

УДК 539.3

О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ И РАСПРЕДЕЛЕННОЙ
НАГРУЗКИ НА ПОЛОСУ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

Асратян, М. Г. Хачатрян Г. Г.

Ключевые слова: полоса переменной ширины, сосредоточенная сила, распределённая нагрузка, асимптотическое решение.

Keywords: band of variable width, concentrated forces, distributed load, asymptotic solution.

Մ. Գ. Հասրաթյան, Գ. Գ. Խաչատրյան

Փոփոխական լայնության շերտի վրա կենտրոնացված ուժի և բաշխված բեռի ազդեցության մասին

Ախտանքում դիտարկված է փոփոխական լայնության շերտի խառը եզրային խնդիր, երբ նրա ընդերկայնական եզրերից մեկը կոշտ ամրակցված է, իսկ մյուս ուղղագիծ եզրի վրա ազդում է կենտրոնացված ուժ և կտոր առ կտոր անընդհատ բեռնավորում:

Խնդիրը մոդելավորում է առաձգական հիմնատակերի և հիմքերի փոխազդեցությունը:

Ասիմպտոտիկ և Ֆլաման–Բուսինսկի լուծումների համակցման ճանապարհով որոշված են փոփոխական լայնության շերտի լարումները և դեֆորմացիաները, երբ շերտը գտնվում է հարթ դեֆորմացիոն վիճակում:

Բերված են կիրառական նշանակության մասնակի խնդիրների լուծումներ:

M. G. Hasratyan, G. G. Khachatryan

On the influence of concentrated force and distributed load on the band of variable width

The mixed boundary problem for the band of variable widths is considered when one of the longitudinal edges is rigidly fixed, on the other straight edge the concentrated force and piecewise continuous load is influence.

The problem is modeling the interaction of elastic base and foundation. On the combined way of asymptotic and Flaman–Businsk solutions the band of width variable strains and deformations are determined, when the band is on the smooth deforming form. The solutions of the partial problems for applied purpose are brought.

В работе рассмотрена смешанная краевая задача для полосы переменной ширины, когда одна из продольных граней жестко закреплена, а на другую прямолинейную грань действует сосредоточенная сила и кусочно-непрерывная нагрузка.

Задача моделирует взаимодействие упругого основания и фундамента.

Путем сращивания решений Фламана–Бусинеска и асимптотического определены напряжения и деформации для полосы переменной ширины при нахождении полосы в плоско-деформированном состоянии.

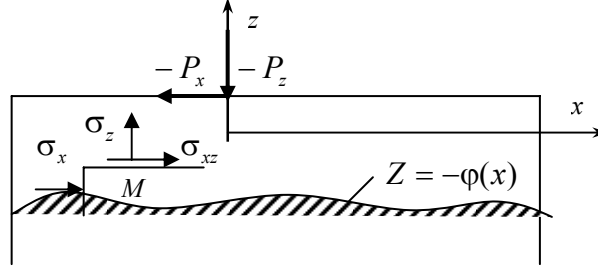
Приведены решения частных задач прикладного назначения.

Смешанные краевые задачи для полос и пластин постоянной и переменной толщин были решены асимптотическим методом в [1-6]. В этих задачах граничные функции предполагались дифференцируемыми необходимое число раз. Между тем, во многих задачах граничные функции бывают дискретными или кусочно-гладкими (сосредоточенные силы и кусочно-непрерывные нагрузки).

В настоящей работе рассматривается краевая задача для полосы переменной ширины, когда один ее край жестко закреплён, а на другой край действует сосредоточенная сила или кусочно-непрерывная нагрузка. Задача решается путем сращивания асимптотического решения с решением задачи Фламана–Бусинеска [7,8]. Приведены иллюстрационные примеры.

Рассматривается изотропная полоса

$\Omega = \{x, z : -l \leq x \leq l, -\varphi(x) \leq z \leq h_1,$
 $\varphi(x) \geq 0, h_1 \geq 0, h = \{h_1 + \sup \varphi(x)\}, h \ll l\}$ переменной ширины. На верхней
 прямолинейной грани полосы приложена сосредоточенная нагрузка с нормальной и
 тангенциальной компонентами $-P_z$ и $-P_x$ (фиг. 1).



Фиг. 1

$$\sigma_z(x, h_1) = -P_z \delta(x), \quad \sigma_{xz}(x, h_1) = -P_x \delta(x) \quad (1.1)$$

Нижняя продольная грань полосы, описываемая кусочно-гладкой функцией $z = -\varphi(x)$, жестко закреплена.

$$u_x(x, -\varphi(x)) = u_z(x, -\varphi(x)) = 0 \quad (1.2)$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние полосы, когда она находится в состоянии плоской деформации. Задача, в частности, моделирует упругое основание-фундамент мелкого заложения в модели сжимаемого слоя [9,10].

Решение задачи ищется путем сращивания асимптотического решения [1,4,5] с решением Фламана–Буссинеска [11].

$$Q = A + B \quad (1.3)$$

где A – общий интеграл асимптотического решения, B – решение Фламана–Буссинеска. Асимптотическое решение смешанной краевой задачи для изотропной полосы имеет вид [1,4,5].

$$A = \sum_{s=0}^N \varepsilon^{\kappa+s} A^{(s)}, \quad \kappa_u = 0, \quad \kappa_\sigma = -1,$$

$$\sigma_{xz}^{(s)} = \sigma_{xz0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xz*}^{(s)}(\xi, \zeta), \quad (x, z); \quad \sigma_{xx}^{(s)} = \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_{zz0}^{(s)}(\xi) + \sigma_{xx*}^{(s)}(\xi, \zeta),$$

$$U_x^{(s)} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xz0}^{(s)} \zeta + U_{x0}^{(s)}(\xi) + U_{x*}^{(s)}(\xi, \zeta),$$

$$U_z^{(s)} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_{zz0}^{(s)} \zeta + U_{z0}^{(s)}(\xi) + U_{z*}^{(s)}(\xi, \zeta),$$

$$\sigma_{xz*}^{(s)} = -\int_0^\zeta \frac{\partial \sigma_{xx}^{(s-1)}}{\partial \xi} d\zeta, \quad \sigma_{zz*}^{(s)} = -\int_0^\zeta \frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-1)}}{\partial \xi} d\zeta,$$

$$\sigma_{xx*}^{(s)} = \frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_{zz*}^{(s)}(\xi) + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial U_x^{(s-1)}}{\partial \xi} \quad (1.4)$$

$$U_{x^*}^{(s)} = \int_0^\zeta \left[\frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xz^*}^{(s)} - \frac{\partial U_z^{(s-1)}}{\partial \xi} \right] d\xi,$$

$$U_{z^*}^{(s)} = \int_0^\zeta \left[-\frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_{xx^*}^{(s)} + \frac{(1-\nu^2)}{E} \sigma_{zz^*}^{(s)} \right] d\xi,$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}, \quad U_x^{(s)} = \frac{u_x^{(s)}}{l}, \quad U_z^{(s)} = \frac{u_z^{(s)}}{l}.$$

Представленное асимптотическое решение (1.4) содержит четыре неизвестных функции интегрирования $\sigma_{xz^0}^{(s)}, \sigma_{z^0}^{(s)}, U_{x^0}^{(s)}, U_{z^0}^{(s)}$, которые подлежат определению из граничных условий (1.1), (1.2).

Решение Фламана–Буссинеска приводим для кусочно-непрерывной нагрузки на отрезке $a \leq x \leq b$, откуда легко выписывается решение также для сосредоточенной силы.

$$\sigma_{zz}^{(B)} = -\frac{2}{\pi} \int_a^b P_z(\xi) \frac{(z-h_1)^3}{r^4} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_a^b P_x(\xi) \frac{(z-h_1)^2(x-\xi)}{r^4} d\xi$$

$$\sigma_{xx}^{(B)} = -\frac{2}{\pi} \int_a^b P_z(\xi) \frac{(x-\xi)^2(z-h_1)}{r^4} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_a^b P_x(\xi) \frac{(x-\xi)^3}{r^4} d\xi$$

$$\sigma_{xz}^{(B)} = -\frac{2}{\pi} \int_a^b P_z(\xi) \frac{(z-h_1)^2(x-\xi)}{r^4} d\xi - \frac{2}{\pi} \int_a^b P_x(\xi) \frac{(z-h_1)(x-\xi)^2}{r^4} d\xi \quad (1.5)$$

$$U_x^{(B)} = \frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_a^b P_z(\xi) \left[\frac{(z-h_1)(x-\xi)}{r^2} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(x-\xi)}{(z-h_1)} \right] d\xi -$$

$$-\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_a^b P_x(\xi) \left[\frac{(z-h_1)^2}{r^2} + 2(1-\nu) \ln |r| \right] d\xi.$$

$$U_z^{(B)} = -\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_a^b P_z(\xi) \left[\frac{(x-\xi)^2}{r^2} + 2(1-\nu) \ln |r| \right] d\xi +$$

$$+\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_a^b P_x(\xi) \left[\frac{(z-h_1)(x-\xi)}{r^2} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(z-h_1)}{(x-\xi)} \right] d\xi$$

$$r(x, z) = \left[(x-\xi)^2 + (z-h_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), (1.2) с учетом (1.3)-(1.5), для неизвестных функций получим:

$$\sigma_{xz^0}^{(s)} = -\sigma_{xz^*}^{(s)} \left(\xi, \frac{h}{h_1} \right), \quad (x, z)$$

$$U_{x^0}^{(s)} = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\varphi}{h} \sigma_{xz^0}^{(s)} - \bar{U}_x^{(s)} - U_{x^*}^{(s)} \left(\xi, \frac{\varphi}{h} \right)$$

$$U_{z^0}^{(s)} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \frac{\varphi}{h} \sigma_{zz^0}^{(s)} - \bar{U}_z^{(s)} - U_{z^*}^{(s)} \left(\xi, \frac{\varphi}{h} \right)$$

$$\begin{aligned}
\bar{U}_x^{(s)} = \bar{U}_z^{(s)} = 0 \quad \text{при } s \neq 0; \quad \bar{U}_x^{(0)} = \frac{1}{l} \bar{u}_x, \quad (x, z) \\
\bar{u}_x = -\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_a^b \left\{ P_z \left[\frac{(x-\xi)(h_1+\varphi)}{r^2} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(x-\xi)}{(h_1+\varphi)} \right] + \right. \\
\left. + P_x \left[2(1-\nu) \ln |r| + \frac{(h_1+\varphi)^2}{r^2} \right] \right\} d\xi \\
\bar{u}_z = -\frac{(1+\nu)}{\pi E} \int_a^b \left\{ P_z \left[\frac{(x-\xi)^2}{r^2} + 2(1-\nu) \ln |r| \right] + \right. \\
\left. + P_x \left[\frac{(x-\xi)(h_1+\varphi)}{r^2} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(h_1+\varphi)}{(x-\xi)} \right] \right\} d\xi
\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $r = \left[(x-\xi)^2 + (h_1+\varphi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$.

Подставляя (1.6) в (1.4), получим итерационные формулы, позволяющие определить компоненты полей напряжений и перемещений с наперед заданной асимптотической точностью $O(\varepsilon^3)$.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}^{(s)} &= -\frac{\nu}{(1-\nu)} \sigma_{zz}^{(s)} \left(\frac{h_1}{h} \right) + \sigma_{xx}^{(s)}(\xi, \zeta), \\
\sigma_{zz}^{(s)} &= -\sigma_{xz}^{(s)} \left(\frac{h_1}{h} \right) + \sigma_{xz}^{(s)}(\xi, \zeta), \quad (x, z) \\
U_x^{(s)} &= -\frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xz}^{(s)} \left(\frac{h_1}{h} \right) \frac{(\varphi+h\zeta)}{h} - \bar{U}_x^{(s)} - U_{x^*}^{(s)} \left(\xi, -\frac{\varphi}{h} \right) + U_{x^*}^{(s)}(\xi, \zeta), \\
U_z^{(s)} &= -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \sigma_{zz}^{(s)} \left(\frac{h_1}{h} \right) \frac{(\varphi+h\zeta)}{h} - \bar{U}_z^{(s)} - U_{z^*}^{(s)} \left(\xi, -\frac{\varphi}{h} \right) + U_{z^*}^{(s)}(\xi, \zeta).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Решение краевой задачи (1.1), (1.2), вычисленное по формулам (1.3)-(1.7) с точностью $O(\varepsilon^3)$, что обычно является достаточным для практических расчетов, будет

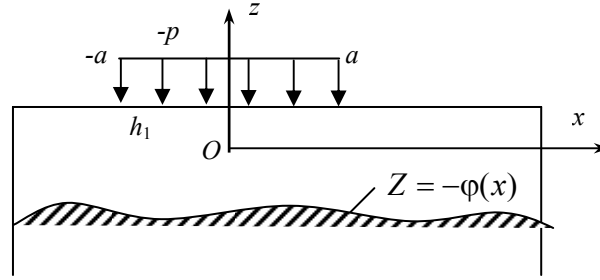
$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \sigma_{xx}^{(B)} + \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (z+\varphi) - \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right], \\
\sigma_{xz} &= \sigma_{xz}^{(B)} + \frac{E}{(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z-h_1), \quad \sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(B)}, \\
u_x &= u_x^{(B)} - \bar{u}_x - \left[\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} - \frac{\nu}{(1-2\nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + (2h_1 + \frac{\nu}{(1-\nu)} \varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) + \\
&\quad + \frac{(2-3\nu)}{2(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$u_z = u_z^{(B)} - \bar{u}_z + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left[\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} - \varphi \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} \right] (z + \varphi) - \frac{\nu}{2(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2)$$

Решение написано для кусочно-непрерывной вертикальной и горизонтальной нагрузок, где \bar{u}_x и \bar{u}_z имеют вид (1.6), и где решение приведено в (1.5).

2.а) Наиболее часто встречающийся в расчетной практике случай равномерно распределенной нагрузки - p (фиг.2)

$$\sigma_{xx} = P_x(x) = 0. \quad \sigma_{zz}(z = h_1) = \begin{cases} P_z(x) = -p & -a \leq x \leq a \\ 0. & x \notin [-a, a], \end{cases} \quad (2.1)$$



Фиг.2

НДС в точке (x, z) от равномерной нормальной нагрузки на участке $(-a, +a)$ будет:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2p}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(x-\xi)^2 (z-h_1)}{r^4} d\xi + \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-a}^a \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (z + \varphi) + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right] d\xi \\ \sigma_z &= -\frac{2p}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(z-h_1)^3}{r^4} d\xi, \\ \sigma_{xz} &= -\frac{2p}{\pi} \int_{-a}^a \frac{(z-h_1)^2 (x-\xi)}{r^4} d\xi + \frac{E}{(1-\nu^2)} \int_{-a}^a \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z-h_1) d\xi \\ u_x &= \frac{p}{2\pi G} \int_{-a}^a \left[(1-2\nu) \left(\operatorname{arctg} \frac{(x-\xi)}{(z-h_1)} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{(x-\xi)(z-h_1)}{r^2} \right] d\xi + \\ &+ \int_{-a}^a \left\{ -\bar{u}_x - \frac{1}{(1-\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + (2h_1 + \nu \varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right] (z + \varphi) + \right. \\ &\left. + \frac{(2-\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2) \right\} d\xi \\ u_z &= -\frac{p}{2\pi G} \int_{-a}^a \left\{ \frac{(x-\xi)^2}{r^2} - 2(1-\nu) \ln \left[(x-\xi)^2 + (z-h_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} d\xi + \quad (2.2) \\ &+ \int_{-a}^a \left\{ -\bar{u}_z - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \left[-\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} \right] (z + \varphi) \right\} d\xi \end{aligned}$$

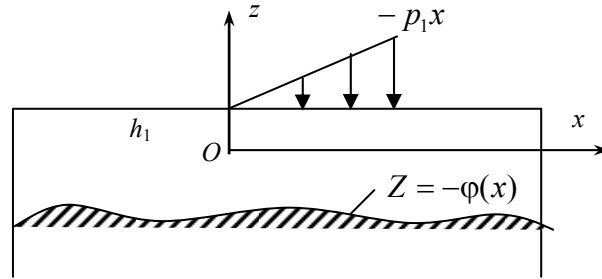
$$\bar{u}_x = -\frac{p}{2\pi G} \left[\frac{x(h_1 + \varphi)}{x^2 + (h_1 - \varphi)^2} + (2\nu - 1) \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{(h_1 + \varphi)} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\bar{u}_z = -\frac{p}{2\pi G} \left\{ \frac{x^2}{x^2 + (h_1 + \varphi)^2} + 2(1 - \nu) \ln \left[x^2 + (h_1 + \varphi)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

где $r^2 = [(x - \xi)^2 + (z - h_1)^2]$; $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ – модуль сдвига.

б) Приведем решение задачи, когда на верхний край полосы действует нормальная линейная нагрузка, а касательная нагрузка отсутствует (фиг. 3)

$$\sigma_{zz}(z = h_1) = \begin{cases} P_z(x) = -p_1 x & x \in [0, a] \\ 0 & x \notin [0, a] \end{cases}, \quad \sigma_{xz} = P_x(x) = 0. \quad (2.3)$$



Фиг.3

Линейная нагрузка рассматривается как нагрузка, распределённая элементарными сосредоточенными силами на участке $(0, a)$. Тогда решение задачи будет

$$\sigma_{xx} = -\frac{2p_1}{\pi} \int_0^a \frac{(x - \xi)^3 (z - h_1)}{r^4} d\xi + \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (z + \varphi) + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{2p_1}{\pi} \int_0^a (x - \xi) \frac{(z - h_1)^3}{r^4} d\xi,$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{2p_1}{\pi} \int_0^a \frac{(x - \xi)^2 (z - h_1)^2}{r^4} d\xi + \frac{E}{(1 - \nu^2)} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z - h_1)$$

$$u_x = \frac{p_1}{2\pi G} \int_0^a (x - \xi) \left[\frac{(z - h_1)(x - \xi)}{r^2} + (2\nu - 1) \left(\operatorname{arctg} \frac{(x - \xi)}{(z - h_1)} + \frac{\pi}{2} \right) \right] d\xi - \bar{u}_x -$$

$$- \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \left[\left(\frac{1 - 2\nu}{(1 - \nu)} \right) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \left(2h_1 + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \varphi \right) \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right] (z + \varphi) +$$

$$+ \frac{(2-\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2) \quad (2.4)$$

$$u_z = -\frac{p_1}{2\pi G} \int_0^a (x-\xi) \left\{ \frac{(z-h_1)^2}{r^2} + (2\nu-1) \ln \left[\frac{(x-\xi)^2 + (z-h_1)^2}{l_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} d\xi - \bar{u}_x -$$

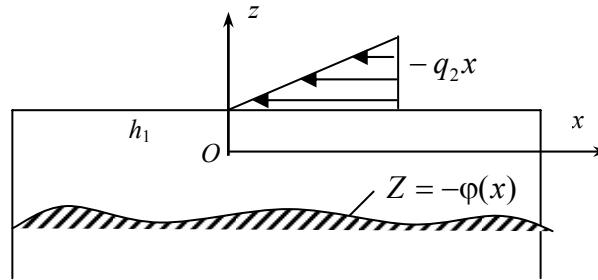
$$- \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \left[-\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} \right] (z + \varphi)$$

$$\bar{u}_x = -\frac{p_1}{2\pi G} x \left[\frac{x(\varphi+h_1)}{[x^2 + (\varphi+h_1)^2]} + (2\nu-1) \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{(\varphi+h_1)} + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\bar{u}_z = -\frac{p_1}{2\pi G} x \left[\frac{x^2}{[x^2 + (\varphi+h_1)^2]} + 2(1-\nu) \ln [x^2 + (\varphi+h_1)^2]^{\frac{1}{2}} \right]$$

Решение, приведенное выше, состоит из решения Д. Е. Польшина (1933 г.), сращенной с асимптотическим решением. Как видим, НДС зависит не только от координаты точки и от величины нагрузки, но и от упругого характера материала и геометрии полосы.

в) Рассмотрим теперь случай, когда на верхнем краю полосы задана линейная горизонтальная нагрузка $P_x = q_2 x$ на участке $(0, a)$ (фиг. 4).



Фиг. 4

$$\sigma_{zz} = P_z \delta(x) = 0, \quad \sigma_{xz}(x, h) = \begin{cases} -q_2 x & x \in [0, a] \\ 0 & x \notin [0, a] \end{cases} \quad (2.5)$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещения полосы будут:

$$\sigma_x = \frac{2q_2}{\pi} \int_0^a (x-\xi) \frac{(x-\xi)^3}{r^4} d\xi + E \left[\frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (\varphi + z) + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right]$$

$$\sigma_z = \frac{2q_2}{\pi} \int_0^a (x-\xi) \frac{(z-h_1)^2 (x-\xi)}{r^4} d\xi$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{xz} &= \frac{2q_2}{\pi} \int_0^a (x-\xi) \frac{(z-h_1)(x-\xi)^2}{r^4} d\xi + E \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z-h_1) \\
u_x &= \frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[\frac{(z-h_1)^2}{r^4} + 2(1-\nu) \ln |r| \right] + \right\} d\xi - \bar{u}_x - \\
&\quad - \frac{1}{(1-\nu)} \left[(1-\nu) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + (2h_1 + \nu \varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) + \\
&\quad + \frac{(2-\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2) \\
u_z &= -\frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[\frac{(z-h_1)(x-\xi)}{r^2} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(z-h_1)}{(x-\xi)} \right] \right\} d\xi - \bar{u}_z - \\
&\quad - \frac{\nu}{(1-\nu)} \left[-\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} + \varphi \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} \right] (z+\varphi) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 \bar{u}_z}{\partial x^2} (z^2 - \varphi^2) \\
\text{где } \bar{u}_x &= -\frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[2(1-\nu) \ln |r| + \frac{(\varphi+h_1)^2}{r^2} \right] \right\} d\xi \\
\bar{u}_z &= -\frac{q_2}{2\pi G} \int_0^a \left\{ (x-\xi) \left[\frac{(x-\xi)(\varphi+h_1)}{r^2} + (2\nu-1) \operatorname{arctg} \frac{(\varphi+h_1)}{(x-\xi)} \right] \right\} d\xi \\
r^2 &= [(x-\xi)^2 + (\varphi+h_1)^2]
\end{aligned} \tag{2.6}$$

НДС полосы в точке (x, z) зависит от очертания полосы, от интенсивности сил на краю, от координаты точки и от модуля деформаций полосы.

Аналогичным путем можно определить НДС и при более сложных нагрузках.

Таким образом, приведенный такой подход расширяет область применения асимптотических решений [1–3] и получаются решения новых классов задач. Его можно обобщить и для слоистых полос и пластинок переменной толщины.

В заключение отметим, что приведенные решения справедливы вне зоны простирания погранслоев. Вблизи же торцов $x = \pm l$ на указанное решение следует наложить решение погранслоя. Решение погранслоя для полосы построено в работе [12], там же указана зона простирания погранслоя и дана процедура сопряжения решений внутренней задачи и погранслоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела. Механика. //Межвузовский сб. науч. трудов. Ереван: Изд. ЕГУ. Вып. 2. 1982. С.7-12.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией. //В сб.: "Механика конструкций из композиционных материалов". Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок. //ПММ. 1986. Т.50. Вып.2. С. 271-278.
4. Хачатрян Г.Г. Третья краевая задача теории упругости для анизотропной полосы переменной ширины.// Сб. науч. тр.: Механика деформируемого твердого тела. Изд-во АН Армении. 1993. С.124-129.
5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины //ПММ. 1996. Т.60. Вып. 2. С. 290-298.
6. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Асимптотическое решение смешанных краевых задач двухслойных анизотропных пластин переменной толщины// Изв. НАН Армении. Механика. 1998. Т.51. №2. С.27-36.
7. Агаловян Л.А., Асратян М.Г., Геворкян Р.С. К асимптотическому решению задач о действии сосредоточенной силы кусочно-непрерывной нагрузки на двухслойную полосу // ПММ. 1990. Т. 54. Вып.5. С.831–836.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: «Гитутюн» , 2005. 469с.
9. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Гостройиздат, 1960.
10. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М.: Стройиздат, 1984. 486 с.
11. Лейбензон Л. С. Курс Теории упругости. М.-Л.: ОГИЗ, 1947. 464 с.
12. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач. /Механика. Межвузовский сб. научн. трудов, Ереван: Изд. ЕГУ. Вып.3. 1984. С. 51-58.

Государственный аграрный
университет Армении

Поступила в редакцию
15.05.2008