ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №3, 2008 Механика

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ “НЕКОРРЕКТНОЙ” ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Саргсян В.Г., Хачикян А.С.

Ключевые слова: теплопроводность, некорректная задача, переопределенные данные, поправочная функция.
Keywords: heat conduction, incorrect problem, overdeterminated data, function of correction.

Վ.Գ. Սարգսյան, Ա. Ս. Խաչիկյան

Ջերմահաղորդականության ոչ կոռեկտ խնդրի լուծման մասին՝ գերորոշված նախնական տվյալների դեպքում

Դիտարկվում է ըստ Ադամարի ոչ կոռեկտ ջերմահաղորդականության ստացիոնար խնդրի լուծման հարցը գերորոշված եզրային պայմանների առկայության դեպքում:

Անվերջ շերտում հարմոնիկ ֆունկցիայի որոշման օրինակով նախանշվում է եզրային պայմանների անճշտությունների նվազեցման մի եղանակ՝ մի քանի կետերում լրացուցիչ տրված ֆունկցիայի արժեքների օգտագործմամբ:

V.G. Sargsyan, A.S. Khachikyan

On the Solution of the Incorrect Problem on Heat Conduction if there are Overdeterminated Initial Data

Under incorrect problem conditions the solution of the stationary problem on heat condition with overdeterminated initial data is discussed.

Using additional specified values of the function at the some points the method of the error's decreasing at the boundary conditions is assigned. As an example the determination of the harmonic on the infinite strip function is considered.

В условиях задач с “некорректными по Адамару” граничными условиями обсуждается вопрос о решении стационарной задачи теплопроводности при переопределенных исходных данных.

На одном примере определения гармонической в бесконечной полосе функции намечается путь уменьшения погрешностей в граничных условиях с использованием дополнительно заданных значений функций в некоторых точках.

В задачах теории упругости, теплопроводности и в других задачах, приводящихся к определению гармонических или бигармонических функций, когда на одной части границы области граничные условия переопределены, а на остальной части эти условия недоопределены, складывается ситуация, характерная для “некорректных по Адамару” задач математической физики. Если даже решения задач существуют и единственны, может не существовать непрерывная зависимость решений от исходных данных. В условиях прикладных задач, когда граничные условия, как правило, известны с определенной погрешностью, эти решения могут сильно отличаться от истинных физических решений.

Одним из способов восстановления истинных физических решений может быть [1, 2] привлечение, когда это возможно практически, дополнительных, сверх необходимых для построения единственного решения задачи, данных измерений.

Здесь обсуждается решение “некорректной“ задачи определения гармонической в бесконечной полосе функции, рассматриваемое как решение стационарной задачи теплопроводности. Принимается, что на одной грани полосы известны значения температуры и теплового потока, а на другой грани никакие граничные условия не заданы. Дополнительно заданы значения температуры в некоторых точках полосы. Предполагается, что значения температуры измерены абсолютно точно, а значения теплового потока – с некоторой, поддающейся оценке, погрешностью. Изыскивается способ снижения влияния погрешности заданных граничных условий на решение задачи с использованием дополнительно заданных значений температуры.

1. Рассмотрим задачу определения стационарного распределения тепла в бесконечной полосе, описываемого гармоническими функциями.

1.1. Пусть реальный физический процесс (распространение тепла) в полосе $0 \le y \le H,\ -\infty < x < \infty$ точно описывается функцией $U_0(x, y)$

$$\begin{gathered} \Delta U_0 = 0 \\ U_0(x,0) = f_0(x) \\ \left.\frac{\partial U_0}{\partial y}\right|_{y=0} = g_0(x) \end{gathered} \tag{1}$$

Согласно [3, 4]

$$\begin{gathered} U_0(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_0 \operatorname{ch}\lambda y + \frac{\bar{g}_0}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y \right] e^{-i\lambda x} d\lambda \\ \bar{q}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\lambda x} dx, \qquad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{gathered} \tag{2}$$

1.2. Пусть для определения функции $U_\varepsilon(x, y) \approx U_0(x, y)$ заданы следующие результаты измерений:

$$\begin{gathered} U_\varepsilon(x,0) = f_0(x) \\ \left.\frac{\partial U_\varepsilon(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = g_\varepsilon(x),\ \ g_\varepsilon(x) = g_0(x) + E(x) \end{gathered} \tag{3}$$

где $E(x)$ – ошибка в результате измерений (погрешность), при этом задано $g_\varepsilon(x)$, а $g_0(x)$ и $E(x)$ неизвестны.

Полагая, что решение задачи существует, определим $U_\varepsilon(x, y)$ по формуле (2)

$$\begin{gathered} U_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_0 \operatorname{ch}\lambda y + \frac{\bar{g}_\varepsilon}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y \right] e^{-i\lambda x} d\lambda \\ \bar{g}_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_0(x) + E(x) \right] e^{i\lambda x} dx = \bar{g}_0(\lambda) + \bar{E}(\lambda) \end{gathered} \tag{4}$$

Соответственно, получим

$$U_\varepsilon(x,y) = U_0(x,y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{E}(\lambda)}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{5}$$

Отметим, что может быть вычислен $\bar{g}_\varepsilon(\lambda)$, а $\bar{g}_0(\lambda)$ и $\bar{E}(\lambda)$ неизвестны.

1.3. Полагаем теперь, что дополнительно заданы значения функции $U_0(x,y)$ в некоторых точках

$$U_0\left(x_{0m}, y_{0m}\right) = k_{0m}, \quad m = 1, 2, ..., n \tag{6}$$

Для простоты положим $y_{0m} = y_0$.

Определим значения $U_\varepsilon\left(x_{0m}, y_0\right)$ по формуле (4)

$$U_\varepsilon\left(x_{0m}, y_0\right) = U_0\left(x_{0m}, y_0\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{E}(\lambda)}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y_0 e^{-i\lambda x_{0m}} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\overline{f_0} \operatorname{ch}\lambda y_0 + \frac{\overline{g_\varepsilon}}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y_0 \right] \cdot e^{-i\lambda x_{0m}} d\lambda$$

Составим разности

$$k_m = k_{0m} - U_\varepsilon\left(x_{0m}, y_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{E}(\lambda)}{\lambda} \operatorname{sh}\lambda y_0 \cdot e^{-i\lambda x_{0m}} d\lambda \tag{7}$$

Введем поправочную функцию

$$Q(x) = \sum_{m=1}^{n} k_m \cdot e^{-\gamma_m x^2} \tag{8}$$

Постоянные k_m определяются по (7), γ_m произвольны и выбираются из условий сходимости интегралов.

В дальнейшем положим $x_{0m} = x_0$.

Определим промежуточную гармоническую функцию $V(x,y)$

$$V(x,0) = U_0(x,0) = f_0(x)$$

$$V\left(x, y_0\right) = U_\varepsilon\left(x, y_0\right) + Q(x) = V_{y0} \tag{9}$$

Следуя [3], определим $V(x,y)$ в полосе $0 < y < y_{0,}\ |x| < \infty$

$$V(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\bar{f}_0(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\lambda\left(y_0 - y\right)}{\operatorname{sh}\lambda y_0} + \bar{V}_{y0}(\lambda) \cdot \frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda y_0} \right] \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{10}$$

2. Определим уточненное решение задачи $U(x,y)$, принимая за уточненные граничные значения нормальной производной функции $U(x,y)$ на линии $y = 0$ значения

$$\left.\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = g_0(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\lambda) \operatorname{ch}\lambda y e^{-i\lambda x} d\lambda + $$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}(\lambda) \frac{\lambda \operatorname{ch}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda y} \cdot e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{11}$$

тогда уточненные граничные условия и решение задачи будут

$$\begin{gathered} U(x,0)= f_0(x) \\ \left.\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial V(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} \end{gathered} \tag{12}$$

$$U(x,y)=U_\varepsilon(x,y)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}Q(z)e^{i\lambda z}dz\right]\frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda y_0}\cdot e^{-i\lambda x}d\lambda \tag{13}$$

Здесь под знаком интеграла стоят величины, которые могут быть вычислены по исходным данным.

Мы предполагаем все интегралы сходящимися в L_2 и все формальные выкладки законными.

Очевидно, что предполагаемое уточнение имеет место, если

$$\left|U(x,y)-U_0(x,y)\right|\le\left|U_\varepsilon(x,y)-U_0(x,y)\right| \tag{14}$$

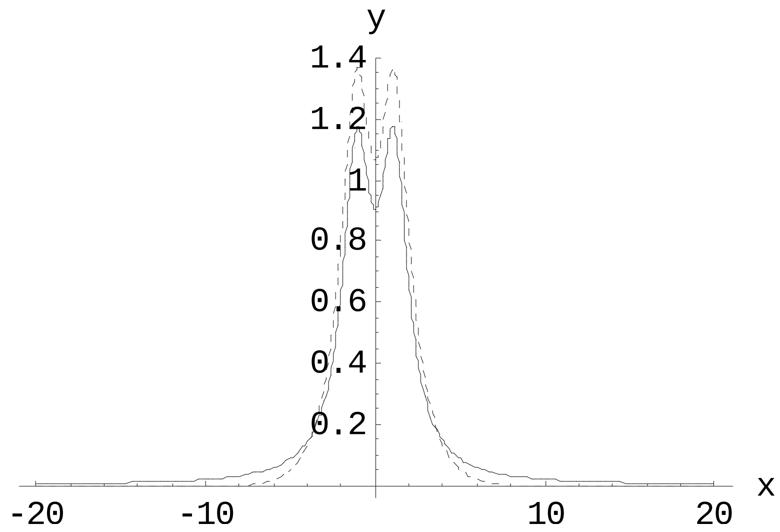
3. Проиллюстрируем описанные построения на численном примере. Пусть

$$\begin{aligned} U_0(x)&=\frac{h-y}{(h-y)^2+(a-x)^2}+\frac{h-y}{(h-y)^2+(a+x)^2} \\ f_0(x)&=\frac{h}{h^2+(a-x)^2}+\frac{h}{h^2+(a+x)^2} \\ g_0(x)&=\frac{h^2-(a-x)^2}{\left(h^2+(a-x)^2\right)^2}+\frac{h^2-(a+x)^2}{\left(h^2+(a+x)^2\right)^2} \\ E(x)&=\varepsilon\left[\frac{h_1^{\,2}-(a_1-x)^2}{\left(h_1^{\,2}+(a_1-x)^2\right)^2}+\frac{h_1^{\,2}-(a_1+x)^2}{\left(h_1^{\,2}+(a_1+x)^2\right)^2}\right] \end{aligned} \tag{15}$$

Вычислены значения функций $U_0(x,H), U_\varepsilon(x,H), U(x,H)$ по формулам (5, 13, 15) при следующих значениях, входящих в (15) постоянных.

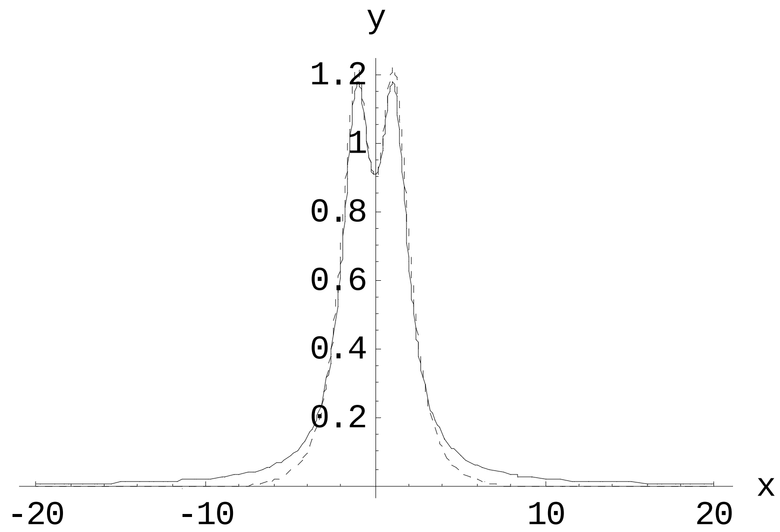
$$\begin{array}{lll} H=1 & a=1{,}1 & z=0{,}1 \\ h=2 & a_1=1.5 & \varepsilon=0{,}3 \\ h_1=3 & b=0{,}75 & \gamma=0.8 \end{array}$$

На графиках приведены значения приближенного и точного решений (фиг. 1). На фиг. 2 приведены значения точного и скорректированного решений. Можно отметить, что приближенное решение заметно отличается от точного решения как на близких, так и на дальних расстояниях. Скорректированное решение близко к точному решению на близких (от расположения точек с дополнительными данными) расстояниях и отличается от точного решения на дальных расстояниях. Таким образом, коррекция решения произошла на близких к точке с дополнительным данным расстояниях. Это видно также по данным, приведенным в таблице.



точное решение
приближенное решение

Фиг. 1



точное решение
скорректированное решение

Фиг. 2

Таблица значений функций $U_0(x,H),\ U(x,H), U_\varepsilon(x,H)$

Координаты x	Точное решение $U_0(x,H)$	Скорректированное решение $U(x,H)$	Приближенное решение $U_\varepsilon(x,H)$
0,0	0.904977	0.897904	1.06629
2,0	0.646737	0.699876	0.811472
4.0	0.143293	0.10065	0.133097
6.0	0.059435	0.015281	0.019404
8.0	0.032503	-0.001206	-0.000979
10.0	0.020518	-0.004606	-0.004601

Приведенный численный пример показывает на возможность эффективного использования дополнительных данных для уточнения приближенных решений. Однако вопрос о том, при каких условиях имеет место уточнение решения, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
2. Леттес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
4. Хачикян А.С. О гармонических и бигармонических задачах для уравнений с неклассическими граничными условиями. //Изв.НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. №4. С. 24-31.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
5.11.2007