

УДК 539.3

ДВЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО  
ДЛИННОГО СТЕРЖНЯ

Акопян С.А., Мовсисян Л.А.

**Ключевые слова:** бесконечный и полубесконечный стержень, преобразования Лапласа и Фурье, периодическая сила, постоянная скорость.

**Keywords:** infinity and semi-infinity boams, transform of Fourier and Laplace, periodic fores, constant velocity.

Ս.Ա. Հակոբյան, Լ.Ա. Մովսիսյան

Դինամիկայի երկու խնդիրներ անվերջ երկար ձողի համար

Ձողի ծռում և ձգում-սեղմում դեպքերի համար դիտարկված են երկու տիպի խնդիրներ: Պարբերական ուժը հաստատուն արագությամբ շարժվում է անվերջ ձողի երկարությամբ և կիսաանվերջ ձողի եզրը հաստատուն արագությամբ փոխվում է որտեղ կիրառված են պարբերական ծռող մոմենտ կամ ձգող ուժ: Լուծումները կառուցված են Ֆուրյեի և Լապլասի ձևափոխությունների միջոցով: Ստացված է ռեզոնանս առաջանալու պայմանը:

S.A. Hakobyan, L.A. Movsisyan

Two problems of dynamics for infinite long beam

The problems of bending and longitudinal motion of beam are considered. Periodical force with constant velocity is moving along infinite long beam. The edge of semi-infinite beam, with constant velocity is moving and periodical bending moment or tension force is applied on it. The solutions are built by application of transformation of Fourier and Laplace. The condition of resonance is obtained.

Для стержня рассмотрены два типа задач для изгиба и растяжения-сжатия. Периодическая сила с постоянной скоростью движется вдоль бесконечно длинного стержня, и край полубесконечного стержня с постоянной скоростью перемещается, где приложен изгибающий периодический момент или растягивающая сила. Решения построены применением преобразований Фурье и Лапласа. Получено условие появления резонанса.

1. Имеется стержень бесконечной длины. В момент времени  $t = 0$  сосредоточенная периодическая сила  $P \sin \omega t$  с постоянной скоростью  $c$  движется в сторону  $x \rightarrow \infty$ . Уравнение поперечного движения системы будет

$$k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Q \sin \omega t \delta(x - ct), \quad (1.1)$$

$$k^2 = \frac{EJ}{\rho F}, \quad Q = \frac{P}{\rho F}.$$

Подвергая (1.1) преобразованию Фурье, для трансформанты получим

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} + k^2 \alpha^4 \bar{w} = Q e^{i\alpha ct} \sin \omega t, \quad (1.2)$$

решение которого будет

$$\bar{w} = C_1 \cos k\alpha^2 t + C_2 \sin k\alpha^2 t + A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (1.3)$$

В предположении нулевых начальных условий имеем:

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0$$

$$A = \frac{Qe^{i\alpha ct}}{\Delta} (k^2 \alpha^4 - \alpha^2 c^2 - \omega^2), \quad B = -2i\alpha c \omega \frac{Qe^{i\alpha ct}}{\Delta},$$

$$C_1 = -B, \quad C_2 = -\frac{1}{k\alpha^2} (A\omega + i\alpha c B) \text{ при } t = 0,$$

$$\Delta = (k^2 \alpha^4 - c^2 \alpha^2 - \omega^2)^2 - 4\alpha^2 c^2 \omega^2. \quad (1.4)$$

Прогиб  $w(x, t)$  определяется

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w} e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (1.5)$$

Частные решения, соответствующие  $\sin$  и  $\cos$ , вычислим в отдельности. Будем различать два случая:

а)  $c^2 - 4k\omega > 0$ . (1.6)

Тогда в подынтегральных выражениях двух интегралов

$$QJ_1 = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{+i\alpha(ct-x)} d\alpha, \quad J_2 = 2\alpha c \omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+i\alpha(ct-x)}}{\Delta} d\alpha \quad (1.7)$$

имеем восемь особых точек (нули  $\Delta$ ) и расположены они на оси абсциссы. Вот они:

$$\alpha_{1,2} = \frac{c \pm x_1}{2k}, \quad \alpha_{3,4} = \frac{-c \pm x_2}{2k}, \quad x_1 = \sqrt{c^2 + 4\omega k},$$

$$\alpha_{5,6} = \frac{c \pm x_2}{2k}, \quad \alpha_{7,8} = \frac{-c + x_1}{2k}, \quad x_2 = \sqrt{c^2 - 4\omega k}. \quad (1.8)$$

Вычисления интегралов производятся обычным образом [1]. Контур интегрирования показан на фиг.1. Как обычно, особые точки обходятся малыми полукругами  $c_\epsilon^k$  и пользуются теоремой Коши и леммой Жордана. И так как при  $R \rightarrow \infty$  интеграл по большому полукругу стремится к нулю, то для  $J_1$  в окончательном виде имеем

$$J_1 = \frac{\pi}{2\omega^2} \left[ \frac{c}{k} \sin cy (\cos x_1 y + \cos x_2 y) - \frac{c^2 + 2k\omega}{kx_1} \cos cy \sin x_1 y - \frac{c^2 - 2k\omega}{kx_2} \cos cy \sin x_2 y \right]. \quad (1.9)$$

б) В случае  $c^2 - 4k\omega < 0$  из восьми корней четыре комплексные:

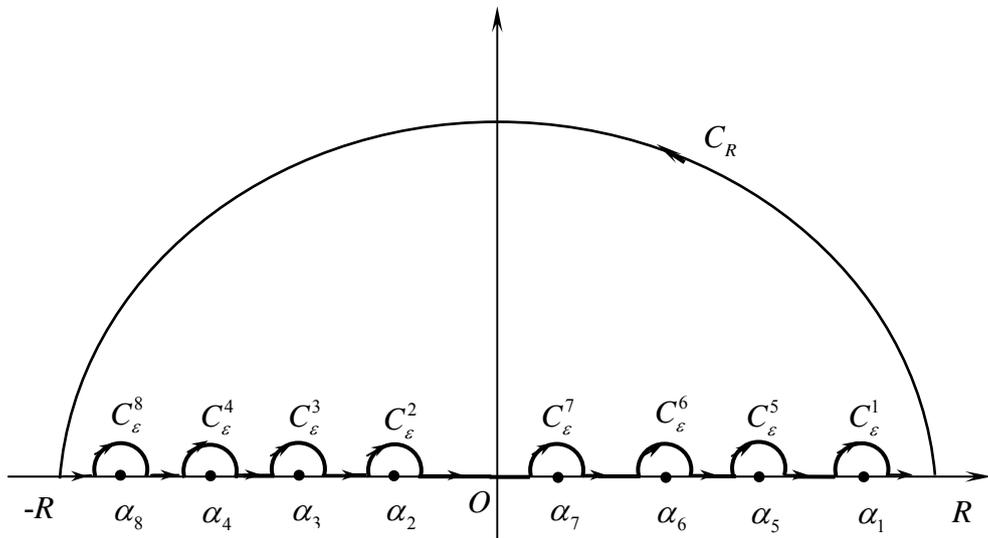
$$\alpha_{3,4} = \frac{-c \pm i\sqrt{4k\omega - c^2}}{2k}, \quad \alpha_{5,6} = \frac{c \pm i\sqrt{4k\omega - c^2}}{2k}. \quad (1.10)$$

Из этих четырех корней в верхней полуплоскости (с положительной мнимой частью, фиг.2) являются  $\alpha_3$  и  $\alpha_5$ . При вычислении соответствующего интеграла уже берутся вычеты в этих точках. И в окончательном виде выражение  $J_1$  для данного случая будет

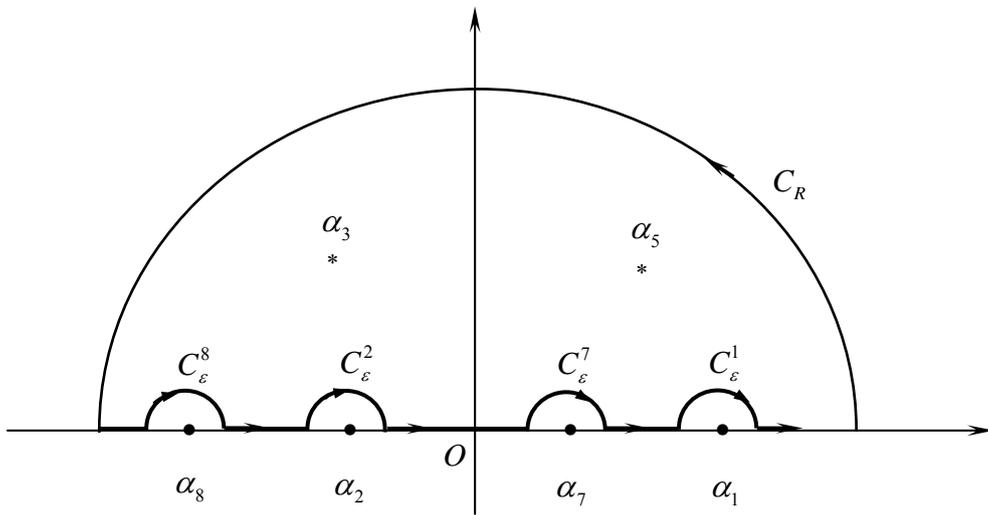
$$J_1 = \frac{\pi}{2\omega^2} \left[ \frac{c}{k} \sin cy (e^{-x_3 y} + \cos x_1 y) - \right.$$

$$\left. -\frac{c^2 + 2k\omega}{kx_1} \cos cy \sin x_1 y + \frac{c^2 - 2k\omega}{kx_3} e^{-x_3 y} \cos cy \right], \quad (1.11)$$

$$x_3 = \sqrt{4k\omega - c^2}, \quad y = \frac{ct - x}{2k}.$$



Фиг.1.



Фиг.2

Подобными же методами вычисляется интеграл  $J_2$ .

Для случая а)

$$J_2 = \frac{i\pi}{2\omega^2} \left[ \frac{c}{k} \cos cy (\cos x_2 y - \cos x_1 y) + \frac{c^2 - 2k\omega}{kx_2} \sin cy \sin x_2 y - \frac{c^2 + 2k\omega}{kx_1} \sin cy \sin x_1 y \right] \quad (1.12)$$

и для случая б)

$$J_2 = -\frac{i\pi}{2\omega^2} \left[ \frac{c}{k} \cos cy (\cos x_1 y - e^{-x_3 y}) + \frac{c^2 + 2k\omega}{kx_1} \sin cy \sin x_1 y + \frac{c^2 - 2k\omega}{kx_3} e^{-x_3 y} \sin cy \right] \quad (1.13)$$

Выражения прогиба от возмущающей силы будет

$$w_1(x, t) = \frac{Q}{2\pi} (J_1 \sin \omega t + iJ_2 \cos \omega t) \quad (1.14)$$

Что касается решения однородной части, то его можно найти подобным же образом, к тому же, формулы будут во много длиннее, чем (1.9)–(1.13). Как известно, вследствие внутреннего трения решение однородной части со временем стремится к нулю и очень часто можно довольствоваться частным решением (стационарной частью) для выяснения общего характера движения. Кстати, не излишне привести цитату (по другой подобной задаче). «Разумеется, это лишь частное решение, но оно описывает наиболее важную, стационарную часть процесса, другая часть решения, описывающая колебания с собственными частотами, быстро исчезает вследствие действия неизбежных сил трения» [2] (стр.273).

В частном случае, когда сила неподвижна ( $c = 0$ ), в (1.3)  $B = 0$  и для  $J_1$  будем иметь

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{k^2 \alpha^4 - \omega^2} \quad (1.15)$$

Корни знаменателя суть

$$\alpha_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{k}}, \quad \alpha_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{\omega}{k}}. \quad (1.16)$$

Интеграл (1.15) вычисляется, как и в предыдущих случаях, и в окончательном виде имеем

$$J_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2\omega\sqrt{k\omega}} \left( \sin \sqrt{\frac{\omega}{k}} x - e^{\sqrt{\frac{\omega}{k}} x} \right), & x < 0 \\ -\frac{\pi}{2\omega\sqrt{k\omega}} \left( \sin \sqrt{\frac{\omega}{k}} |x| - e^{-\sqrt{\frac{\omega}{k}} |x|} \right), & x > 0 \end{cases} \quad (1.17)$$

В полученном решении – два факта, достойные упоминания:

а) при подвижной силе помимо вынужденных колебаний по виду во внешней силе появляется еще другое гармоническое колебание (наличие  $\cos \omega t$ );

б) в случае  $c^2 = 4k\omega$  условие  $\Delta = 0$  дает кратные корни и будем иметь расходящиеся интегралы. Естественно, по аналогии с обычным резонансом, принять, что при таком условии возникает резонанс.

2. Для продольного движения

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q \delta(x - ct) \sin \omega t, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1)$$

при нулевых начальных условиях трансформанта  $\bar{u}$  есть

$$\bar{u} = c_1 \cos a\alpha + c_2 \sin a\alpha + e^{i\alpha ct} (A \sin \omega t + B \cos \omega t), \quad (2.2)$$

$$A = q \frac{(a^2 - c^2)\alpha^2 - \omega^2}{\Delta_1}, \quad B = -q \frac{2ic\alpha\omega}{\Delta_1},$$

$$\Delta_1 = [(a^2 - c^2)\alpha^2 - \omega^2]^2 - 4\alpha^2 c^2 \omega^2,$$

а  $c_i$  через  $A$  и  $B$  выражается, как в (1.4).

Особые точки ( $\Delta_1 = 0$ ) находятся на оси абсцисс

$$\alpha_{1,3} = \mp \frac{\omega}{a - c}, \quad \alpha_{2,4} = \pm \frac{\omega}{a + c}. \quad (2.3)$$

Обратное преобразование совершается обычным образом, и окончательное выражение для перемещения есть

$$u(x, t) = \frac{q}{2a\omega} \left\{ \sin \omega t \left[ \sin \alpha_3 (x - ct) + \sin \alpha_2 (x - ct) \right] + \right. \\ \left. + \cos \omega t \left[ \cos \alpha_2 (x - ct) - \cos \alpha_3 (x - ct) \right] \right\} \quad (2.4)$$

3. Вторая задача такая. Имеется полубесконечный стержень, край которого движется с постоянной скоростью  $2v$  (стержень укорачивается). Введя новую координату

$$y = x - 2vt, \quad (3.1)$$

уравнение движения поперечных колебаний преобразуем к виду

$$k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4\nu^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 4\nu \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.2)$$

Допустим, что имеются нулевые начальные условия и на конце  $y = 0$  заданы условия относительно перемещения и изгибающего момента:

$$w = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = A \sin \omega t. \quad (3.3)$$

В [3] была рассмотрена подобная задача, когда на конце заданы условия типа защемления.

Применяя преобразования Лапласа, вместо (3.2) и (3.3) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{w}}{dy^4} + n^2 \left( 4\nu^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} - 4\nu p \frac{d\bar{w}}{dy} + p^2 \bar{w} \right) &= 0, \\ \bar{w} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{w}}{dy^2} &= M \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \text{ при } y = 0, \\ n &= \frac{1}{k}, \quad M = \frac{A}{EJ}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Среди четырех корней характеристического уравнения – необходимые нам следующие два:

$$s_1 = -i \left( n\nu + \sqrt{n^2 \nu^2 - inp} \right), \quad s_2 = i \left( n\nu + \sqrt{n^2 \nu^2 + inp} \right). \quad (3.5)$$

С учетом условий (3.4) решение относительно  $\bar{w}$  представится

$$\bar{w} = \frac{M\omega}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{s_1^2 - s_2^2} \left( e^{s_1 y} - e^{s_2 y} \right). \quad (3.6)$$

Обратное преобразование от (3.6) в принципе возможно, как сделано в работе [2], но полученный результат настолько громоздкий и необозримый, что целесообразнее воспользоваться асимптотическими выражениями – соответственно, для малых и больших времен.

Для малых времен  $p \rightarrow \infty$  вместо (3.5) можно брать

$$s_{1,2} = -s(1 \pm i)\sqrt{p}, \quad 2s^2 = n. \quad (3.7)$$

Тогда (3.6) примет вид

$$\bar{w} = \frac{M\omega}{4s^2 i} F(p), \quad F(p) = \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} \left( e^{-sy(1+i)\sqrt{p}} - e^{-sy(1-i)\sqrt{p}} \right). \quad (3.8)$$

Оригинал функции  $F(p)$  находим, пользуясь [1,4,5]. Её можно представить как

$$F(p) = -2i \frac{e^{-sy\sqrt{p}} \sin sy\sqrt{p}}{p(p^2 + \omega^2)}. \quad (3.9)$$

Известно [1]

$$\frac{e^{-\sqrt{p}}}{\sqrt{p}} \sin \sqrt{p} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}.$$

Используя теорему подобия, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-sy\sqrt{p}} \sin sy\sqrt{p} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{s^2 y^2}{2t}, \quad s, y > 0. \quad (3.10)$$

Далее известно [5], если

$$G(p) \longrightarrow g(t), \quad \text{то}$$

$$\frac{1}{p\sqrt{p}} G\left(\frac{1}{p}\right) \longrightarrow \int_0^t \frac{\sin(2\sqrt{\xi t})}{\sqrt{\xi t}} g(\xi) d\xi, \quad (3.11)$$

соответствие чего

$$\frac{1}{\sqrt{p}(p^2 + \omega^2)} \longrightarrow \frac{1}{\omega^2} \int_0^\infty \frac{\sin(2\sqrt{\xi t})}{\sqrt{\pi \xi}} \cos \frac{\xi}{\omega} d\xi. \quad (3.12)$$

Используя известное равенство [5]

$$\int_0^\infty \sin 2bx \cos ax^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[ \sin \frac{b^2}{a} C\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) - \cos \frac{b^2}{a} S\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right) \right]$$

$a, b > 0$ , где

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt, \quad S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt,$$

(3.12) можно представить как

$$\frac{1}{\sqrt{p}(p^2 + \omega^2)} \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\omega^3}} \left[ \sin \omega t C(\sqrt{\omega t}) - \cos \omega t S(\sqrt{\omega t}) \right]. \quad (3.13)$$

Согласно теореме свертки [1], из (3.10) и (3.11) получим

$$F(p) \longrightarrow -i \sqrt{\frac{8}{\omega^3}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sin \frac{s^2 y^2}{2(t-\tau)} \left[ \sin \omega \tau C(\sqrt{\omega \tau}) - \cos \omega \tau S(\sqrt{\omega \tau}) \right] d\tau. \quad (3.14)$$

Таким образом, по (3.8) и (3.14) определяется прогиб для малых времен.

Для больших времен  $p \rightarrow 0$  вместо (3.5) можно брать

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{p}{\nu} \pm 2in\nu \quad (3.15)$$

и для преобразований (3.6) с (3.15), пользуясь теоремой опаздывания, получим

$$w(x, t) = \frac{M}{2n\omega} \sin 2\nu y \left[ \cos \omega \left( t - \frac{y}{2\nu} \right) - H \left( t - \frac{y}{2\nu} \right) \right], \quad (3.16)$$

где  $H$  – единичная функция.

4. Для продольного движения решение получается очень простое. Полубесконечный стержень укорачивается со скоростью  $2v$  и на конце приложена сила  $P = P_0 \sin \omega t$ . Тогда преобразованное уравнение движения будет

$$(a^2 - 4v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4v \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad a^2 = \frac{E}{\rho} \quad (4.1)$$

Корни характеристического уравнения

$$S_1 = \frac{P}{a + 2v}, \quad S_2 = -\frac{P}{a - 2v} \quad (4.2)$$

и условие на конце  $y = 0$

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{P_0}{EF} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \quad (4.3)$$

дают

$$\bar{u} = -\frac{P_0 \omega}{EF} \frac{a - 2v}{p(p^2 + \omega^2)} e^{-\frac{py}{a-2v}}. \quad (4.4)$$

Оригинал этой функции будет

$$u(x, t) = \frac{P_0}{EF} \frac{a - 2v}{\omega} \left[ \cos \omega \left( t - \frac{y}{a - 2\omega} \right) - H \left( t - \frac{y}{a - 2\omega} \right) \right]. \quad (4.5)$$

При  $a = 2v$ , естественно, нет движения в стержне.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
2. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.
3. Мовсисян Л.А. Колебания полубесконечной балки с перемещающимся концом. //Изв. АН СССР. МТТ. 1966. №1. С. 174-177.
4. Бейтмен Г. и Эдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М.: Наука, 1969. 344 с.
5. Градштейн И.С. и Рыжик И.М. Таблицы интегралов, суммы рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

Институт механики  
НАН Армении

Поступила в редакцию  
10.04.2008