ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №4, 2008 Механика

УДК 539.3

О ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ НА ГРАНИЦЕ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х.

Ключевые слова: контакт, балка, изгиб, интегральное–разностные уравнение, вычет, асимптотика.
Key words: contact, beam, bending, integral-difference equation, residue, asymptotic.

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան
Առաձգական կիսահարթության եզրում կիսաանվերջ հեծանի ծռման խնդրի մասին

Նորից դիտարկվում է առաձգական կիսահարթության եզրագծում դրված կիսաանվերջ հեծանի ծռման հայտնի կոնտակտային խնդիրը, երբ հեծանի ծայրում կիրառված են կենտրոնացված P_0 ուժը և M_0 մոմենտը: Խնդրի լուծումը բերվում է տարբերակային հավասարման և կառուցվում է նրա փակ լուծումը: Կառուցված լուծման օգնությամբ և տարբերակային հավասարման վերլուծության արդյունքում, որը հնարավորություն է տալիս պարզելու անհայտ կոնտակտային լարման Ֆուրյեի ձևափոխության պատկերի անալիտիկ շարունակության կառուցվածքը, առաջարկվում է յուրահատուկ մոտեցում, որը թույլ է տալիս հաշվել ասիմպտոտիկ վերլուծության համապատասխան գործակիցները վերջավոր տեսքով:

K.L. Aghayan, E.Kh. Grigoryan
On the problem of bending of semi-infinite beam in boundary elastic half-plane

The famous contact problem of bending of semi-infinite beam in elastic half-plane boundary under the action of concentrated loading P_0 and moment M_0 in the end-point of beam is considered. The solution of problem is reduced to the difference equation and close solution is obtained. With the help of built solution and the analysis of functional equation that allows to determinate the structure of analytical continuation of Fourier transformation of unknown contact stress, the peculiar approach is suggested which allows to calculate the coefficient of appropriate asymptotic formulas in the finite species.

Вновь рассматривается известная контактная задача об изгибе полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости, когда к концу балки приложены сосредоточенная сила P_0 и момент M_0. Решение задачи сведено к разностному уравнению и построено её замкнутое решение. При помощи построенного решения и анализа функционального уравнения, позволяющее определить структуру аналитического продолжения преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения, предлагается своеобразный подход, позволяющий вычислить коэффициенты соответствующих асимптотических формул в конечном виде.

В предлагаемой работе вновь рассматривается известная контактная задача об изгибе полубесконечной балки (цилиндрический изгиб полубесконечной пластинки) на границе упругой полуплоскости, когда к концу балки приложены сосредоточенная сила P_0 и момент M_0. Замкнутое решение этой задачи впервые было получено в работе [1] с помощью предельного перехода в решении соответствующей пространственной задачи (устремляя параметр преобразования Фурье к нулю). В последующем эта задача была рассмотрена в работах [2-4]. В [2,3] решение задачи сведено к краевой задаче Карлемана для аналитических функций в полосе, замкнутое решение которого получено сведением ее к задаче Римана на полуоси. В [4] решение задачи сведено к однородному разностному уравнению и построено ее замкнутое решение методом, предложенным в [5,6]. При исследовании поведения контактных напряжений около конца балки и на бесконечности в [1-4] ограничивались только качественным анализом. Было показано, что контактные напряжения имеют порядок $O\left(x^{-1/2}\right)$ при $x \to 0$ и $O\left(x^{-4}\right)$ при $x \to \infty$.

В работе [7] с помощью обобщенного преобразования Фурье решение указанной выше задачи сведено к краевой задаче Римана на действительной оси. Методом факторизации построено замкнутое решение этого функционального уравнения. Простая факторизация коэффициента функционального уравнения позволила получить асимптотические формулы для контактных напряжений в окрестности конца и далеких от него точках балки. При этом, вычислены значения всех коэффициентов, входящих в асимптотические формулы (некоторые вычислительные промахи уточнялись нами в настоящей работе).

Основные предпосылки, связанные с повторным рассмотрением указанной выше задачи, заключаются в следующем:

а) построить еще одно замкнутое решение качественно новой структуры;

б) при помощи анализа разрешающего разностного уравнения определить структуру аналитического продолжения преобразования Фурье неизвестного контактного напряжения $\bar{P}(\alpha)$ [8,9];

г) при помощи построенного решения и анализа функционального уравнения вычислить вычеты $\bar{P}(\alpha)$ и, тем самым, вычислить коэффициенты соответствующих асимптотических формул.

1. Пусть на границе упругой полуплоскости, отнесенной к декартовой системе координат XOY (OX направлена по краю полуплоскости, OY – по внешней нормали), изгибается полубесконечная балка (цилиндрический изгиб пластинки) с постоянной жесткостью D_0. К концу балки приложены сосредоточенные сила P_0 и момент M_0. При обычном предположении, что в контактной зоне касательные напряжения отсутствуют и контактирование происходит без отрыва балки от края полуплоскости [1-4,7-9], требуется определить закон распределения нормальных контактных напряжений, возникающих при контактировании полубесконечной балки с краем полуплоскости.

Дифференциальное уравнение равновесия балки имеет вид:

$$D_0 \mathrm{V}_0''' = q(x), \qquad 0 < x < \infty \tag{1.1}$$

где $\mathrm{V}_0(x) = d\mathrm{v}_0/dx$, $\mathrm{v}_0(x)$ – вертикальные перемещения (прогиб) балки, $q(x)$ –подлежащие определению, неизвестные нормальные контактные напряжения.

Граничные условия при (1.1) будут

$$D_0 \mathrm{V}_0\big|_{x=0} = X_0, \quad D_0 \mathrm{V}_0'\big|_{x=0} = M_0, \quad D_0 \mathrm{V}''\big|_{x=0} = -P_0 \tag{1.2}$$

$$\mathrm{V}_0(x) \to 0 \quad \text{при } x \to \infty$$

где X_0 – неизвестная постоянная.

Условия равновесия балки имеют вид:

$$\int_0^\infty q(x)\,dx = P_0, \qquad \int_0^\infty x q(x)\,dx = M_0. \tag{1.3}$$

Решение уравнения (1.1) при условиях (1.2) представим в виде

$$\mathrm{V}_0(x) = \frac{1}{D_0}\int_0^x (x-t)^2 q(t)\,dt - \frac{P_0}{D_0}x^2 + \frac{M_0}{D_0}x + \frac{X_0}{D_0}, \qquad 0 \le x < \infty \tag{1.4}$$

Из (1.2)–(1.4) нетрудно получить

$$X_0 = -\frac{1}{2}\int_0^\infty t^2 q(t)\,dt \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.4), с учетом (1.3), получим решение уравнения (1.1) в виде

$$\mathrm{V}_0(x) = -\frac{1}{2D_0}\int_0^\infty \vartheta(t-x)(x-t)^2 q(t)\,dt, \qquad 0 \le x < \infty \tag{1.6}$$

где $\vartheta(x)$ – функция Хевисайда.

С другой стороны, для граничных точек полуплоскости имеем [10]

$$\mathrm{V}_1(x) = \frac{d\mathrm{v}_1(x,0)}{dx} = -\frac{1-\nu_1}{\pi\mu_1}\int_0^\infty \frac{q(s)\,ds}{s-x}, \qquad -\infty < x < \infty \tag{1.7}$$

где $\mathrm{v}_1(x,0)$ – вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости, ν_1 – коэффициент Пуассона, а μ_1 – модуль сдвига материала полуплоскости.

Решение поставленной задачи будет точным при принятых допущениях, если установленный закон распределения контактных напряжений $q(x)$ обеспечивает как выполнение условий равновесия (1.3), так и контактного условия, выраженного равенством

$$\mathrm{V}_1(x) = \mathrm{V}_0(x), \qquad 0 < x < \infty\,. \tag{1.8}$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в (1.8), получим определяющее интегральное уравнение для $q(x)$ в виде:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{s-x} q(s)\,ds = \lambda\int_0^\infty \vartheta(s-x)(s-x)^2 q(s)\,ds, \qquad 0 < x < \infty \tag{1.9}$$

$$\lambda = \mu_1 \big/ D_0(1-\nu_1) = 12\mu_1\left(1-\nu_0^2\right) \big/ E_0 h_0^3 (1-\nu_1) \tag{1.10}$$

где h_0, E_0, ν_0 – соответственно, толщина, модуль упругости и коэффициент Пуассона балки.

Таким образом, решение задачи сведено к решению сингулярного интегрального уравнения (1.9) при условиях (1.3).

Решение уравнения (1.9), с учетом (1.3), ищем в классе функции:

$$q(x) \sim x^{-\gamma}\ (\gamma < 1) \text{ при } x \to +0; \qquad q(x) \sim x^{-1-\delta}\ (\delta > 0) \text{ при } x \to \infty \tag{1.11}$$

Сделаем в (1.9) замену переменных

$$x = \beta e^{\nu}, \quad s = \beta e^{u}, \quad \beta = \lambda^{-1/3} \tag{1.12}$$

и применим к ним комплексное преобразование Фурье, при этом имея в виду теорему о свертке. После некоторых преобразований приходим к следующему однородному функционально-разностному уравнению:

$$\operatorname{cth}\pi\alpha \cdot \overline{P}(\alpha) + \overline{P}(\alpha - 3i) \big/ \alpha(\alpha - i)(\alpha - 2i) = 0, \quad -1 < \operatorname{Im}\alpha < -\gamma \tag{1.13}$$

с условиями, вытекающими из (1.3)

$$\overline{P}(-i) = P_0, \qquad \overline{P}(-2i) = \beta^{-1} M_0 = M_* \tag{1.14}$$

$$\alpha = \sigma + i\tau, \qquad P(u) = \beta q\left(\beta e^{u}\right), \qquad \overline{P}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} P(u) e^{i\alpha u}\,du. \tag{1.15}$$

Прежде чем перейти к решению уравнения (1.13) с условиями (1.14), заметим, что из оценок (1.11) следует, что $\bar{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-1-\delta<\operatorname{Im}\alpha<-\gamma$, а $\bar{P}(\alpha-3i)$ – в полосе $2-\delta<\operatorname{Im}\alpha<-\gamma+3$. Тогда первое слагаемое из (1.13) регулярно при $-1<\operatorname{Im}\alpha<-\gamma$,, а второе – в полосе $2-\delta<\operatorname{Im}\alpha<0$. Требуя теперь, чтобы $2-\delta\le-1$, т.е. $\delta\ge3$, получим, что оба слагаемых регулярны в полосе $-1<\operatorname{Im}\alpha<-\gamma$, как это отмечено в (1.13). С другой стороны, из функционального уравнения (1.13) можно заключить, что $\bar{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$, которое указывает, что $\delta=3$, а $\gamma=1/2$. Следовательно, получилось, что $q(x)\sim x^{-4}$ при $x\to\infty$ и $q(x)\sim x^{-1/2}$ при $x\to+0$, что и следовало ожидать [1].

Таким образом, решение поставленной выше контактной задачи свелось к решению функционально-разностному уравнению (1.13) с условиями (1.14).

2. Перейдем к решению (1.13). Следуя Койтеру [11], её решение ищем в виде

$$\bar{P}(\alpha)=-iP_0\Gamma(i\alpha)\bar{T}(\alpha)/\operatorname{sh}(\pi\alpha/2), \tag{2.1}$$

где $\Gamma(z)$ – известная гамма-функция Эйлера, $\bar{T}(\alpha)$ – неизвестная функция.

Подставляя (2.1) в (1.13), после некоторых выкладок для $\bar{T}(\alpha)$ получим функциональное уравнение

$$\bar{R}(\alpha)\cdot\bar{T}(\alpha)-\bar{T}(\alpha-3i)=0, \qquad -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{2.2}$$

$$\bar{R}(\alpha)=\operatorname{ch}\pi\alpha/(\operatorname{ch}\pi\alpha-1) \tag{2.3}$$

Из (2.1) и (1.12) следует:

$$\bar{T}(-i)=1, \qquad \bar{T}(-2i)=0. \tag{2.4}$$

Для решения уравнения (2.2) с условиями (2.4) факторизуем $\bar{R}(\alpha)$, представив её в виде

$$\bar{R}(\alpha)=\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{ch}\pi\alpha-1}=\frac{Y(\alpha-3i)}{Y(\alpha)}, \qquad -1<\operatorname{Im}\alpha<-\frac{1}{2} \tag{2.5}$$

где $Y(\alpha)$ регулярна в полуполосе $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$, там не имеет нулей и удовлетворяет условиям (A – конечная постоянная):

$$Y(-i)=1, \quad Y(\alpha)\to A \quad \text{при} \quad |\alpha|\to\infty, \quad -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{2.6}$$

Очевидно, что при этом

$$Y'(\alpha)/Y(\alpha)\to0 \quad \text{при} \quad |\alpha|\to\infty, \quad -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{2.7}$$

Теперь логарифмируя, а затем дифференцируя обе части (2.5), получим

$$\bar{X}(\alpha)-\bar{X}(\alpha-3i)=\bar{L}(\alpha), \qquad -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{2.8}$$

где

$$\bar{X}(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}(\ln Y(\alpha))=\frac{Y'(\alpha)}{Y(\alpha)} \tag{2.9}$$

$$\bar{L}(\alpha)=\frac{\pi\operatorname{sh}\pi\alpha}{\operatorname{ch}\pi\alpha-1}-\frac{\pi\operatorname{sh}\pi\alpha}{\operatorname{ch}\pi\alpha} \tag{2.10}$$

Из (2.7) и (2.9) следует, что $\overline{X}(\alpha)\to 0$ в полосе $-1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$ при $|\alpha|\to\infty$. Тогда, применив к (2.8) обратное преобразование Фурье и используя теорему Коши о вычетах, будем иметь

$$X(u)\left(1-e^{3u}\right)=L(u) \tag{2.11}$$

где

$$X(u)=F^{-1}\left[\overline{X}(\alpha)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\tau'-\infty}^{i\tau'+\infty}\overline{X}(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha,\quad -1<\tau'<-\frac{1}{2} \tag{2.12}$$

$$L(u)=F^{-1}\left[\overline{L}(\alpha)\right]=i\left(\operatorname{ch}(u/2)-1\right)\big/e^{u}\operatorname{sh}u \tag{2.13}$$

или же

$$X(u)=C_1\delta(u)+L(u)\big/\left(1-e^{3u}\right) \tag{2.14}$$

где C_1 – постоянная, $\delta(u)$ – известная-дельта функция Дирака.

Применив теперь к (2.14) преобразование Фурье, получим

$$\overline{X}(\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{ch}u/2}{\left(e^{3u}-1\right)e^{u}\operatorname{sh}u}e^{i\alpha u}du+C_1 \tag{2.15}$$

Интеграл, входящий в (2.15), удается вычислить в конечном виде и в итоге решение разностного уравнения (2.8) $\overline{X}(\alpha)$ представляется в виде:

$$\begin{gathered}\overline{X}(\alpha)=\frac{i\pi}{3\operatorname{sh}2\pi\alpha}\left[\sqrt{3}\left(\operatorname{sh}\frac{2\pi\alpha}{3}-i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{2\pi\alpha}{3}\right)-\right.\\ \left.-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{sh}\frac{4\pi\alpha}{3}-i\sqrt{3}\operatorname{ch}\frac{4\pi\alpha}{3}\right)-3i\operatorname{ch}\pi\alpha-2\alpha-5i\right]+C_1\end{gathered} \tag{2.16}$$

Имея в виду, что $\overline{X}(\alpha)\to 0$ в полосе $-1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$ при $|\alpha|\to\infty$, получим $C_1=0$.

Следует здесь особо отметить, что вычисление $\overline{X}(\alpha)$ в конечном виде позволяет в дальнейшем вычислить вычеты аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$ (приложение).

Имея $\overline{X}(\alpha)$ из (2.9) и (2.6), получим следующее представление для $Y(\alpha)$:

$$Y(\alpha)=\exp\left[\int\limits_{-i}^{\alpha}\overline{X}(\xi)d\xi\right]=\exp\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{ch}(u/2)}{\left(e^{3u}-1\right)e^{u}\operatorname{sh}u}\cdot\frac{e^{i\alpha u}-e^{u}}{u}du\right] \tag{2.17}$$

которая, очевидно, регулярна в полосе $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$.

Подставляя теперь представление (2.5) в (2.2), приходим к однородному разностному уравнению

$$\overline{Z}(\alpha)-\overline{Z}(\alpha-3i)=0,\qquad -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{2.18}$$

при условиях

$$\overline{Z}(-i)=1,\ \ \overline{Z}(-2i)=0, \tag{2.19}$$

где

$$\bar{Z}(\alpha)=\bar{T}(\alpha)/Y(\alpha) \tag{2.20}$$

регулярна в полосе $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$, а $Y(\alpha)$ дается формулой (2.17).

Решение уравнения (2.18), удовлетворяющего условию $\bar{Z}(\alpha)\to 0$ в полосе $-1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$ при $|\alpha|\to\infty$, будет $\bar{Z}(\alpha)\equiv 0$. Но в таком случае условие $\bar{Z}(-i)=1$ не будет выполняться. Это означает, что решение (2.18) не может стремиться к нулю в полосе $-1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$ при $|\alpha|\to\infty$.

С другой стороны, пользуясь формулой Стирлинга, получим,

$$\frac{\Gamma(i\alpha)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/2)}\sim|\alpha|^{-\tau-1/2}e^{-\pi|\sigma|},\qquad |\sigma|\to\infty,\qquad -1<\operatorname{Im}\alpha=\tau<-1/2 \tag{2.21}$$

Тогда, имея в виду, что $\bar{P}(\alpha)\to 0$ при $|\alpha|\to\infty$ в полосе $-1<\tau<-1/2$, из (2.21) и (2.1) получим

$$e^{-\pi|\sigma|}\bar{T}(\alpha)\to 0,\qquad |\sigma|\to\infty,\qquad -1<\tau<-1/2. \tag{2.22}$$

Последнее, в свою очередь, с учетом (2.6) и (2.20), указывает на то, что

$$\bar{Z}(\alpha)/\operatorname{sh}\pi\alpha\to 0 \quad \text{при} \quad |\alpha|\to\infty,\ -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{2.23}$$

Следовательно, решение уравнения (2.18) можно построить методом Койтера [11], предварительно разделив обе части уравнения (2.18) на $\operatorname{sh}\pi\alpha$. Сделав это, получим

$$\bar{Z}(\alpha)/\operatorname{sh}\pi\alpha+\bar{Z}(\alpha-3i)/\operatorname{sh}\pi(\alpha-3i)=0,\qquad -1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2 \tag{2.24}$$

Таким образом, решение уравнения (2.2) с условиями (2.4) свелось к (2.24) с условиями (2.19).

Применив теперь к (2.24) обратное преобразование Фурье и используя теорему Коши о вычетах, с учетом (2.23) и (2.19) получим

$$Z(\nu)=i\left[\bar{Z}(-3i)/\pi\left(1+e^{3\nu}\right)+e^{2\nu}/\pi\left(1+e^{3\nu}\right)\right] \tag{2.25}$$

где $\bar{Z}(-3i)$ – неизвестная постоянная, а

$$Z(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{ic-\infty}^{ic+\infty}\frac{\bar{Z}(\alpha)}{\operatorname{sh}\pi\alpha}e^{-i\alpha\nu}d\alpha,\qquad -1<c<-1/2 \tag{2.26}$$

Тогда, по обратной формуле Фурье, из (2.25) и (2.26) получим

$$\bar{Z}(\alpha)=\frac{\operatorname{sh}\pi\alpha}{3}\left[\frac{\bar{Z}(-3i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/3)}+\frac{1}{\operatorname{sh}\left(\pi(\alpha-2i)/3\right)}\right] \tag{2.27}$$

Отметим, что при получении (2.27) было использовано значение интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\alpha\nu}}{1+e^{3\nu}}d\nu=-\frac{i\pi}{3}\frac{1}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/3)},\qquad -3<\operatorname{Im}\alpha<0 \tag{2.28}$$

Подставляя значение $\bar{Z}(\alpha)$ из (2.27) в (2.20), а последнее в (2.1), получим окончательное выражение для $\bar{P}(\alpha)$ в виде

$$\bar{P}(\alpha)=-\frac{2iP_0}{3}\cdot\Gamma(i\alpha)Y(\alpha)\operatorname{ch}\frac{\pi\alpha}{2}\left[\frac{\bar{Z}(-3i)}{\operatorname{sh}(\pi\alpha/3)}+\frac{1}{\operatorname{sh}(\pi(\alpha-2i)/3)}\right] \quad (2.29)$$

Обратимся теперь к условиям (1.14). Нетрудно убедиться, что первое условие $\bar{P}(-i)=P_0$ удовлетворяется тождественно, а из второго – $\bar{P}(-2i)=M_*$ получим значение неизвестного $\bar{Z}(-3i)$ в виде

$$\bar{Z}(-3i)=1-3\sqrt{3}M_*/4P_0Y(-2i)=1-\sqrt{3}M_*/P_0 \quad (2.30)$$

Здесь было учтено, что $Y(-2i)=3/4$ (см. приложение).

Таким образом, решение функционально-разностного уравнения (1.13) с условиями (1.14) получено в виде (2.29), где $Y(\alpha)$ и $\bar{Z}(-3i)$ даются формулами (2.17) и (2.30).

Имея (2.29), по обратной формуле Фурье получим решение задачи в виде

$$p(\nu)=\beta q(\beta e^{\nu})=\frac{1}{2\pi}\int_{ic-\infty}^{ic+\infty}\bar{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}d\alpha, \quad -4<c<-1/2 \quad (2.31)$$

3. Перейдем к определению асимптотических формул, характеризующих поведение контактных напряжений при $x\to+0$ и $x\to\infty$. Эти формулы, как обычно, получаются из (2.31) при помощи теоремы Коши о вычетах. Но для этого необходимо определить полюса аналитического продолжения (АП) функции $\bar{P}(\alpha)$ вне полосы $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$ и уметь вычислить соответствующие вычеты в этих полюсах. Ясно, что из (2.29) невозможно непосредственно угадать структуру АП $\bar{P}(\alpha)$. Для этой цели, помимо (2.29), необходимо существенным образом использовать функциональное уравнение (1.13), т.е. параллельно рассматривать АП уравнения (1.13) вне полосы $-1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$.

Рассмотрим сначала АП $\bar{P}(\alpha)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha>-1$, имея при этом в виду, что $\bar{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-4<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$. Тогда из функционального уравнения (1.13) следует, что точка $\alpha=-i/2$ может быть простым полюсом для АП $\bar{P}(\alpha)$. С другой стороны, так как $\bar{P}(-3i)$ – конечная величина, то $\bar{P}(0)$ также конечна. Аналогичным образом, из (1.13) следует, что $\bar{P}(i)$ и $\bar{P}(2i)$ – конечные величины, а точки $\alpha=ik$ $(k=3,4,...)$ являются простыми нулями АП $\bar{P}(\alpha)$. Далее, так как $\bar{P}(-5i/2)$ конечна, то опять из (1.13) получим, что точка $\alpha=i/2$ может быть простым полюсом для АП $\bar{P}(\alpha)$. Аналогично, точка $\alpha=3i/2$ может быть простым полюсом для АП $\bar{P}(\alpha)$, так как $\bar{P}(-3i/2)$ конечна. Точка $\alpha=5i/2$ может быть уже полюсом второго порядка, так как $\alpha=-i/2$ – простой полюс $\bar{P}(\alpha)$, а $\operatorname{ch}(5\pi i/2)=0$. Продолжая эти рассуждения, нетрудно убедиться, что в точках-тройках $\{(3n-1/2)i;(3n+1/2)i;(3n+3/2)i\}_{n=0}^{\infty}$ аналитическое продолжение $\bar{P}(\alpha)$ может иметь полюса $(n+1)$-го порядка.

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение $\overline{P}(\alpha)$ в полуплоскость $\operatorname{Im}\alpha < -1/2$. Поскольку $\overline{P}(-i); \overline{P}(-2i)$ и $\overline{P}(-3i)$ – конечные величины, то из (1.13) следует, что в точках $\alpha = -4i,\ \alpha = -5i$ и $\alpha = -6i$ АП $\overline{P}(\alpha)$ имеет простые полюса. Далее, так как $\alpha = -4i$ – простой полюс для АП $\overline{P}(\alpha)$, то опять из (1.13) получим, что в точке $\alpha = -7i$ АП $\overline{P}(\alpha)$ имеет двухкратный полюс. Продолжая этот процесс, в итоге получим, что аналитическое продолжение $\overline{P}(\alpha)$ в области $\operatorname{Im}\alpha < -1/2$ имеет полюса $(n+1)$-го порядка в точках-тройках $\left\{-(3n+4)i; -(3n+5)i; -(3n+6)i\right\}_{n=0}^{\infty}$.

Приступим к определению асимптотической формулы для контактных напряжений $q(x)$ при $x \to +0$. Так как $x = e^{\nu}$ и при $0 < x < 1,\quad \nu < 0$, то при выходе из полосы регулярности контур интегрирования в (2.31) следует замыкать в верхней полуплоскости и рассматривать полюса аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$ в области $\operatorname{Im}\alpha > -1$. Из (2.6), (2.21) и (2.29) следует, что в полосе $-1 < \operatorname{Im}\alpha < -1/2$ $\overline{P}(\alpha)$ регулярна и $\left|\overline{P}(\alpha)\right| \to 0$ равномерна по τ при $|\sigma| \to \infty$. Тогда имея в виду хорошо известную формулу

$$\Gamma(i\alpha)\Gamma(-i\alpha) = \pi/\alpha\operatorname{sh}\pi\alpha,$$

по принципу аналитического продолжения можно утверждать, что $\overline{P}(\alpha)$ регулярна в каждой полосе $m - 1/2 < \operatorname{Im}\alpha < m + 1/2\quad (m = 0,1,2,\ldots)$ и $\left|\overline{P}(\alpha)\right| \to 0$ равномерна относительно τ при $|\sigma| \to \infty$. Следовательно, имея в виду вышесказанное о полюсах $\overline{P}(\alpha)$ из (2.31), при помощи теоремы Коши о вычетах, для любого конечного неотрицательного целого n будем иметь $(\nu < 0)$:

$$P(\nu) = i\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2}\left[\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\left(\alpha - \alpha_k^{(j)}\right)^{k+1}\overline{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}\right)\right]\Bigg|_{\alpha=\alpha_k^{(j)}} +$$

$$+ i\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{d^n}{n!\,d\alpha^n}\left(\left(\alpha - \alpha_n^{(j)}\right)^{n+1}\overline{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}\right)\right]\Bigg|_{\alpha=\alpha_n^{(j)}} + \frac{1}{2\pi}\int_{i\tau'-\infty}^{i\tau'+\infty}\overline{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}d\alpha, \quad (3.1)$$

$$n = 0,1,2,\ldots;\quad m = 0,1,2;\qquad 3n + m - 1/2 < \tau' < 3n + m + 1/2$$

где $\alpha_n^{(m)} = (3n + m - 1/2)i$ –полюса аналитического продолжения $\overline{P}(\alpha)$.

Для интегрального слагаемого из (3.1), опять по теореме Коши будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{i\tau'-\infty}^{i\tau'+\infty}\overline{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}d\alpha = \text{Выч.}\left(\overline{P}(\alpha)\right)\Big|_{\alpha=(3n+m+1/2)} e^{(3n+m+1/2)\nu} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{i\tau''-\infty}^{i\tau''+\infty}\overline{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}d\alpha,\qquad 3n + m + 1/2 < \tau'' < 3n + m + 3/2 \quad (3.2)$$

Следовательно, по известной теореме [12] можем утверждать, что при $\nu \to -\infty$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{i\tau'-\infty}^{i\tau'+\infty}\bar{P}(\alpha)e^{-i\alpha\nu}d\alpha\right| < e^{(3n+m+1)\nu} \tag{3.3}$$

для любого неотрицательного целого n и $m=\overline{0,2}$.

Таким образом, если нам удастся вычислить вычеты функции $\bar{P}(\alpha)$ в полюсах $\alpha=(3n+m-1/2)i$, то по формуле (3.1) можем определить асимптотическое поведение контактных напряжений при $\nu\to-\infty$ (т.е. при $x\to+0$) для любого конечного n. Очевидно, что вычислить эти вычеты прямым подходом из (2.29) невозможно. Оказывается, что эти вычеты можно вычислить при помощи функционального уравнения (1.13). Ниже будет показан алгоритм вычисления этих вычетов, ограничиваясь четырьмя первыми членами асимптотики из (3.1). В этом случае $n=1;\ m=0$ (в точках $-i/2; i/2$ и $3i/2$ имеем простой полюс, а в точке $5i/2$ – полюс второго порядка). Тогда из (3.1), переходя к прежним переменным, будем иметь, что при $x\to+0$

$$\beta q(\beta x)=i\sum_{k=0}^{3}B_{-1}^{\frac{i(2k-1)}{2}}x^{\frac{2k-1}{2}}-B_{-2}^{(5i/2)}x^{5/2}\ln x+O\left(x^{\frac{7}{2}}(\ln x+1)\right) \tag{3.4}$$

где $B_{-1}^{(\alpha_k)}$ – вычет аналитического продолжения $\bar{P}(\alpha)$ в точках

$$\alpha_k=(k-1/2)i\quad\left(k=\overline{0,3}\right),\qquad \text{а}\quad B_{-2}^{(5i/2)}=\lim_{\alpha\to5i/2}(\alpha-5i/2)^2\,\bar{P}(\alpha) \tag{3.5}$$

Вычислим вычет $B_{-1}^{(-i/2)}$ АП $\bar{P}(\alpha)$ в точке $\alpha=-i/2$. Для этого обратимся к функциональному уравнению (1.13), представив ее в виде

$$\lim_{\alpha\to-i/2}\left[\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{(\alpha+i/2)\operatorname{sh}\pi\alpha}\left(\alpha+\frac{i}{2}\right)\bar{P}(\alpha)+\frac{\bar{P}(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)}\right]=0 \tag{3.6}$$

Вычислив предел, получим

$$B_{-1}^{(-i/2)}=\lim_{\alpha\to-i/2}\left(\alpha+\frac{i}{2}\right)\bar{P}(\alpha)=8i\bar{P}(-7i/2)/15\pi \tag{3.7}$$

Таким образом, вычет АП $\bar{P}(\alpha)$ в точке $\alpha=-i/2$ выражается через значение $\bar{P}(\alpha)$ в её регулярной точке $\alpha=-7i/2$. Вычислив $\bar{P}(-7i/2)$ из (2.29) и подставив её значение в (3.7), получим

$$B_{-1}^{(-i/2)}=-i\frac{1}{\sqrt{3}\pi}\left[2P_0-\sqrt{3}M_*\right]. \tag{3.8}$$

Аналогичным (3.6)–(3.8) путем получим

$$\begin{gathered}B_{-1}^{(i/2)}=-\frac{2i}{3}\left[P_0-2\sqrt{3}M_*\right];\quad B_{-1}^{(3i/2)}=i\frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}}\left[P_0-\sqrt{3}M_*\right],\\ B_{-2}^{(5i/2)}=-\frac{8i}{15\pi}B_{-1}^{(-i/2)}=\frac{8}{15\pi\sqrt{3}\pi}\left[2P_0-\sqrt{3}M_*\right].\end{gathered} \tag{3.9}$$

Отметим, что при вычислении вычетов (3.8), (3.9) были использованы значения функции $Y(\alpha)$ в её регулярных точках $-3i/2,-2i,-7i/2$, приведённые в приложении.

Вычислим теперь $B_{-1}^{(5i/2)}$. Так как

$$B_{-1}^{(5i/2)} = \left[\left(\left(\alpha - 5i/2\right)^2 \bar{P}\left(\alpha\right)\right)'\right]\Bigg|_{\alpha=5i/2}, \tag{3.10}$$

то из (2.29) получим

$$B_{-1}^{(5i/2)} = -\frac{2ip_0}{3}\left(F\left(\frac{5i}{2}\right)y_{-1}^{(5i/2)} + y_{-2}^{(5i/2)}\left.\frac{dF\left(\alpha\right)}{d\alpha}\right|_{\alpha=5i/2}\right), \tag{3.11}$$

$$F\left(\alpha\right) = \Gamma\left(i\alpha\right)\mathrm{ch}\frac{\pi\alpha}{2}\left[\frac{\bar{Z}\left(-3i\right)}{\mathrm{sh}\,\pi\alpha/3} + \frac{1}{\mathrm{sh}\,\pi\left(\alpha-2i\right)/3}\right], \tag{3.12}$$

$$y_{-1}^{(5i/2)} = \lim_{\alpha\to 5i/2}\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\alpha-5i/2\right)^2 Y\left(\alpha\right)\right); \quad y_{-2}^{(5i/2)} = \lim_{\alpha\to 5i/2}\left(\alpha-5i/2\right)^2 Y\left(\alpha\right). \tag{3.13}$$

Из (3.12) получим

$$F\left(\frac{5i}{2}\right) = i\sqrt{2}\Gamma\left(-5/2\right)\left[\bar{Z}\left(-3i\right)+1\right], \qquad \left.\frac{dF\left(\alpha\right)}{d\alpha}\right|_{\alpha=5i/2} = \tag{3.14}$$

$$= \sqrt{2}\left(\left(-\Gamma'\left(-5/2\right) - \frac{\pi}{2}\Gamma\left(-5/2\right)\right)\left(\bar{Z}\left(-3i\right)+1\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\Gamma\left(-5/2\right)\left(\bar{Z}\left(-3i\right)-1\right)\right).$$

Подставляя (3.14) в (3.11), имея при этом в виду (2.30) и значения $y_{-1}^{(5i/2)}$ и $y_{-2}^{(5i/2)}$, приведённые в приложении, получим значение вычета АП $\bar{P}\left(\alpha\right)$ в точке $\alpha = 5i/2$ в виде

$$B_{-1}^{(5i/2)} = i\frac{8\sqrt{6}}{45\pi^2}\left(\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)\left(\frac{5\sqrt{3}}{54} - \frac{3\pi}{4} - \psi\left(-5/2\right)\right) - \pi M_*\right) \tag{3.15}$$

где $\psi\left(z\right) = \Gamma'\left(z\right)/\Gamma\left(z\right)$ – известная пси-функция.

Подставляя (3.8), (3.9) и (3.15) в (3.4), получим следующую асимптотическую формулу (ограничиваясь первыми четырьмя членами) для контактных напряжений $q\left(x\right)$ при $x \to +0$

$$\begin{aligned}\beta q\left(\beta x\right) = {} & \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{\pi}}\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)x^{-1/2} + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\left(P_0 - 2\sqrt{3}M_*\right)x^{1/2} - \\ & -\frac{2\sqrt{6}}{9\sqrt{\pi}}\left(P_0 - \sqrt{3}M_*\right)x^{3/2} - \\ & -\frac{8\sqrt{6}}{45\pi^2}\left[\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)\left(\frac{5\sqrt{3}}{54} - \frac{3\pi}{4} - \psi\left(-\frac{5}{2}\right)\right) - \pi M_*\right]x^{5/2} - \\ & -\frac{8\sqrt{3}}{45\pi\sqrt{\pi}}\left(2P_0 - \sqrt{3}M_*\right)x^{5/2}\ln x + O\left(x^{\frac{7}{2}}\left(\ln x + 1\right)\right), \qquad x \to +0\end{aligned} \tag{3.16}$$

Из формулы (3.16) следует, что контактные напряжения имеют корневую особенность в точке $x=+0$. Оно исчезает при $P_0=\sqrt{3}\lambda M_0/2$. Отметим еще, что все коэффициенты в разложении (3.16) с точностью совпадают с соответствующими коэффициентами из [7]. Кроме того, при $P_0>\sqrt{3}\lambda M_0/2$ $\quad q(x)>0$ в некоторой окрестности точки $x=0$, т.е. балка в некоторой окрестности своего конца вдавливается на полуплоскость.

Перейдем к определению асимптотической формулы, представляющей поведение контактных напряжений при $x\to\infty$ $(\nu\to\infty)$ из интеграла (2.31). Очевидно, что в этом случае следует рассматривать полюса АП $\overline{P}(\alpha)$ в области $\operatorname{Im}\alpha<-1/2$. Эти полюса , как было отмечено выше, расположены в точках-тройках $\{-(3n+7)i;-(3n+5)i;-(3n+6)i\}_{n=0}^{\infty}$, в которых АП $\overline{P}(\alpha)$ имеет полюс $(n+1)$-го порядка. Выше также было отмечено, что $\overline{P}(\alpha)$ регулярна в полосе $-1<\operatorname{Im}\alpha<-1/2$ и там равномерна по τ $\quad\left|\overline{P}(\alpha)\right|\to 0$ при $|\sigma|\to\infty$. Тогда из (2.6), (2.21) и (2.29) следует, что АП $\overline{P}(\alpha)$ регулярно в каждой полосе $-(n+5)<\operatorname{Im}\alpha<-(n+4)$, $(n=0,1,2,...)$ и $\left|\overline{P}(\alpha)\right|\to 0$ равномерна по τ при $|\sigma|\to\infty$. Следовательно, при помощи теоремы Коши для любого неотрицательного n из (2.31) получим, аналогичное (3.1), выражение для контактных напряжений при $x>1$

$$\begin{gathered}\beta q(\beta x)=-i\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2}\left[\frac{d^k}{k!\,d\alpha^k}\left(\left(\alpha-\alpha_k^{(j)}\right)^{k+1}\overline{P}(\alpha)x^{-i\alpha}\right)\right]\Bigg|_{\alpha=\alpha_k^{(j)}}-\\ -i\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{d^n}{n!\,d\alpha^n}\left(\left(\alpha-\alpha_n^{(j)}\right)^{n+1}\overline{P}(\alpha)x^{-i\alpha}\right)\right]\Bigg|_{\alpha=\alpha_n^{(j)}}+\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau'_+-\infty}^{i\tau'_-+\infty}\overline{P}(\alpha)x^{-i\alpha}d\alpha \\ -(3n+m+5)i<\tau'_-<-(3n+m+4),\quad \alpha_n^{(m)}=-(3n+m+4)i \\ n=0,1,2,...,\qquad\qquad m=0,1,2.\end{gathered}\tag{3.17}$$

При этом, аналогично (3.2), имеет место [12]

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\tau'_--\infty}^{\tau'_-+\infty}\overline{P}(\alpha)x^{-i\alpha}d\alpha\right|<x^{-(3n+m+5)\nu},\qquad x\to\infty\tag{3.18}$$

которое указывает, что (3.18) даёт асимптотическое представление контактных напряжений при $x\to\infty$ для любого $n=0,1,2,...;\quad m=\overline{0,2}$.

Ограничиваясь, как и выше, четырьмя первыми членами асимптотики, вычислим коэффициенты-вычеты разложения, входящие в (3.17), указывая при этом способ вычисления этих вычетов для любого n. В рассматриваемом случае следует в (3.17) принять $n=1,\ \ m=0$ (в точках $\alpha=-ki$ $(k=4,5,6)$ $\overline{P}(\alpha)$ имеет простой полюс, а в точке $\alpha=-7i$ –двухкратный полюс). Тогда, при помощи (1.13) будем иметь

$$\lim_{\alpha\to -i}\left[\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{sh}\pi\alpha}(\alpha+i)\bar{P}(\alpha)+\frac{(\alpha+i)\bar{P}(\alpha-3i)}{\alpha(\alpha-i)(\alpha-2i)}\right]=0 \tag{3.19}$$

Вычислив предел, имея при этом условие (1.14), получим

$$A_{-1}^{(-4i)}=\lim_{\alpha\to -4i}(\alpha+4i)\bar{P}(\alpha)=-iP_0\pi^{-1}\Gamma(4) \tag{3.20}$$

Аналогично, из (1.13), (1.14) и (2.29) получим значения вычета АП $\bar{P}(\alpha)$ в точках $\alpha=-5i$ и $\alpha=-6i$ в виде

$$A_{-1}^{(-5i)}=-iM_*\Gamma(5)/\pi\Gamma(2),\quad A_{-1}^{(-6i)}=2iP_0\Gamma(6)Y(-3i)\bar{Z}(-3i)/\pi\Gamma(3) \tag{3.21}$$

В точке $\alpha=-7i$ АП $\bar{P}(\alpha)$ имеет двухкратный полюс. Следовательно,

$$\bar{P}(\alpha)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k^{(-7i)}(\alpha+7i)^k+\frac{A_{-1}^{(-7i)}}{\alpha+7i}+\frac{A_{-2}^{(-7i)}}{(\alpha+7i)^2} \tag{3.22}$$

Тогда, имея в виду (2.29), получим

$$A_{-2}^{(-7i)}=\lim_{\alpha\to}(\alpha+7i)^2\bar{P}(\alpha)=-P_0\Gamma(7)y_1(-7i) \tag{3.23}$$

где

$$y_1(\alpha)=(\alpha+7i)^2Y(\alpha) \tag{3.24}$$

Из (3.22) для $A_{-1}^{(-7i)}$ получим

$$A_{-1}^{(-7i)}=-\frac{2iP_0}{3}\left[F(-7i)y_1'(-7i)+y_1(-7i)\left.\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=-7i}\right] \tag{3.25}$$

где $F(\alpha)$ даётся формулой (3.12). При этом нетрудно убедиться, что

$$F(-7i)=-i\frac{3}{2}\Gamma(7);\qquad \left.\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=-7i}=-\frac{3}{2}\Gamma(7)\left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\bar{Z}(-3i)-\psi(7)\right] \tag{3.26}$$

Подставляя (3.26) в (3.25), получим

$$A_{-2}^{(-7i)}=-P_0\Gamma(7)\left[y_1'(-7i)-iy_1(-7i)\left(2\pi 3^{-1,5}\bar{Z}(-3i)-\psi(7)\right)\right] \tag{3.27}$$

Значения $y_1(-7i)$ и $y_1'(-7i)$ приведены в приложении, а $\bar{Z}(-3i)$ дается формулой (2.30).

Имея (3.20), (3.21), (3.23) и (3.27), из (3.17) получим формулу при $x\to\infty$

$$\beta q(\beta x)=-\frac{P_0\Gamma(4)}{\pi x^4}-\frac{M_*\Gamma(5)}{\pi x^5}+\frac{2\Gamma(6)}{3\pi}\left(P_0-\sqrt{3}M_*\right)\frac{1}{x^6}+ \tag{3.28}$$

$$+\frac{\Gamma(7)}{\pi^2}\left[P_0\left(\frac{9+8\pi\sqrt{3}}{27}-\psi(7)\right)-\frac{2\pi}{3}M_*\right]\frac{1}{x^7}+\frac{P_0\Gamma(7)}{\pi^2}\frac{\ln x}{x^7}+O\left(x^{-8}(\ln x+1)\right)$$

представляющее асимптотическое поведение контактных напряжений (ограничиваясь первыми четырьмя членами) при $x\to\infty$.

Из (3.28) следует, что поведение контактных напряжений в далеких, от точек приложения сосредоточенной силы P_0 и момента M_0, точках имеют разные порядки убывания. Формула (3.28) также указывает, что после некоторого значения x балка всегда растягивает полуплоскость.

Приложение

Здесь коротко остановимся на вычислении значения $Y(\alpha)$ и $Y'(\alpha)$ в некоторых определенных точках, которые потребовались при определении коэффициентов асимптотических представлений (3.16) и (3.28). Отметим, что $Y(\alpha)$ является решением уравнения (2.5) и дается формулой (2.17). Представим (2.17) в виде

$$Y(\alpha)=\exp\left(H(\alpha)\right)=\exp\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{ch}(\nu/2)}{\left(e^{3\nu}-1\right)e^{\nu}\operatorname{sh}\nu}\frac{e^{i\alpha\nu}-e^{\nu}}{\nu}d\nu\right] \qquad (0.1)$$

В точках полосы регулярности $-4<\operatorname{Im}\alpha<-0,5$ значения $Y(\alpha)$ вычисляются прямым вычислением интегралов $H(\alpha)$, приводя их к табличным интегралам. Так, при $\alpha=-2i$ будем иметь

$$\begin{aligned}H(-2i)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\operatorname{ch}(\nu/2)}{e^{3\nu}-1}\frac{e^{\nu}-1}{\nu\operatorname{sh}\nu}d\nu=\\&=4\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}^2(\nu/4)\operatorname{ch}(\nu/2)}{\nu\operatorname{sh}(3\nu/2)}d\nu-4\int_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}^2(\nu/4)d\nu}{\nu\operatorname{sh}\nu}=\ln\frac{3}{4}\end{aligned} \qquad (0.2)$$

Следовательно, из (0.1) и (0.2) получим

$$Y(-2i)=3/4\,. \qquad (0.3)$$

Значения последних интегралов из (0.2) приведены в [13, стр.355].

Аналогично (0.2) получим

$$\begin{aligned}&H(-3i)=\ln(3/2)\Rightarrow Y(-3i)=2/3\\&H(-3i/2)=\ln\left(\sqrt{3}/2\right)\Rightarrow Y(-3i/2)=\sqrt{3}/2\\&H(-5i/2)=-\ln\sqrt{2}\Rightarrow Y(-5i/2)=\sqrt{2}/2\\&H(-7i/2)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{8}\Rightarrow Y(-7i/2)=\sqrt{6}/4\end{aligned} \qquad (0.4)$$

Обратимся к вычислению $y_{-1}^{(5i/2)}$ и $y_{-2}^{(5i/2)}$ из (3.13).

Точка $\alpha=5i/2$ уже не принадлежит полосе регулярности $Y(\alpha)$ и прямое вычисление пределов из (3.13) невозможно. Поэтому обратимся к функциональному уравнению (2.5) и рассмотрим её аналитическое продолжение из полосы регулярности $-1<\operatorname{Im}\alpha<-0,5$ на всю комплексную плоскость, которое, очевидно, имеет место во всей комплексной плоскости, и где под $Y(\alpha)$ вне интервала $-4<\operatorname{Im}\alpha<-0,5$ понимается её аналитическое продолжение. О структуре АП $Y(\alpha)$ можно догадаться, используя функциональное уравнение (2.5), как это было сделано выше для $\overline{P}(\alpha)$.

Рассмотрим функциональное уравнение (2.5), представив ее в виде

$$\lim_{\alpha\to5i/2}\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{(\alpha-5i/2)(\operatorname{ch}\pi\alpha-1)}\left(\alpha-\frac{5i}{2}\right)^2Y(\alpha)=\lim_{\alpha\to5i/2}\left(\alpha-\frac{5i}{2}\right)Y(\alpha-3i) \quad (0.5)$$

Вычислив пределы, имея в виду (3.13), получим

$$y_{-2}^{(5i/2)} = i\pi^{-1} y_{-1}^{(-i/2)},\ \ y_{-1}^{(-i/2)} = \lim_{\alpha\to i/2}\left(\alpha + i/2\right)Y\left(\alpha\right) \tag{0.6}$$

В свою очередь, из функционального уравнения (2.5) получим

$$y_{-1}^{(-i/2)} = \frac{1}{\pi i} Y\left(-7i/2\right) \tag{0.7}$$

Тогда (0.4) и (0.6) дают

$$y_{-2}^{(5i/2)} = \frac{1}{\pi^2} Y\left(-7i/2\right) = \frac{\sqrt{6}}{4\pi^2} \tag{0.8}$$

Для вычисления $y_{-1}^{(5i/2)}$ умножим уравнение (2.5) на $\left(\alpha - 5i/2\right)$, продифференцируем и вычислим пределы при $\alpha \to 5i/2$, имея при этом в виду (3.13), после чего получим

$$-i\pi y_{-1}^{(5i/2)} + y_{-2}^{(5i/2)}\pi^2 = \left[\left(\left(\alpha - 5i/2\right)Y\left(\alpha - 3i\right)\right)'\right]\Big|_{\alpha=5i/2} \tag{0.9}$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\alpha - \frac{5\mathrm{i}}{2}\right)Y\left(\alpha - 3i\right)\right)\right]\Big|_{\alpha=5i/2} = \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\left(\alpha + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)Y\left(\alpha\right)\right)\right]\Big|_{\alpha=-i/2} \tag{0.10}$$

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha\left(\alpha + i/2\right)}{\left(\alpha + i/2\right)\left(\operatorname{ch}\pi\alpha - 1\right)}Y\left(\alpha\right)\right)\right]\Big|_{\alpha=-i/2} = Y'\left(\alpha - 3i\right)\Big|_{\alpha=-i/2} \tag{0.11}$$

Проводя соответствующие вычисления в (0.10), (0.11) и имея в виду (0.7), получим

$$y_{-1}^{(5i/2)} = \pi^{-2} Y'\left(-7i/2\right) \tag{0.12}$$

Таким образом, вычисление $y_{-1}^{(5i/2)}$ свелось к вычислению $Y'\left(-7i/2\right)$. Для её вычисления обратимся к (2.17). Из (2.17) получим

$$Y'\left(-7i/2\right) = Y\left(-7i/2\right)\bar{X}\left(-7i/2\right) \tag{0.13}$$

а из (2.16), раскрывая неопределённость, получим

$$\bar{X}\left(-7i/2\right) = -i\left(10\sqrt{3}\pi^2 + 18 - 27\pi\right)\Big/54 \tag{0.14}$$

которое при помощи (0.13) и (0.12) дает окончательное значение $y_{-1}^{(5i/2)}$ в виде

$$y_{-1}^{(5i/2)} = -i\sqrt{6}\left(10\sqrt{3}\pi^2 - 27\pi + 18\right)\Big/24\pi^2$$

Величины $y_1\left(-7i\right)$ и $y_1'\left(-7i\right)$, входящие в (3.23) и (3.27), вычисляются аналогичной процедурой. Рассмотрим аналитическое продолжение уравнения (2.5) в область $\operatorname{Im}\alpha < -1/2$ и составим выражения

$$\left[\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{ch}\pi\alpha - 1}\left(\alpha + 4i\right)^2 Y\left(\alpha\right)\right]\Big|_{\alpha=-4i} = \left[\left(\alpha + 4i\right)^2 Y\left(\alpha - 3i\right)\right]\Big|_{\alpha=-4i} \tag{0.15}$$

$$\left[\frac{d}{d\alpha}\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{ch}\pi\alpha - 1}\left(\alpha + 4i\right)^2 Y\left(\alpha\right)\right]\Big|_{\alpha=-4i} = \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\alpha + 4i\right)^2 Y\left(\alpha - 3i\right)\right]\Big|_{\alpha=-4i} \tag{0.16}$$

Вычислив пределы в (0.15) с учетом (3.24) и очевидных равенств

$$Y(-4i)=1/2, \qquad y_1(-7i)=\lim_{\alpha\to -4i}(\alpha+4i)Y(\alpha-3i) \tag{0.17}$$

получим

$$y_1(-7i)=\pi^{-2} \tag{0.18}$$

Аналогично, из (0.16) получим

$$y_1'(-7i)=2\pi^{-2}Y'(-4i) \tag{0.19}$$

а из функционального уравнения (2.5) –

$$Y'(-4i)=Y'(-i)/2 \tag{0.20}$$

Следовательно,

$$y_1'(-7i)=\pi^{-2}Y'(-i) \tag{0.21}$$

Но из (2.9), (2.6) и (2.16) получим

$$Y'(-i)=Y(-i)\bar{X}(-i)=\bar{X}(-i)=-i\left(9+2\pi\sqrt{3}\right)/27\,, \tag{0.22}$$

которое с учётом (0.21) даёт

$$y_1'(-7i)=-i\left(9+2\pi\sqrt{3}\right)/27\,\pi^2 \tag{0.23}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты на линейно-деформированном основании. //ПММ. 1961. Т.25. Вып.2. С.342-355.
2. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. //ПММ. 1974. Т.38. Вып.2. С.312-320.
3. Попов Г.Я., Тихоненко Л.Я. Точное решение плоских задач о контакте полубесконечных балок с упругим клином. //ПММ. 1975. Т.39. Вып.6. С.1100-1109.
4. Нуллер Б.М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. //ПММ. 1974. Т.38. Вып.5. С.876-882.
5. Банцури Р.Д. Контактная задача для клина с упругим креплением. //ДАН СССР. 1973. Т.211. №3.
6. Barns E.W. The linear finite differences equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1904, vol.2.
7. Григорян Э.Х. Изгиб полубесконечной балки, лежащей на упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 1992. Т.45. №1-2. С.11–25.
8. Григорян Э.Х. Изгиб двух полубесконечных балок, лежащих на границе упругой полуплоскости. //Изв. НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.20–30.
9. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Изгиб балки на границе упругой полуплоскости, Актуальные проблемы механики сплошной среды. Ереван: 2007. С.32-36.
10. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1972.
11. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Math. 1955, vol.8. №2.
12. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Наука, 1962. 278с.
13. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 798с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.07.2008