

УДК 539.3

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПОДВИЖНЫМИ
КОНЦАМИ, ОДИН ИЗ КОТОРЫХ НАГРУЖЕН И ОПИРАЕТСЯ НА
ПРУЖИНУ

Бабаян С.А.

Ключевые слова: стержень, продольные колебания, пружина.

Key words: bar, longitudinal vibrations, spring.

Ս.Հ. Բաբայան

Մի ծայրով բեռնված և զապանակին հենված շարժական ծայրերով ձողի երկայնական
տատանումները

Հոդվածում քննարկվում է ձողի երկայնական տատանումները, որի մի ծայրը տեղափոխվում է ըստ առաջադրված օրենքի, իսկ հակառակը՝ բեռնված է և հենված զապանակին: Ի տարբերություն նավթարդյունահանման մեջ օգտագործվող սյունային ձողերի համար գրականության մեջ տրված այդ խնդրի լուծման եղանակի, որը հիմնված է հարվածային բնույթի առանձգական ալիքների տարածման ուսումնասիրման վրա, ձողի դեֆորմացիաները որոշված են Ս.Պ. Տիմոշենկոյի եղանակով օգտագործելով նորմալ ֆունկցիաները:

Արդյունքում հաշվարկային առավելագույն լարումը զգալիորեն նվազում է:

S.H. Babayan

The bar's longitudinal vibrations with movable edges one of which is loaded and spring-supported

In this article the longitudinal vibrations of bar is considered. One edge of a bar is transferred according to the offered law, the opposite one is loaded and spring-supported. In contrast to described in literature method of this problem solution for pillar bars in petroleum production based on investigation of elastic waves propagation of percussive character, the bar's deformations are determined by the method of S.P. Timoshenko by using normal functions. As a result the calculated maximal tensions are significantly decreased.

В статье рассматриваются продольные колебания стержня, один конец которого с ускорением перемещается по заданному закону, а противоположный нагружен массой и опирается на пружину.

В отличие от описанного в литературе способа решения этой задачи для колонны штанг в нефтедобыче, основанного на изучении распространения упругих волн ударного характера, деформации стержня определены по методу С.П.Тимошенко с использованием нормальных функций. В результате расчетные максимальные напряжения значительно снижаются.

Продольные упругие колебания стержней с различными начальными и граничными условиями достаточно подробно изучены в работе С.П.Тимошенко [1]

В частности, решены задачи колебаний стержней с подвижными опорами, стержней, несущих на концах нагрузку и опирающихся на пружину.

Нефтедобыча является одной из отраслей, где может быть применен метод С.П.Тимошенко, в частности, при расчете максимальных нагрузок в колонне штанг, на которых подвешен плунжер погружного насоса (фиг. 1а).

В колонне штанг для добычи нефти, помимо статических, возникают и динамические нагрузки вследствие продольных колебаний колонны.

Процесс подъема жидкости разбивается на две стадии – период начальной деформации, когда происходит постепенное нагружение штанг силой веса столба жидкости, и период перемещения нагруженных штанг с плунжером [2].

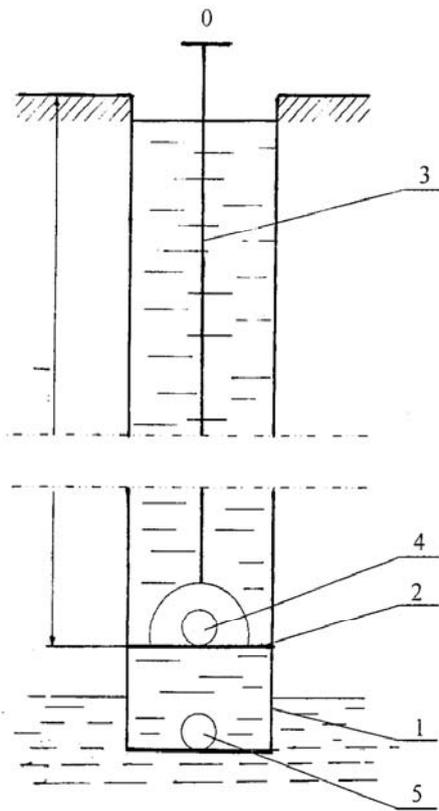


Рис. 1а. Схема насосной установки
 1-колонна обсадная
 2-плунжер
 3-колонна штанг
 4-клапан нагнетательный
 5-клапан всасывающий

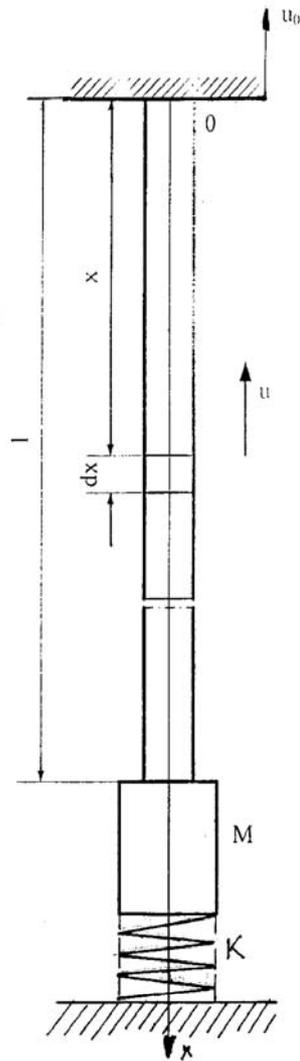


Рис. 1б. Схема нагружения
 колонны штанг

По сложившейся традиции эти нагрузки определяют, используя решение волнового уравнения в виде

$$u = f(t - x/c) + f_1(t + x/c)$$

где u – упругие перемещения сечения с координатой x , c – скорость распространения звука в колонне [2,3].

Однако, как считает С.П.Тимошенко, такое решение приемлемо для случая ударного приложения нагрузки, а для обычного нагружения автор рекомендует метод решения задачи продольных колебаний стержня с использованием главных (или нормальных) функций, описывающих форму собственных колебаний.

В работе [4] определены динамические нагрузки в колонне штанг по методу С.П.Тимошенко для стадии подъема жидкости и показано, что максимальные значения этих величин, рассчитанные по принятому методу [2], завышены в 1,5–2 раза.

В связи с этим представляет интерес расчета динамических нагрузок по этому же методу [4] и для начальной стадии хода вверх, когда происходит постепенное нагружение колонны штанг силой веса столба жидкости.

Как видно из фиг.1а, для начальной стадии хода вверх оба клапана закрыты и вес столба жидкости передается на колонну обсадных труб, свободно подвешенных к устью скважины.

Колонна растянута силой Mg на величину $\Delta l_T = Mgl / Ef_T$, где f_T – площадь поперечного сечения обсадных труб по металлу, M – масса столба жидкости.

Действие силы упругости растянутой колонны эквивалентно действию силы упругости сжатой пружины $Q_{np} = K \cdot \Delta l_T$, где $K = Ef_T / l$ – жесткость пружины.

Штанги не нагружены, и их удлинение $\Delta l_{ш} = 0$. Точка О подвеса штанг к балансиру станка-качалки, привод которого представляет четырехзвенник, перемещается по известному закону $u_0(t)$ [4].

При таких условиях расчет вибраций в колонне штанг можно вести по схеме (фиг.1б). Отметим, что эта схема обобщает два исследованных варианта колебаний стержня с подпружиненной массой на конце, но с неподвижными опорами, и стержня с подвижными опорами, но без массы и пружины на конце [1].

Динамическую составляющую перемещения произвольного сечения x стержня можно найти, используя интеграл Дюамеля из выражения [1]

$$u^* = - \sum_{l=1}^{\infty} (X_l / p_l) \int_0^l X_l \int_0^t \ddot{y}_{ст}(x, t^1) \sin p_l(t - t^1) dt^1 dx, \quad (1)$$

где X_l – функция от x , описывающая форму собственных колебаний, называемая главной (или нормальной);

p_l – частота собственных колебаний;

$\ddot{y}_{ст}(x, t^1)$ – ускорение произвольной точки стержня, обусловленное перемещением невесомого податливого стержня при заданном законе движения спор.

Главная функция имеет вид [1]

$$X_l = D_l \sin(p_l x / c), \quad (2)$$

где D_l – постоянная интегрирования, определяемая из условия нормирования функции X_l при соотношениях ортогональности для стержня с рассматриваемыми концевыми условиями.

Для любого момента времени на конце стержня по принципу Даламбера имеет место равновесие всех действующих сил: силы натяжения стержня, силы упругости сжатой пружины, силы инерции массы M , т.е.

$$-r\partial u_{il} / \partial x - Ku_{il} + M\partial^2 u_{il} / \partial t^2 = 0, \quad (3)$$

где $r = E f_{шт}$ $r = EF_{шт}$ ($F_{шт}$ – площадь поперечного сечения штанг),

$$u_i = X_i(A_i \cos p_i t + B_i \sin p_i t) \quad (4)$$

С учетом (2) и (4) условие (3) преобразуется в уравнение

$$\theta_i \operatorname{tg} \theta_i = \eta / (1 - \psi_i) \quad (5)$$

$$\theta_i = p_i \ell / c; \quad \psi_i = K / p_i^2 M; \quad \eta = m \ell / M$$

(m – масса штанг на единицу длины с учетом “плавучести”).

Трансцендентное уравнение (5) служит для определения собственных частот колебаний p_i .

Для определения постоянной D_i запишем уравнение колебаний стержня в форме задачи на собственные значения, т.е. $X_i'' = (-mp_i^2 / r) \cdot X_i$, после чего проверим, обладают ли свойством ортогональности собственные функции для i -ой и j -ой форм колебаний с учетом конечных условий $rX_{i\ell}^1 = (Mp_i^2 - K)X_{i\ell}$, полученных из (3).

Имеем

$$rX_i'' = -mp_i^2 X_i \quad (6)$$

$$rX_j'' = -mp_j^2 X_j \quad (7)$$

$$rX_{i\ell}^1 = (Mp_i^2 - K)X_{i\ell} \quad (8)$$

$$rX_{j\ell}^1 = (Mp_j^2 - K)X_{j\ell} \quad (9)$$

Умножая левые и правые части уравнений (6) на X_j и (8) на $X_{j\ell}$, а уравнение (7) на X_i и (9) на $X_{i\ell}$, а затем интегрируя полученные из (6) и (7) выражения по всей длине стержня, получим

$$r \int_0^\ell X_i'' X_j dx = -mp_i^2 \int_0^\ell X_i \cdot X_j dx \quad (10)$$

$$r \int_0^\ell X_j'' \cdot X_i dx = -mp_j^2 \int_0^\ell X_j \cdot X_i dx \quad (11)$$

$$rX_{i\ell}^1 \cdot X_{j\ell} = (Mp_i^2 - K)X_{i\ell} \cdot X_{j\ell} \quad (12)$$

$$rX_{j\ell}^1 \cdot X_{i\ell} = (Mp_j^2 - K)X_{j\ell} \cdot X_{i\ell} \quad (13)$$

Вычитая уравнения (12) и (13) из уравнений (10) и (11), соответственно, и интегрируя левые части полученных выражений по частям, имеем

$$-rX_{jo}^1 \cdot X_{jo} - r \int_0^\ell X_i^1 X_j dx = -mp_i^2 \int_0^\ell X_i \cdot X_j dx - (Mp_i^2 - K) \cdot X_{i\ell} \cdot X_{j\ell} \quad (14)$$

$$-rX_{jo}^1 \cdot X_{io} - r \int_0^\ell X_i^1 \cdot X_j^1 dx = -mp_j^2 \int_0^\ell X_i \cdot X_j dx - (Mp_j^2 - K) X_{i\ell} \cdot X_{j\ell} \quad (15)$$

Вычитывая из (15) уравнение (14), в итоге получим

$$(p_i^2 - p_j^2) \left(m \int_0^\ell X_i \cdot X_j dx + MX_{i\ell} X_{j\ell} \right) = 0 \quad (16)$$

При $i \neq j$

$$m \int_0^\ell X_i \cdot X_j dx + MX_{i\ell} \cdot X_{j\ell} = 0 \quad (17)$$

Из (14) следует

$$r \int_0^\ell X_i^1 \cdot X_j^1 dx + KX_{i\ell} X_{j\ell} = 0 \quad (18)$$

Вычитывая (12) из (10), с учетом (17) получим

$$r \int_0^\ell X_i'' X_j dx - rX_{i\ell}^1 X_{j\ell} - KX_{i\ell} \cdot X_{j\ell} = 0 \quad (19)$$

Условия (17), (18) и (19) являются соотношениями ортогональности и при $i = j$ могут быть пронормированы следующим образом:

$$m \int_0^\ell X_i^2 \cdot dx + MX_{i\ell}^2 = m \quad (20)$$

$$r \int_0^\ell (X_i^1)^2 dx + KX_{i\ell}^2 = mp_i^2 \quad (21)$$

$$r \int_0^\ell X_i'' \cdot X_i dx - rX_{i\ell}^1 \cdot X_{i\ell} - KX_{i\ell}^2 = mp_i^2 \quad (22)$$

Из этих соотношений может быть определена постоянная интегрирования

$$D_i^2 = \left[0,5\ell - (c/4p_i) (\sin 2\ell p_i / c) + (M \sin^2 \ell p_i / c) / m \right]^{-1}$$

В формуле (1) $\ddot{u}_{\text{ст}}(x, t^1)$ является ускорением точки x перемещающегося стержня, закрепленного по обоим концам при заданном движении опор. Само перемещение определяется из статического анализа и имеет вид [1]

$$u_{\text{ст}}(x, t^1) = \frac{\ell - x}{l} u_o(t^1) + \frac{x}{\ell} u_\ell(t^1). \quad (23)$$

Для механизма станка-качалки можно с достаточной степенью точности принять [4]

$$u_o(t^1) = 0,5\omega^2 S(\cos \omega t^1 - \lambda \cos 2\omega t^1), \quad (24)$$

где ω – угловая скорость вращения кривошипа;
 S – ход полированного штока (перемещение точки 0);

$\lambda = r/\ell$ – отношение радиуса кривошипа к длине шатуна.

Известно также [2], что на начальной стадии хода вверх $U_o = \Delta\ell_T + \Delta\ell_{шт}$.

Тогда из (23) получим

$$B_{CT}(x, t^1) = B_0(t^1) \left[1 - \frac{x}{\ell} (1 + \mu)^{-1} \right] \quad (\mu = f_{шт} / f_T) \quad (25)$$

Раскрыв интеграл (1) с учетом (24) и (25), получим

$$U_o = 0,5\omega^2 S c \sum_{l=1}^{\infty} D_l^2 p_l^{-3} \psi(t) X_l(p_l) \sin p_l x / c, \#$$

где $\psi_l(t) = \alpha_i \cos \omega t + \beta_i \cos 2\omega t - (\alpha_i + \beta_i) \cos p_l t$;

$$\alpha_i^{-1} = 1 - \omega^2 / p_i^2; \quad \lambda \beta_i^{-1} = 1 - 4\omega^2 / p_i^2;$$

$$X_l(p_l) = 1 - \ell^{-1} (1 + \mu)^{-1} c p_l^{-1} \sin p_l \ell / c - \mu (1 + \mu)^{-1} \cos p_l \ell / c. \#$$

Максимальная вибрационная нагрузка, действующая в точке О подвеса штанг, равна

$$Q_o = Ef_{шт} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} \right)_{x=0} = 0,5 Ef_{шт} \omega^2 S \sum_{l=1}^{\infty} D_l^2 p_l^{-3} \cdot \psi_l(t) \cdot X_l(p_l). \quad (26)$$

Инерционную нагрузку от перемещения массы всего стержня, обусловленного его податливостью, можно найти из выражения

$$Q_u = \int_0^{\ell} B_{CT}(x, t^1) dm = 0,5 \rho f_{шт} \omega^2 S \ell [1 - 0,5 / (1 + \mu)] (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t) \quad (27)$$

где $\ddot{u}_{CT}(x, t^1)$ – ускорение точки x стержня, найденное из выражений (24) и (25);

ρ – плотность материала стержня.

Полученные зависимости (26) и (27) были использованы для расчета динамических нагрузок в колонне штанг длиной 2205 м, состоящей из двух ступеней $\varnothing 22-705$ м, $\varnothing 19-1500$ м, обсадная труба– $\varnothing 2,5$ " плунжер насоса – $\varnothing 32$; длина хода $S=2,1$ м, число оборотов кривошипа (число качаний) $n=11,05$ об/мин.*

Вес колонны штанг с учетом “плаучести”

$$(\rho_{ж} = 880 \text{ кг} / \text{м}^3) \quad Q_{шт.} = 47040 \text{ Н.} \quad \text{Вес столба жидкости } Q_{ж} = 15700 \text{ Н.}$$

Для принятых исходных данных полное нагружение штанг весом столба жидкости происходит при угле поворота кривошипа $69^\circ 20'$

По данным расчета максимальные значения динамических нагрузок составляют $Q_{и} = 7504 \text{ Н.}$, $Q_{в} = 725 \text{ Н.}$ т. е. $(Q_{в} + Q_{и}) = 0,03 (Q_{шт.} + Q_{ж})$.

Данные расчета показывают, что в начальной стадии хода плунжера вверх вибрационные нагрузки практически не влияют на величину общей нагрузки.

Такая же картина повторяется и для других вариантов расчета с использованием исходных данных, имеющих практическое применение.

На основании полученных данных можно сделать следующие выводы:

1. Применяемые методы расчета максимальной нагрузки на начальной стадии процесса нагружения штанг при ходе вверх [2,3] дают завышенные значения.

2. При расчете максимальной нагрузки в колонне штанг на начальной стадии процесса нагружения по предлагаемому методу динамическую составляющую из общей нагрузки можно исключить.

Для сопоставления результатов расчета исходные данные те же, что и в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. и др. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение. 1985.
2. Мищенко И.Т. Скважинная добыча нефти. М.: Изд-во “Нефть и газ”, 2003.
3. Кенгерли А.М. Некоторые вопросы механики штанговой глубиннонасосной установки. /Автореферат диссертации. Азинефтехим, Баку, 1969.
4. Бабаян С.А. Расчет экстремальных нагрузок в колонне насосных штанг для добычи нефти. // “ Нефть, газ и бизнес”. 2007. №4.

Арцахский Государственный
университет

Поступила в редакцию
20.07.2008