ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №3, 2008 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ДВУМЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ СИЛАМИ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: стержень, сосредоточенная сила, статическая и динамическая устойчивости, бесконечная система уравнений, частота, критическая сила.
Keywords: rode, concentrated force, static and dynamic stability, infinite system of equations, frequency, critical force.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան
Երկու կենտրոնացված ուժերով ձողի կայունության մասին

Դիտարկված են ձողի ստատիկական և դինամիկական կայունության խնդիրները երկու կենտրոնացված ուժերի դիրքերից և ուղղություններից կախված:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan
About stability of beam with two concentrated forces

The dynamic and static stability of beam in dependence from position and direction of two concentrated forces is studied.

Изучаются динамическая и статическая устойчивости стержня в зависимости от раположения и направления двух сосредоточенных сил.

Объект исследования – стержень сжат двумя сосредоточенными силами – не нов и как будто не оригинален.

Однако, оказывается в зависимости от расположения и направления сил возможны интересные состояния напряженности и получаются еще более интересные задачи динамической устойчивости. Изучаются несколько задач динамической устойчивости: а) если силы – периодические функции времени, б) периодически меняются направления действия, или, в) если функция точки приложения сил периодическая. Отдельно исследуются также задачи статической устойчивости и колебаний этих систем.

1.Будем изучать стержень, который в продольном направлении (начальное состояние) закреплен на концах, а по отношению поперечных движений–шарнирно оперт.

Уравнение поперечных движений стержня при наличии осевого напряжения в безразмерных координатах запишется

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\pi^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}-\frac{1}{\pi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(N\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)=0\,. \tag{1.1}$$

Здесь $\xi = {}^{x}\!/_{l}$, l – длина стержня, τ – безразмерное время

$$\tau=\omega_1 t,\quad \omega_1^2=\frac{EJ\pi^4}{\rho F l^4}\,, \tag{1.2}$$

ω_1 –основная частота свободных колебаний, $N = N(\xi)$ – отношение продольной (неоднородной) силы к эйлеровой

$$N = \frac{P(\xi)}{P_э}, \quad P_э = \frac{EJ\pi^2}{l^2}. \tag{1.3}$$

В зависимости от расположения и направления действующих сил различными будут $N(\xi)$.

Решение (1.1) будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\tau)\sin m\pi\xi \tag{1.4}$$

удовлетворяющем граничным условиям свободного опирания, а $N(\xi)$ представим как

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\pi\xi, \tag{1.5}$$

тогда из (1.1), (1.4) и (1.5) получим следующую бесконечную систему [1] для неизвестных $f_m(t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 f_m}{d\tau^2} + m^4 f_m - \frac{1}{2}m^2 \Big[(2a_0 + a_{2m}) f_m + \\ &+ \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} (a_{n-m} + a_{n+m})\frac{n}{m} f_n \Big] = 0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Изучим несколько вариантов расположения сил.

а) Две сосредоточенные силы P_0 действуют на расстоянии ξ_1 от концов и направлены в одну сторону. Тогда по длине стержня будем иметь

$$P = \begin{cases} P_0, & 0 \le \xi \le \xi_1, \\ 0, & \xi_1 \le \xi \le 1-\xi_1, \\ -P_0, & 1-\xi_1 \le \xi \le 1. \end{cases} \tag{1.7}$$

Коэффициенты a_m в этом случае определятся

$$a_m = \frac{2\delta}{m\pi}\left[1-(-1)^m\right]\sin m\pi\xi_1, \quad \delta = \frac{P_0}{P_э}. \tag{1.8}$$

б) Силы направлены друг к другу (вовнутрь)

$$P = \begin{cases} P_0(1-2\xi_1), & 0 \le \xi \le \xi_1, \\ -P_0 2\xi_1, & \xi_1 \le \xi \le 1-\xi_1, \\ P_0(1-2\xi_1), & 1-\xi_1 \le \xi \le 1. \end{cases} \tag{1.9}$$

$$a_m = \frac{2\delta}{m\pi}\left[1+(-1)^m\right]\sin m\pi\xi_1. \tag{1.10}$$

в) В случае, когда силы направлены к концам стержня в (1.9) и (1.10), нужно менять знаки при P_0.

г) В случае, когда одна сила приложена в точке ξ_1, то

$$P=\begin{cases}P_0\left(1-\xi_1\right), & 0\le\xi\le\xi_1,\\ -P_0\,\xi_1, \quad \xi_1\le\xi\le 1, & a_m=\dfrac{2\delta}{m\pi}\sin m\pi\xi_1\end{cases} \tag{1.11}$$

2. Здесь изучим несколько задач динамической устойчивости, когда силы или точки их приложения – периодические функции времени.
Для случая г) рассмотрим задачу, когда сила – периодическая функция

$$P_0=P_0^{(1)}+P_0^{(2)}\cos\theta t=P_0^{(1)}+P_0^{(2)}\cos\frac{\theta}{\omega_1}\tau. \tag{2.1}$$

Тогда, довольствуясь первым приближением, для определения главной области неустойчивости из (1.6), (1.11) и (2.1) будем иметь

$$\frac{d^2f_1}{d\tau^2}+f_1-A\left(1+2\mu\frac{\theta}{\omega_1}\tau\right)f_2=0,$$

$$\frac{d^2f_2}{d\tau^2}+16f_2-A\left(1+2\mu\cos\frac{\theta}{\omega_1}\right)f_1=0, \tag{2.2}$$

$$A=\frac{4}{\pi}\left(\sin\pi\xi_1+\frac{1}{3}\sin 3\pi\xi_1\right)\delta^{(1)},\ 2\mu=\frac{\delta^{(2)}}{\delta^{(1)}},\ \delta^{(i)}=\frac{P_0^{(i)}}{P_э}.$$

Конечно, для уточнения предела главной области неустойчивости (устойчивости), как здесь, так и в дальнейшем, из бесконечной системы (1.6) можно брать побольше членов, но нашей основной целью является подчеркивать наличие подобных задач.

Области неустойчивости системы (2.2) находятся обычным образом [2] и они ограничены линиями.

$$\frac{\theta}{\omega_1}=\sqrt{2}\left[17\pm\sqrt{225+4A^2\left(1\pm\mu\right)^2}\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

В качестве второй задачи рассмотрим такой вариант: в интервале времени $0\le t\le t_1$ постоянные силы действуют вовнутрь (случай б)), а при $t_1\le t\le 2t_1$ – на концах (случай в)). Частота колебаний будет

$$\theta=\frac{\pi}{t_1}=\frac{\pi\omega_1}{\tau_1}. \tag{2.4}$$

Здесь также, довольствуясь только первым приближением из (1.6), (1.10), имеем

$$\frac{d^2f_1}{d\tau^2}+\Omega_1^2f_1=0,\quad 0\le\tau\le\frac{\pi\omega_1}{\theta},$$

$$\frac{d^2f_1}{d\tau^2}+\Omega_2^2f_1=0,\quad \frac{\pi\omega_1}{\theta}\le\tau\le\frac{2\pi\omega_1}{\theta}, \tag{2.5}$$

$$\Omega_1^2=1-\frac{\delta}{\pi}\sin 2\pi\xi_1\ ,\qquad \Omega_2^2=1+\frac{\delta}{\pi}\sin 2\pi\xi_1$$

Области устойчивости и неустойчивости разделены линиями

$$\cos\frac{\pi\Omega_1\omega_1}{\theta}\cos\frac{\pi\Omega_1\omega_1}{\theta}-\frac{1}{1-\left(\frac{\delta}{\pi}\sin 2\pi\xi_1\right)^2}\sin\frac{\pi\Omega_1\omega_1}{\theta}\sin\frac{\pi\Omega_2\omega_1}{\theta}=\pm 1. \quad (2.6)$$

В табл. 1 приведены несколько корней $\left(\frac{\omega_1}{\theta}\right)$ уравнения (2.6). В каждой клетке числа первой строки соответствуют знаку минус в (2.6), а числа второй строки – знаку плюс.

Таблица 1

ξ_1 \ δ	1	2	3
0,2	0,4357 0,9451	0,3855 0,8430	0,3504 0,7515
0,4	0,4589 0,9769	0,4224 0,9220	0,3919 0,8579

Как видно из табл., изменение $\frac{\omega_1}{\theta}$ по δ более ощутимо, чем по ξ_1.

Следует отметить также, что из (2.6) при $\delta \to 0$ получается главный параметрический резонанс

$$\theta = 2\omega_1 .$$

Третью задачу возьмем такую. Рассмотрим случай б) – сила постоянная, но точка приложения ─ периодическая функция времени

$$\xi_1 = \xi_1^0 + \varepsilon\cos\frac{\theta}{\omega_1}\tau \quad , \quad \varepsilon << \xi_1^0 . \qquad (2.7)$$

Тогда из (1.6) можно брать только одно уравнение

$$\frac{d^2 f_1}{a\tau^2} + f_1 - a_2 f_1 = 0 , \qquad (2.8)$$

а a_2 с условиями (1.10) и (2.7) будет

$$a_2 = \frac{\delta}{2\pi}\sin 2\pi\xi_1\left(1+2\pi\varepsilon\mathrm{ctg}2\pi\xi_1\cos\frac{\theta\tau}{\omega_1}\right), \qquad (2.9)$$

и для f_1 будет обычно уравнение Матье

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + \Omega_1^2\left(1-2\mu\cos\frac{\theta\tau}{\omega_1}\right)f_1,$$
$$\Omega_1^2 = 1-\frac{\delta}{2\pi}\sin 2\pi\xi_1, \quad \mu = \varepsilon\frac{\delta\cos 2\pi\xi_1}{\Omega_1^2}. \qquad (2.10)$$

Главная область неустойчивости определяется линиями

$$\frac{\Omega_1\omega_1}{\theta}=\sqrt{1\pm\mu}\,. \tag{2.11}$$

3. Здесь изучим задачи статической устойчивости и свободных колебаний вышерассмотренных задач. Конечно, значения критических сил и частот можно получить и из системы (1.6). Однако, предпочтительно получить их точные значения традиционным способом – в отдельности рассматривать части стержня с однородным напряженным состоянием и в дальнейшем сращивать различные решения в точках разделения этих частей. Если искать решения (1.1) в виде

$$w=X\left(x\right)e^{i\omega t}, \tag{3.1}$$

в зависимости от напряженного состояния для $X\left(x\right)$

$$X_i^{IV}\pm\delta_i\pi^2X_i''-\Omega^2X_i=0\quad,\quad \Omega^2=\frac{\delta Fl^4}{EJ}\omega^2. \tag{3.2}$$

В сжатой части стержня должны брать знак «+», а в растянутой – знак «–»

Для задачи а) имеем

$$\begin{aligned}
&X_i^{IV}+\delta\pi^2X_1''-\Omega^2X_i=0, && 0\le\xi\le\xi_1,\\
&X_2^{IV}-\Omega^2X_2=0, && \xi_1\le\xi\le1-\xi_1,\\
&X_3^{IV}-\delta\pi^2X_3''-\Omega^2X_3=0, && 1-\xi_1\le\xi\le1.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Решение системы (3.3) будет

$$\begin{aligned}
&X_1=C_1\mathrm{ch}P_2\xi+C_2\mathrm{sh}P_2\xi+C_3\cos P_1\xi+C_4\sin P_1\xi,\\
&X_2=D_1\mathrm{ch}P\xi+D_2\mathrm{sh}P\xi+D_3\cos P\xi+D_4\sin P\xi,\\
&X_3=E_1\mathrm{ch}P_1\xi+E_2\mathrm{sh}P_1\xi+E_3\cos P_2\xi+E_4\sin P_2\xi,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$P_1=\left(\Lambda-\frac{1}{2}\delta\pi^2\right)^{1/2},\quad P_2=\left(\Lambda+\frac{1}{2}\delta\pi^2\right)^{1/2},$$

$$P=\sqrt{\Omega},\quad \Lambda=\sqrt{\Omega^2+\frac{1}{2}\delta\pi^2}.$$

при этом должны быть удовлетворены следующие условия:

$$\begin{aligned}
&X_1=X_1''=0 \quad \text{при} \quad \xi=-\xi_1,\\
&X_1=X_2\ ,\ X_1'=X_2'\ ,\ X_1''=X_2''\ ,\ X_1'''=X_2''' \ \text{при}\ \ \xi=0,\\
&X_2=X_3\ ,\ X_2'=X_3'\ ,\ X_2''=X_3''\ ,\ X_2'''=X_3''' \ \text{при}\ \ \xi=1-2\xi_1,\\
&X_3'=X_3''=0 \quad \text{при} \quad \xi=1.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Полученное трансцендентное уравнение настолько громадное, что привести здесь не имеет смысла (такое для второй задачи будет сделано). Приведем только уравнение статической устойчивости. Тогда

$$\begin{aligned}
&X_1=C_1\mathrm{ch}K\xi+C_2\mathrm{sh}K\xi+C_3\xi+C_4,\\
&X_2=D_1+D_2\xi+D_3\xi^2+D_4\xi^3,\\
&X_3=F_1\cos K\xi+F_2\sin K\xi+F_3\xi+F_4\ ,\ K=\pi\sqrt{\delta}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Удовлетворяя условиям (3.5), для определения δ получим

$$\mathrm{tg}K\xi_1+\mathrm{th}K\xi_1+K\left(1-2\xi_1\right)=0. \tag{3.7}$$

Для второй задачи –

$$X_i^{IV} - K_1^2 X_1'' - \Omega^2 X_1 = 0,$$
$$X_i^{IV} + K_2^2 X_2'' - \Omega^2 X_2 = 0, \qquad (3.8)$$
$$K_1^2 = \delta\pi^2 \left(1 - 2\xi_1\right), \quad K_2^2 = 2\delta\pi^2 \xi_1,$$

$$X_1 = C_1 \mathrm{ch} S_1 \xi + C_2 \mathrm{sh} S_1 \xi + C_3 \cos S_2 \xi + C_4 \sin S_2 \xi,$$
$$X_2 = D_1 \mathrm{ch} S_3 \xi + D_2 \mathrm{sh} S_3 \xi + D_3 \cos S_4 \xi + D_4 \sin S_4 \xi, \qquad (3.9)$$
$$S_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{K_1^4}{4} + \Omega^2} \pm \frac{1}{2} K_1^2 \right)^{1/2}, \quad S_{3,4} = \left(\sqrt{\frac{K_2^2}{4} + \Omega^2} \mp \frac{1}{2} K_2^2 \right)^{1/2}.$$

Для симметричных форм колебаний и форм потери устойчивости помимо условий при $\xi = -\xi_1$ и $\xi = 0$ из (3.5) ставятся условия симметрии при $\xi = \xi_2 = 0.5 - \xi_1$

$$X' = X_2''' = 0 \qquad \text{при} \qquad \xi = \xi_2 \qquad (3.10)$$

Тогда частоты должны быть определены из условия равенства нулю детерминанта

$$\left| a_{ij} \right| = 0 \qquad (3.11)$$

$$a_{11} = \left(S_2^2 + S_3^2\right)\left(S_1 + S_3 \mathrm{th} S_1 \xi_1 \mathrm{th} S_3 \xi_2\right),$$
$$a_{12} = \left(S_2^2 - S_4^2\right)\left(S_1 - S_4 \mathrm{th} S_1 \xi_1 \mathrm{tg} S_4 \xi_2\right),$$
$$a_{21} = \left(S_1^2 - S_3^2\right)\left(S_2 + S_3 \mathrm{tg} S_2 \xi_1 \mathrm{th} S_3 \xi_2\right),$$
$$a_{22} = \left(S_1^2 + S_4^2\right)\left(S_2 - S_4 \mathrm{tg} S_2 \xi_1 \mathrm{tg} S_4 \xi_2\right).$$

Для определения критической силы (статическая устойчивость) имеем уравнение

$$K_2 \mathrm{th} K_1 \xi_1 \mathrm{tg} K_2 \left(0,5 - \xi_1\right) = K_1. \qquad (3.12)$$

Исследование задачи г) ничем не отличается от первых двух, поэтому приведем здесь только в окончательном виде уравнение для статической устойчивости –

$$K_4 \mathrm{th} K_3 \xi_1 + K_3 \mathrm{tg} K_4 \left(1 - \xi_1\right) = 0,$$
$$K_3^2 = \delta\pi^2 \left(1 - \xi_1\right), \quad K_4^2 = \delta\pi^2 \xi_1. \qquad (3.13)$$

В табл. 2 помещены значения критических сил $\delta_{кр}$, определенных, соответственно, из (3.7), (3.12) и (3.13).

Таблица 2

δ / ξ_1	I	II	III
0,1	27,31	5,30	10,50
0,2	7,60	3,12	5,89
0,3	3,87	2,83	4,63
0,4	2,63	3,91	4,31
0,5	2,27	–	4,53

Как видно из табл.2, величины критических сил в случае а) в два раза меньше случая г).

В табл. 3 помещены значения квадрата Ω при различных ξ_1 и α. Коэффициент α характеризует долю статической критической силы для данного ξ_1, например, $\alpha = 0,1$ значит, что взята $0,1 \cdot \delta_{кр}$, а $\delta_{кр}$ берется из табл.2. В каждой клетке помещены три цифры, по порядку они соответствуют рассмотренным задачам.

Таблица 3

ξ_1 \ α	0,02	0,04	0,1	0,2	0,95
0,1	9,87 9,77 9,77	9,87 9,67 9,67	9,55 9,37 9,37	8,85 8,83 8,84	3,55 2,21 2,22
0,2	9,87 9,77 9,78	9,86 9,68 9,69	9,84 9,38 9,41	9,74 8,87 8,92	3,75 2,26 2,29
0,3	9,86 9,78 9,80	9,86 9,69 9,73	9,83 9,43 9,50	9,70 8,95 9,07	3,29 2,35 2,43
0,4	9,86 9,79 9,83	9,86 9,72 9,78	9,82 9,49 9,63	9,67 9,06 9,34	3,09 2,49 2,66
0,5	9,86 – 9,86	9,86 – 9,86	9,22 – 9,82	9,66 – 9,66	3,04 – 3,03

Вторая задача при $\xi = 0,5$ не имеет смысла, поэтому в таблицах данные отсутствуют.

Как видно из табл. 2, критическая сила получается намного больше, если сила приложена в одной точке, чем делить ее на две части и приложить в двух точках. Конечно, из табл. 3 можно сделать вывод относительно скорости уменьшения относительной частоты, заметим только: во всех трех рассмотренных случаях она почти одинакова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе . //Докл. АН Арм. ССР. 1969. Т.49. №3. С.124-130.
2. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.04.2007