интенсивность действуюшей силы, тогда величины характеризующие электроупругое поле, зависят от времени пропорцианально $e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнения относительно амплитуд перемещения $w(x, y)$ и квазистатического электрического потенциала $\varphi(x, y)$ примут вид [1]:

$$\begin{aligned} &\Delta w + k^2 w = P\delta(x)\delta(y-y_0) \\ &\Delta\varphi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 w = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} P\delta(x)\delta(y-y_0) \end{aligned} \qquad \text{при } y>0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &\Delta w + k^2 w = 0 \\ &\Delta\varphi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 w = 0 \end{aligned} \qquad \text{при } y<0 \qquad (2)$$

ε_{11} – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезомодуль, ω – частота колебаний, $k=\omega/c$ – волновое число, $c=\sqrt{c_{44}(1+æ)/\rho}$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, c_{44} – упругая постоянная, ρ – плотность среды, $P=F/c_{44}(1+æ)$, $æ=e_{15}{}^2/c_{44}\varepsilon_{11}$, $\delta(x),\delta(y)$ – функции Дирака, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Решения уравнений (1),(2) должны удовлетворять контактным условиям

$$w(x,+0)=w(x,-0),\ \sigma_{yz}(x,+0)=\sigma_{yz}(x,-0),\ \varphi(x,0)=0, \qquad (3)$$

где $\sigma_{yz}=c_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

Здесь следует отметить, что решение еще должно удовлетворять условию уходящей волны.

Для решения уравнений (1), (2) с условиями применим к ним действительное интегральное преобразование Фурье по x и получим

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}-\gamma^2\overline{w}=P\delta(y-y_0) \\ &\frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w}=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}P\delta(y-y_0) \end{aligned} \qquad \text{при } y>0 \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\overline{w}}{dy^2}-\gamma^2\overline{w}=0 \\ &\frac{d^2\overline{\varphi}}{dy^2}-\sigma^2\overline{\varphi}+k^2\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w}=0 \end{aligned} \qquad \text{при } y<0 \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} &\overline{w}(\sigma,+0)=\overline{w}(\sigma,-0),\ \overline{\varphi}(\sigma,0)=0 \\ &c_{44}\left.\frac{d\overline{w}}{dy}\right|_{y=+0}+e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=+0}=c_{44}\left.\frac{d\overline{w}}{dy}\right|_{y=-0}+e_{15}\left.\frac{d\overline{\varphi}}{dy}\right|_{y=-0} \end{aligned} \qquad (6)$$

где $\gamma^2=\sigma^2-k^2$, $\overline{f}(\sigma,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{i\sigma x}dx$, $f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma,y)e^{-i\sigma x}d\sigma$

Решение системы, представляющее уходящую волну, имеет вид:

$$\begin{aligned} &\overline{w}(\sigma,y)=C_1e^{-\gamma y}-\frac{P}{2\gamma}e^{-\gamma|y-y_0|} \\ &\overline{\varphi}(\sigma,y)=C_2e^{-|\sigma|y}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\overline{w} \end{aligned} \qquad \text{при } y>0 \qquad (7)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{w}(\sigma, y) = C_3 e^{\gamma y} \\
&\overline{\varphi}(\sigma, y) = C_4 e^{|\sigma| y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w}
\end{aligned}
\right\} \quad \text{при } y < 0 \tag{8}
$$

Выше имелось в виду, что $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$, $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, т.е. действительная ось комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ снизу [2].

Удовлетворив условиям (6), получим

$$
C_1 = C_3 + \frac{P}{2\gamma} e^{-\gamma y_0}, \; C_2 = C_4 = -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} C_3, \; C_3 = -\frac{P}{2} \frac{(1+æ) e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)}, \tag{9}
$$

где $K(\sigma) = (1+æ)\gamma - |\sigma| æ$.

Из (9) следует

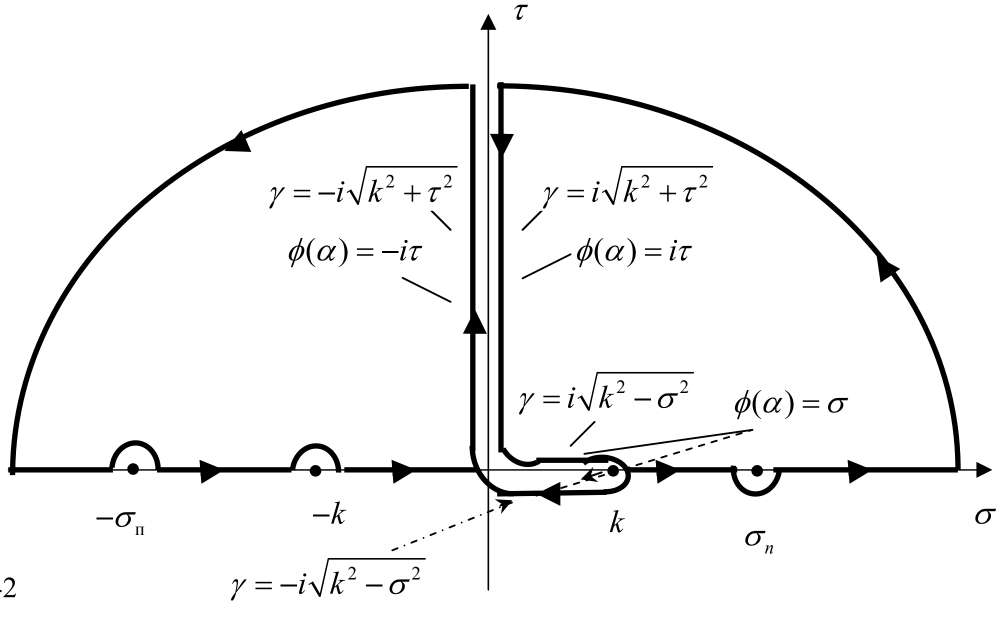
$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{w}(\sigma, y) = \left(-\frac{P}{2} \frac{(1+æ) e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)} + \frac{P}{2\gamma} e^{-\gamma y_0}\right) e^{-\gamma y} - \frac{P}{2\gamma} e^{-\gamma |y - y_0|} \\
&\overline{\varphi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{P}{2} \frac{(1+æ) e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)} e^{-|\sigma| y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w}(\sigma, y)
\end{aligned}
\right\} \quad \text{при } y > 0 \tag{10}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\overline{w}(\sigma, y) = -\frac{P}{2} \frac{(1+æ) e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)} e^{\gamma y} \\
&\overline{\varphi}(\sigma, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{P}{2} \frac{(1+æ) e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)} e^{|\sigma| y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \overline{w}(\sigma, y)
\end{aligned}
\right\} \quad \text{при } y < 0 \tag{11}
$$

$$
\overline{w}(\sigma, 0) = -\frac{P}{2} \frac{(1+æ) e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)} \tag{12}
$$

Применив обратное преобразование Фурье к (10), (11) (12), получим

$$
w(x, y) = w_{\text{отр}}(x, y) + w_{\text{ист}}(x, y), \; y > 0
$$



Фиг. 1.

где $$w_{\text{отр}}(x,y) = -\frac{P}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(1+æ)e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)} - \frac{e^{-\gamma y_0}}{\gamma}\right)e^{-\gamma y}e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (13)$$

$$w_{\text{ист}}(x,y) = -\frac{P}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\gamma|y-y_0|}}{\gamma}e^{-i\sigma x}d\sigma = -i\frac{P}{4}H_0^{(1)}(kr_0) \qquad (14)$$

где $r_0 = \sqrt{(y-y_0)^2 + x^2}$, $H_0^{(1)}(kr_0)$ – известная функция Ханкеля первого рода.

$$w(x,0) = -\frac{P}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+æ)e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (15)$$

$$w(x,y) = -\frac{P}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+æ)e^{-\gamma y_0}}{K(\sigma)}e^{\gamma y}e^{-i\sigma x}d\sigma\,,\ y<0 \qquad (16)$$

Заметим, что $K(\sigma)$ имеет нули в точках $\sigma = \pm\sigma_{\text{п}}$, $\sigma_{\text{п}} = (1+æ)k\big/\sqrt{1+2æ}$. Поэтому, чтобы выполнялись условия уходящей волны, контур интегрирования (действительная ось) должен обходить точку $\sigma = -\sigma_{\text{п}}$ сверху , а точку $\sigma = \sigma_{\text{п}}$ снизу. Далее вычислим интегралы (13)–(16) при $x<0$ с помощью метода контурного интеграла в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, указанными на фиг.1, получим

$$w_{\text{отр}}(x,y) = S(x,y) - \frac{P}{4\pi}I_1(x,y) - \frac{P}{4\pi}I_2(x,y) \qquad (17)$$

$$\begin{aligned} w_{\text{ист}}(x,y) = -\frac{P}{4\pi}\Bigg(&\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau^2+k^2}}e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}|y-y_0|}e^{-\tau|x|}d\tau + \\ +&\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau^2+k^2}}e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}|y-y_0|}e^{-\tau|x|}d\tau - \int_0^{k}\frac{1}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}|y-y_0|}e^{i\sigma|x|}d\sigma - \\ -&\int_0^{k}\frac{1}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}}e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}|y-y_0|}e^{i\sigma|x|}d\sigma\Bigg) \end{aligned} \qquad (18)$$

$$w(x,y) = S(x,y) - \frac{P}{4\pi}I_3(x,y) - \frac{P}{4\pi}I_2(x,y);\ y<0 \qquad (19)$$

$$S(x,y) = -\frac{P}{2}i\frac{(1+æ)æe^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2-k^2}y_0}e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2-k^2}|y|}}{1+2æ}e^{i\sigma_{\text{п}}|x|}$$

$$w(x,0) = S(x,0) - \frac{P}{4\pi}w_1(x) - \frac{P}{4\pi}w_2(x) \qquad (20)$$

$$\begin{aligned} I_1(x,y) = &\int_0^{\infty}\Phi_1(\tau,y_0)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}|y|}e^{-\tau|x|}d\tau + \int_0^{\infty}\Phi_1(-\tau,-y_0)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}|y|}e^{-\tau|x|}d\tau - \\ -&\int_0^{k}\Psi_1(-\sigma,-y_0)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}|y|}e^{i\sigma|x|}d\sigma - \int_0^{k}\Psi_1(\sigma,y_0)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}|y|}e^{i\sigma|x|}d\sigma \end{aligned}$$

где

$$\Phi_1(\tau, y_0) = \frac{(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)-\tauæ} - \frac{e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}},$$

$$\Psi_1(\sigma, y_0) = \frac{(1+æ)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)+\sigmaæ} - \frac{e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}},$$

$$I_2(x,y) = \int_0^\infty \frac{2(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\tauæ}{k^2(1+æ)^2+\tau^2(1+2æ)} e^{-\tau|x|}e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}|y|}d\tau,$$

$$I_3(x,y) = \int_0^\infty \Phi_2(\tau, y_0)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}|y|}e^{-\tau|x|}d\tau + \int_0^\infty \Phi_2(-\tau, -y_0)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}|y|}e^{-\tau|x|}d\tau -$$

$$-\int_0^k \Psi_2(\sigma, y_0)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}|y|}e^{i\sigma|x|}d\sigma - \int_0^k \Psi_2(-\sigma, -y_0)e^{i\sqrt{k^2-\sigma^2}|y|}e^{i\sigma|x|}d\sigma$$

где

$$\Phi_2(\tau, y_0) = \frac{(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)-\tauæ}, \quad \Psi_2(\sigma, y_0) = \frac{(1+æ)e^{-i\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0}}{i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)-\sigmaæ}$$

$$\begin{gathered} w_1(x) = \int_0^\infty \frac{(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)-\tauæ}e^{-\tau|x|}d\tau + \int_0^\infty \frac{(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)+\tauæ}e^{-\tau|x|}d\tau - \\ -2i(1+æ)\int_0^k \Psi_0(\sigma)e^{i\sigma|x|}d\sigma, \end{gathered} \tag{21}$$

$$w_2(x) = \int_0^\infty \frac{2\tauæ(1+æ)}{k^2(1+æ)^2+\tau^2(1+2æ)}e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}e^{-\tau|x|}d\tau,$$

$$\Psi_0(\sigma) = \frac{\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+æ)\cos(\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0) - \sigmaæ\sin(\sqrt{k^2-\sigma^2}y_0)}{\sigma^2(1+2æ)-k^2(1+æ)^2}.$$

Отметим также, что в силу симметричности задачи по x, полученные представления $w(x,y)$ справедливы и при $x>0$.

Итак, получили представление $w(x,y)$ в виде суммы поверхностной волны и регулярных интегралов. Чтобы получить представления о влиянии воздействии электрода на характер волнового поля в пьезоэлектрике, следует определить асимптотические формулы $w(x,y)$ в далеких от начала координат точках. Асимптотические формулы определим методом, ранее использованным в работе [3]. Рассмотрим случай, когда:

а) $y=0, |x|\to\infty$. Сначала исследуем $w_1(x)$. Асимптотическую формулу для $w_1(x)$ получим, проводя интегрирование по частям входящих в формулу $w_1(x)$ интегралов. Интегралы с полубесконечными пределами можно интегрировать сколь угодно раз, а интегралы с конечными пределами непосредственно нельзя больше чем один раз интегрировать по частям, поскольку вторая производная подынтегралных выражений при экспоненте не интегрируема.

Имея в виду, что $\Psi_0(\sigma) - a_1\sqrt{k-\sigma} - a_2(k-\sigma)^{\frac{3}{2}} = O(k-\sigma)^{\frac{5}{2}}$, $\sigma \to k$,

где $a_1 = -\dfrac{\sqrt{2k}(1+æ-kæy_0)}{k^2æ^2}$, $a_2 = \text{const}$,

(21) запишем в виде:

$$w_1(x) = \int_0^\infty \frac{(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)-\tauæ}e^{-\tau|x|}d\tau + \int_0^\infty \frac{(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)+\tauæ}e^{-\tau|x|}d\tau -$$
$$-2i(1+æ)(\int_0^k e^{i\sigma|x|}(\Psi_0(\sigma) - a_1\sqrt{k-\sigma} - a_2(k-\sigma)^{\frac{3}{2}})d\sigma- \tag{22}$$
$$-\int_{-\infty}^0 e^{i\sigma|x|}(a_1\sqrt{k-\sigma} + a_2(k-\sigma)^{\frac{3}{2}})d\sigma + q_0(x)),$$

$q_0(x) = -a_1\dfrac{1}{2|x|^{\frac{3}{2}}}e^{i(|kx|+\frac{\pi}{4})}\sqrt{\pi} + a_2 e^{i(|kx|-\frac{\pi}{4})}\dfrac{3}{4|x|^{\frac{5}{2}}}\sqrt{\pi}$, выше имелось в виду, что

$$\int_{-\infty}^k e^{i\sigma|x|}\sqrt{k-\sigma}d\sigma = -\sqrt{\pi}\frac{e^{i(|kx|+\frac{\pi}{4})}}{2|x|^{\frac{3}{2}}}, \int_{-\infty}^k e^{i\sigma|x|}(k-\sigma)^{\frac{3}{2}}d\sigma = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\frac{e^{i(|kx|-\frac{\pi}{4})}}{|x|^{\frac{5}{2}}}$$

в полученном представлении (22) все интегралы допускают интегрирование по частям три раза, после интегрирования по частям –два раза. Получим

$$w_1(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{d^2}{d\tau^2}(\frac{(1+æ)e^{-i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)-\tauæ})e^{-\tau|x|}d\tau +$$
$$+\frac{1}{x^2}\int_0^\infty \frac{d^2}{d\tau^2}(\frac{(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}}{\sqrt{\tau^2+k^2}(1+æ)+\tauæ})e^{-\tau|x|}d\tau -$$
$$-2i(1+æ)(\frac{1}{x^2}\int_0^k \frac{d^2}{d\sigma^2}(\Psi_0(\sigma) - a_1\sqrt{k-\sigma} - a_2(k-\sigma)^{\frac{3}{2}})e^{i\sigma|x|}d\sigma - \tag{23}$$
$$-\frac{1}{x^2}\int_{-\infty}^0 \frac{d^2}{d\sigma^2}(a_1\sqrt{k-\sigma} + a_2(k-\sigma)^{\frac{3}{2}})e^{i\sigma|x|}d\sigma) - 2i(1+\kappa)q_0(x)$$

Каждый из интегралов, входящих в $w_1(x)$ при $|x| \to \infty$, имеют порядок $|x|^{-1}$, в чем можно убедиться после интегрирования по частям. Отсюда следует асимптотическая формула

$$w_1(x) = \sqrt{2\pi}\frac{(1+æ)(1+æ-kæy_0)}{æ^2}\frac{e^{i|kx|-\frac{\pi}{4}}}{|kx|^{\frac{3}{2}}} + O(\frac{1}{|kx|^{\frac{5}{2}}}) \quad \text{при } |kx| \to \infty. \tag{24}$$

Для получения асимптотической формулы для $w_2(x)$ проведём интегрирование по частям:

$$w_2(x)=\frac{1}{(kx)^2}\frac{2æe^{iky_0}}{(1+æ)}-\frac{1}{|x|^3}\int_0^\infty\frac{d^3}{d\tau^3}\left(\frac{2\tauæ(1+æ)}{k^2(1+æ)^2+\tau^2(1+2æ)}e^{i\sqrt{\tau^2+k^2}y_0}\right)e^{-\tau|x|}d\tau \qquad (25)$$

Интеграл, входящий в $w_2(x)$ при $|x|\to\infty$, имеет порядок $|x|^{-1}$, в чём можно убедиться, проводя интегрирования по частям, следовательно,

$$w_2(x)=\frac{1}{(kx)^2}\frac{2æe^{iky_0}}{(1+æ)}+O\left(\frac{1}{(kx)^4}\right),\quad |kx|\to\infty.$$

Таким образом, асимптотическая формула для $w(x,0)$ согласно (24), (25) при $|kx|\to\infty$, имеет вид

$$w(x,0)=-\frac{P}{2}i\frac{(1+æ)æe^{-\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}y_0}}{1+2æ}e^{i\sigma_п|x|}-$$
$$-P\frac{(1+æ)(1+æ-kæy_0)}{2\sqrt{2\pi}æ^2}\frac{e^{i|kx|-\frac{\pi}{4}}}{|kx|^{\frac{3}{2}}}-\frac{P}{2\pi}\frac{æ}{(1+æ)}\frac{e^{iky_0}}{(kx)^2}+O\left(\frac{1}{|kx|^{\frac{5}{2}}}\right); \qquad (26)$$

б) $y>0$, $r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$. Для начала рассмотрим $I_1(x,y)$. Переходя к полярным координатам $x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$ и сделав замену переменных $\lambda_1=\sigma|\cos\theta|-\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta$, $\lambda_2=\sigma|\cos\theta|+\sqrt{k^2-\sigma^2}\sin\theta$, для $I_1(x,y)$ получим:

$$I_1(x,y)=\int_0^\infty\Phi_1(\tau,y_0)e^{-n_1(\tau)r}d\tau+\int_0^\infty\Phi_1(-\tau,-y_0)e^{-n_2(\tau)r}d\tau-$$
$$-\int_{-k\sin\theta}^{k|\cos\theta|}\Psi_1(-\sigma_1,-y_0)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1}e^{i\lambda_1 r}d\lambda_1-\int_{k\sin\theta}^{k}\Psi_1(\sigma_2,y_0)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2+$$
$$+\int_{k|\cos\theta|}^{k}\Psi_1(\sigma_1,y_0)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2}e^{i\lambda_2 r}d\lambda_2,$$

где $\sigma_1(\lambda_i)=\lambda_i\,|\cos\theta|+\sin\theta\sqrt{k^2-\lambda_i{}^2},\ \ i=1,2$;

$\sigma_2(\lambda_2)=\lambda_2\,|\cos\theta|-\sin\theta\sqrt{k^2-\lambda_2^2}$,

$n_1(\tau)=i\sqrt{\tau^2+k^2}\sin\theta+\tau|\cos\theta|,\qquad n_2(\tau)=-i\sqrt{\tau^2+k^2}\sin\theta+\tau|\cos\theta|$

$$\frac{d\sigma_i}{d\lambda_i}=\frac{\sqrt{k^2-\sigma_i^2}}{\sqrt{k^2-\lambda_i^2}},\ i=1,2;\qquad \frac{d\sigma_1}{d\lambda_2}=-\frac{\sqrt{k^2-\sigma_1^2}}{\sqrt{k^2-\lambda_2^2}}$$

выше имелось в виду, что $\lambda_2{}'(\sigma)>0$ при $\sigma>0$ и $\sigma<k|\cos\theta|$, а при $\sigma>k|\cos\theta|$ и $\sigma<k$ $-\ \lambda_2{}'(\sigma)<0$.

Ввиду того, что в окрестности точки $\lambda_2 = k$ имеют место разложения

$$\Psi_1(\sigma_1, y_0)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_2} - \Psi_{10}(\sigma_1, y_0) = O(k-\lambda_2)^{\frac{5}{2}}$$

$$\Psi_1(\sigma_2, y_0)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2} - \Psi_{20}(\sigma_2, y_0) = O(k-\lambda_2)^{\frac{5}{2}}, \ \lambda_2 \to k,$$

где

$$\Psi_{10}(\sigma_1, y_0) = -\frac{b_1}{\sqrt{k-\lambda_2}} + b_2 - b_3\sqrt{k-\lambda_2} + b_4(k-\lambda_2) - b_5(k-\lambda_2)^{\frac{3}{2}} + b_6(k-\lambda_2)^2$$

$$\Psi_{20}(\sigma_2, y_0) = \frac{b_1}{\sqrt{k-\lambda_2}} + b_2 + b_3\sqrt{k-\lambda_2} + b_4(k-\lambda_2) + b_5(k-\lambda_2)^{\frac{3}{2}} + b_6(k-\lambda_2)^2$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta\ \Psi_1(k|\cos\theta|, y_0),$$

$$b_2 = |\cos\theta|\,\Psi_1(k|\cos\theta|, y_0) - k\sin^2\theta\left.\frac{d\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|}$$

$$b_3 = b_{31}\Psi_1(k|\cos\theta|, y_0) + b_{32}\left.\frac{d\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma}\right|_{\sigma=k|\cos(\theta)|} + b_{33}\left.\frac{d^2\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|}$$

$$b_4 = b_{41}\left.\frac{d\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|} + b_{42}\left.\frac{d^2\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|} + b_{43}\left.\frac{d^3\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^3}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|}$$

$$b_5 = b_{51}\Psi_1(k|\cos\theta|, y_0) + b_{52}\left.\frac{d\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|} + b_{53}\left.\frac{d^2\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|} +$$

$$+b_{54}\left.\frac{d^3\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^3}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|}$$

$$b_6 = b_{61}\left.\frac{d^2\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|} + b_{62}\left.\frac{d^3\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^3}\right|_{\sigma=k|\cos\theta|}$$

$$b_{31} = -\frac{3\sin\theta}{4\sqrt{2k}}, \ b_{32} = -|\cos\theta|\sin\theta\frac{3\sqrt{2k}}{2}, \ b_{33} = \frac{k^{\frac{3}{2}}\sin^3\theta}{\sqrt{2}}$$

$$b_{41} = -\cos 2\theta, a_{42} = 2k\sin^2\theta|\cos\theta|, \ b_{43} = -\frac{k^2\sin^4\theta}{3}$$

$$b_{51} = -\frac{5\sin\theta}{32\sqrt{2}k^{\frac{3}{2}}}, b_{52} = \frac{5\sin\theta}{4\sqrt{2k}}|\cos\theta|,$$

$$b_{53} = \sqrt{2k}\sin\theta\frac{10-15\sin^2\theta}{8}, b_{54} = -\frac{5\sqrt{2}}{6}\sin^3\theta\,|\cos\theta|\,k^{\frac{3}{2}}$$

$$b_{61} = \frac{1-4\sin^2\theta}{2}|\cos\theta|, b_{62} = \frac{1}{2}k\sin^2\theta(1-3\cos^2\theta)$$

получим

$$I_1(x,y)=\int_0^\infty \Phi_1(\tau,y_0)e^{-n_1(\tau)r}d\tau+\int_0^\infty \Phi_1(-\tau,-y_0)e^{-n_2(\tau)r}d\tau-$$

$$-\int_{-k\sin\theta}^{k|\cos\theta|}\Psi_1(-\sigma_1,-y_0)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1}e^{ir\lambda_1}d\lambda_1-$$

$$-\int_{k\sin\theta}^{k}(\Psi_1(\sigma_2,y_0)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}-\Psi_{20}(\sigma_2,y_0))e^{ir\lambda_2}d\lambda_2+$$

$$+\int_{k|\cos\theta|}^{k}(\Psi_1(\sigma_2,y_0)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}-\Psi_{10}(\sigma_2,y_0))e^{ir\lambda_2}d\lambda_2+$$

$$+\int_{-\infty}^{k\sin\theta}\Psi_{20}(\sigma_2,y_0)e^{ir\lambda_2}d\lambda_2-\int_{-\infty}^{k|\cos\theta|}\Psi_{10}(\sigma_2,y_0)e^{ir\lambda_2}d\lambda_2+q_1(r),$$

$$q_1(r)=-2\sqrt{\pi}b_1\frac{e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{r}}+\sqrt{\pi}b_3\frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{r^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{\pi}b_5\frac{3e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}}{2r^{\frac{5}{2}}}\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{k}\frac{e^{i\lambda_2 r}}{\sqrt{k-\lambda_2}}d\lambda_2=\sqrt{\pi}\frac{e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{r}}\ ,$$

нетрудно заметить, что интегралы в представлении $I_1(x,y)$ допускают интегрирование по частям три раза.Тогда после интегрирования два раза по частям получим

$$I_1(x,y)=\frac{1}{r^2}\int_0^\infty\frac{d}{d\tau}(\frac{1}{n_1'(\tau)}\frac{d}{d\tau}(\frac{1}{n_1'(\tau)}\Phi_1(\tau,y_0)))e^{-n_1(\tau)r}d\tau+$$

$$+\frac{1}{r^2}\int_0^\infty\frac{d}{d\tau}(\frac{1}{n_2'(\tau)}\frac{d}{d\tau}(\frac{1}{n_2'(\tau)}\Phi_1(-\tau,-y_0)))e^{-n_2(\tau)r}d\tau-$$

$$-\frac{1}{r^2}\int_{-k\sin\theta}^{k|\cos\theta|}\frac{d^2}{d\lambda_1{}^2}(\Psi_1(-\sigma_1,-y_0)\frac{d\sigma_1}{d\lambda_1})e^{ir\lambda_1}d\lambda_1-$$

$$-\frac{1}{r^2}\int_{k\sin\theta}^{k}\frac{d^2}{d\lambda_2{}^2}(\Psi_1(\sigma_2,y_0)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}-\Psi_{20}(\sigma_2))e^{ir\lambda_2}d\lambda_2+$$

$$+\frac{1}{r^2}\int_{k|\cos\theta|}^{k}\frac{d^2}{d\lambda_2{}^2}(\Psi_1(\sigma_2,y_0)\frac{d\sigma_2}{d\lambda_2}-\Psi_{10}(\sigma_2))e^{ir\lambda_2}d\lambda_2+$$

$$+\frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{k\sin\theta}\frac{d^2\Psi_{20}(\sigma_2,y_0)}{d\lambda_2{}^2}e^{ir\lambda_2}d\lambda_2-\frac{1}{r^2}\int_{-\infty}^{k|\cos\theta|}\frac{d^2\Psi_{10}(\sigma_2,y_0)}{d\lambda_2{}^2}e^{ir\lambda_2}d\lambda_2+q_1(r) \qquad (27)$$

Каждый из интегралов, входящих в формулу $I_1(x,y)$, имеет порядок r^{-1} при $r\to\infty$, в чем можно убедиться, проводя интегрирование по частям. Следовательно, при $kr\to\infty$ получим формулу

$$I_1(x,y)=-2\sqrt{\pi}b_1\frac{e^{i(kr-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{r}}+\sqrt{\pi}b_3\frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{r^{\frac{3}{2}}}+O(\frac{1}{r^{\frac{5}{2}}}),$$

где $b_1 = \sqrt{\frac{1}{2k}}\sin\theta \; \frac{(1+æ)e^{ik\sin\theta y_0}}{æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\sin\theta} + \sqrt{\frac{1}{2k}} i e^{iky_0\sin\theta}$, $b_3 = \sqrt{2}k^{-\frac{3}{2}}(b_{31}^{(1)} + b_{32}^{(1)})$,

$$b_{31}^{(1)} = (1+æ)e^{ik\left|\sin\theta\right|y_0}(\frac{1}{8}\frac{-3\left|\sin\theta\right| + 12iky_0\cos^2\theta - 4ky_0(i + ky_0\left|\sin\theta\right|\cos^2\theta)}{æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\left|\sin\theta\right|} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\left|\cos\theta\right|(3 + iky_0\left|\sin\theta\right|)(æ\left|\sin\theta\right| - i(1+æ)\left|\cos\theta\right|) + i(1+æ)}{(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\left|\sin\theta\right|)^2} +$$

$$+\frac{\left|\sin\theta\right|(æ\left|\sin\theta\right| - i(1+æ)\left|\cos\theta\right|)^2}{(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\left|\sin\theta\right|)^3}),$$

$$b_{32}^{(1)} = e^{iky_0\sin\theta}(\frac{4(ky_0\sin\theta - ik^2y_0{}^2\cos^2\theta) + i}{8}).$$

Здесь

$$\Psi_1(k\left|\cos\theta\right|, y_0) = \frac{ie^{iy_0k\sin\theta}}{k\sin\theta} + \frac{e^{iy_0k\sin\theta}(1+æ)}{k(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\sin\theta)},$$

$$\left.\frac{d\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma}\right|_{\sigma = k\left|\cos\theta\right|} = i\frac{e^{iy_0k\sin\theta}y_0\left|\cos\theta\right|}{k^2\sin^3\theta} + \frac{e^{iy_0k\sin\theta}y_0\left|\cos\theta\right|}{k\sin^2\theta} -$$

$$-\frac{e^{iy_0k\sin\theta}y_0(1+æ)(æ\sin\theta - i(1+æ)\left|\cos\theta\right|)}{\sin\theta k^2(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\sin\theta)^2} - i\frac{e^{iy_0k\sin\theta}y_0(1+æ)\left|\cos\theta\right|)}{\sin\theta k(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\sin\theta)}$$

$$\left.\frac{d^2\Psi_1(\sigma, y_0)}{d\sigma^2}\right|_{\sigma = k\left|\cos\theta\right|} = \frac{e^{iy_0k\sin\theta}y_0(2\cos^2\theta + 1)}{k^2\sin^4\theta} + ie^{iy_0k\sin\theta}\frac{2(2\cos^2\theta + 1) - y_0{}^2k^2\sin 2\theta}{2k^3\sin^5\theta} +$$

$$+\frac{ie^{iy_0k\sin\theta}(1+æ)(2y_0k\left|\cos\theta\right|(æ\sin\theta - i(1+æ)\left|\cos\theta\right|) + (1+\kappa))}{k^3\sin^3\theta(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\sin\theta)^2} -$$

$$-\frac{e^{iy_0k\sin\theta}(1+æ)(iy_0 + ky_0{}^2\sin\theta\cos^2\theta)}{k^2\sin^3\theta(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\sin\theta)} +$$

$$+\frac{2(1+æ)e^{iy_0k\sin\theta}(æ\sin\theta - i(1+æ)\left|\cos\theta\right|)^2}{k^3\sin^2\theta(æ\left|\cos\theta\right| + i(1+æ)\sin\theta)^3}.$$

После интегрирования два раза по частям для $I_2(x, y)$ получим

$$I_2(x, y) = \frac{2æe^{iky_0}}{k^2(1+æ)\cos^2(\theta)}\frac{e^{ikr\sin(\theta)}}{r^2} +$$

$$+\frac{1}{r^2}\int_0^\infty \frac{d}{d\tau}(\frac{1}{n_2'(\tau)}\frac{d}{d\tau}(\frac{1}{n_2'(\tau)}\frac{2(1+æ)e^{i\sqrt{\tau^2 + k^2}y_0}æ\kappa}{k^2(1+æ)^2 + \tau^2(1+2æ)}))e^{-n_2(\tau)r}d\tau$$

Интеграл, входящий в формулу $I_2(x, y)$, имеет порядок r^{-1} при $r \to \infty$, в чем можно убедиться, проводя интегрирование по частям.

Таким образом, для $w_{\text{отр}}(x, y)$ при $kr \to \infty$ получили асимптотическую формулу

$$w_{\text{отр}}(x,y)=S(x,y)+\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(1+æ)e^{iky_0\sin\theta}\sin\theta}{(æ|\cos\theta|+i(1+æ)\sin\theta)}+ie^{iky_0\sin\theta}\right)\frac{e^{i(rk-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}}- \tag{28}$$

$$-\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}(b_{31}^{(1)}+b_{32}^{(1)})\frac{e^{i(kr+\frac{\pi}{4})}}{(kr)^{\frac{3}{2}}}-\frac{P}{2\pi}\frac{æe^{iky_0}}{(1+æ)\cos^2(\theta)}\frac{e^{ikr\sin(\theta)}}{(kr)^2}+O\left(\frac{1}{(kr)^{\frac{5}{2}}}\right).$$

Поступая аналогичным для $w_{\text{ист}}(x,y)$, получим формулу

$$w_{\text{ист}}(x,y)=-\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i(kr_0+\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr_0}}-\frac{P}{16\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i(kr_0-\frac{\pi}{4})}}{(kr_0)^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{(kr_0)^{\frac{5}{2}}}\right)\quad \text{при } kr_0\to\infty \tag{29}$$

где $r_0=r-y_0\sin\theta+\dfrac{y_0^2\cos^2\theta}{2r}+O\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$ при $r\to\infty$ (30)

$$r_0^{-\frac{1}{2}}=r^{-\frac{1}{2}}+\frac{y_0\sin\theta}{2}r^{-\frac{3}{2}}+O(r^{-\frac{5}{2}})\qquad \text{при } r\to\infty \tag{31}$$

Имея в виду (30), (31), асимптотическая формула (29) при $kr\to\infty$ примет вид

$$\begin{aligned} w_{\text{ист}}(x,y)=&-\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ik(r-y_0\sin\theta)+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{kr}}-\\ &-\frac{P}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{4k(y_0\sin\theta+iky_0^2\cos^2\theta)-i}{16}\right)\frac{e^{ik(r-y_0\sin\theta)+i\frac{\pi}{4}}}{(kr)^{\frac{3}{2}}}+O\left(\frac{1}{(kr)^{\frac{5}{2}}}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

Имея в виду (32) и (28), при $kr\to\infty$ получим

$$\begin{aligned} w(x,y)=&-\frac{P}{2}i\frac{(1+æ)æe^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2-k^2}y_0}e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2-k^2}y}}{1+2æ}e^{i\sigma_{\text{п}}|x|}+\\ &+\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(1+æ)e^{iky_0\sin\theta}\sin\theta}{(æ|\cos\theta|+i(1+æ)\sin\theta)}-2\sin(ky_0\sin\theta)\right)\frac{e^{i(rk-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}}-\\ &-\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}(b_{31}^{(1)}+b_{33}^{(1)})\frac{e^{i(rk+\frac{\pi}{4})}}{(kr)^{\frac{3}{2}}}-\frac{P}{2\pi}\frac{æe^{iky_0}}{(1+æ)\cos^2(\theta)}\frac{e^{ikr\sin(\theta)}}{(kr)^2}+O\left(\frac{1}{(kr)^{\frac{5}{2}}}\right), \end{aligned} \tag{33}$$

где

$$b_{33}^{(1)}=k(-y_0\sin\theta\cos(ky_0\sin\theta)+y_0^2k\cos^2\theta\sin(ky_0\sin\theta))+\frac{\sin(ky_0\sin\theta)}{4};$$

в) $y<0$, $r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$. Поступая как в пункте б), в рассматриваемом случае при $kr\to\infty$ будем иметь

$$w(x,y)=-\frac{P}{2}i\frac{(1+æ)æe^{-\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}y_0}e^{\sqrt{\sigma_п{}^2-k^2}y}}{1+2æ}e^{i\sigma_п|x|}+$$
$$+\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{(1+æ)e^{iky_0\sin\theta}\sin\theta}{(æ|\cos\theta|-i(1+æ)\sin\theta)}\right)\frac{e^{i(rk-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{kr}}- \tag{34}$$
$$-\frac{P}{2\sqrt{2\pi}}b_{31}^{(2)}\frac{e^{i(rk+\frac{\pi}{4})}}{(kr)^{\frac{3}{2}}}-\frac{P}{2\pi}\frac{æe^{iky_0}}{(1+æ)\cos^2(\theta)}\frac{e^{-ikr\sin(\theta)}}{(kr)^2}+O\left(\frac{1}{(kr)^{\frac{5}{2}}}\right),$$

где

$$b_{31}^{(2)}=(1+æ)e^{-ik\sin\theta y_0}\left(\frac{1}{8}\frac{3\sin\theta+12iky_0\cos^2\theta-4ky_0(i-ky_0\sin\theta\cos^2\theta)}{æ|\cos\theta|-i(1+æ)|\sin\theta|}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\frac{-|\cos\theta|(3-iky_0\sin\theta)(æ\sin\theta+i(1+æ)|\cos\theta|)+i(1+æ)}{(æ|\cos\theta|-i(1+æ)\sin\theta)^2}-$$
$$\left.-\frac{\sin\theta(æ\sin\theta+i(1+æ)|\cos\theta|)^2}{(æ|\cos\theta|-i(1+æ)\sin\theta)^3}\right).$$

Отметим, что при отсутствии электрода $W(x,y)=w_{ист}(x,y)$. Тогда из формул (26) следует, что наличие электрода приводит к появлению поверхностной волны – первый член в (26), и неволновой части – третий член в формуле (26), а также к изменению поведения сдвиговой объемной волны (цилиндрической волны) при $|kx|\to\infty$.

Из асимптотических формул (33), (34) следует , что наличие электрода приводит к появлению поверхностной волны – первый член в (33), (34), который почти исчезает при $kr\to\infty$, и волны – четвёртый член в (33), (34), распространяющийся по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $c/\sin\theta$ (или распространяющийся по направлению y со скоростью c).

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Б.Нобл. Метод Винера–Хопфа. М.: Изд.ИЛ, 1962. 279с.
3. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны упругого волновода в составное упругое пространство. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23–37.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
20.08.2008