

УДК 539.3

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Закарян Т. В.

Ключевые слова: анизотропия, полоса, колебания, резонанс, сингулярные возмущения.

Key words: anisotropic, strip, vibration, resonance, singularly perturbed.

Տ. Վ. Չաքարյան

Օրբորտրոպ երկշերտի համար առաձգականության տեսության դինամիկական առաջին եզրային խնդրի մասին

Գիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ դինամիկական առաջին եզրային խնդիրը երկշերտ օրբորտրոպ շերտ-հեծանի համար: Երկշերտի դինային մակերևույթների վրա տրված են լարման թեքողի բաղադրիչները, որոնք ժամանակից հարմոնիկ ֆունկցիաներ են: Հաստատված են լարման թեքողի և տեղափոխման վեկտրի բաղադրիչների ասիմպտոտիկ կարգերը, որոշված է ներքին խնդրի ընդհանուր լուծումը, հաստատված են ռեզոնանսի առաջացման պայմանները: Այն դեպքերի համար, երբ երկայնական եզրերում տրված ֆունկցիաները հաստատուն են կամ զծային, որոշված են ներքին խնդրի ճշգրիտ լուծումները:

T. V. Zakaryan

On dynamic first boundary value problem of elasticity theory for two – layered orthotropic strip

A dynamic plane boundary value problem for two – layered orthotropic strip is considered, when on its facial surfaces the values of the corresponding stresses tensor components, which change harmonically in time, are given. For the determination of the solution an asymptotic method of the solutions of singularly perturbed differential equations is applied. Asymptotic orders of all the stresses tensor components and the displacement vector and iteration processes for determining these components are built. The general solution of the inner problem is found. The conditions of arising resonance are established. For private cases mathematically exact solutions of the inner problem are obtained.

Рассматривается динамическая плоская краевая задача для двухслойной ортотропной полосы, когда на ее лицевых поверхностях заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, которые во времени меняются гармонически. Для определения решения применен асимптотический метод решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Установлены асимптотические порядки всех компонент тензора напряжений и вектора перемещения и построены итерационные процессы для определения этих компонент. Найдено общее решение внутренней задачи. Установлены условия возникновения резонанса. Для частных случаев получены математически точные решения внутренней задачи.

1. Основные соотношения и структура общего решения. Начиная с конца пятидесятих годов двадцатого века, для определения напряженно-деформированных состояний балок, стержней, пластин и оболочек широко используется асимптотический метод [1-7]. Статическая первая краевая задача для пластин и оболочек рассмотрена в [1,8], а для анизотропных балок, пластин и оболочек – в [9]. Асимптотический метод оказался особенно эффективным для решения неклассических краевых задач тонких тел [9,10], а также для решения динамических задач о собственных и вынужденных колебаниях [11-13]. В работе [14] определено асимптотическое решение первой динамической краевой задачи для ортотропной

полосы. В данной работе найдено решение внутренней задачи для двухслойной ортотропной полосы в динамической первой краевой задаче.

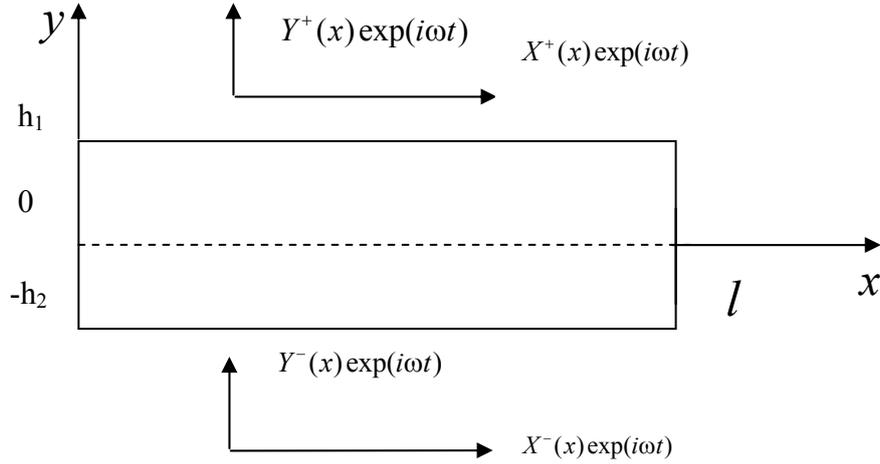
Требуется найти решение динамических уравнений плоской деформации двухслойной ортотропной полосы

$$D = \{(x, y): 0 \leq x \leq l, -h_2 \leq y \leq h_1, h = \max(h_1, h_2) \ll l\}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial y} &= \rho^k \frac{\partial^2 u^k}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial y} &= \rho^k \frac{\partial^2 v^k}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial u^k}{\partial x} &= \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, & \frac{\partial v^k}{\partial y} &= \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, & \frac{\partial u^k}{\partial y} + \frac{\partial v^k}{\partial x} &= a_{66}^k \sigma_{xy}^k, \quad (1.1) \\ \beta_{ij}^k &= \frac{1}{a_{33}^k} (a_{ij}^k a_{33}^k - a_{i3}^k a_{j3}^k), & i, j &= 1, 2, & a_{66}^k &= \frac{1}{G_{12}^k}, \quad k = I, II, \end{aligned}$$

где $\sigma_{\alpha\gamma}, u, v$ – компоненты, соответственно, тензора напряжений и вектора перемещения, ρ – плотность, a_{ij} – постоянные упругости, G_{12} – модуль сдвига,

при граничных условиях (фиг.1)



Фиг.1

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, h_1) &= Y^+(x) \exp(i\omega t), & \sigma_{xy}(x, h_1) &= X^+(x) \exp(i\omega t) \\ \sigma_{yy}(x, -h_2) &= -Y^-(x) \exp(i\omega t), & \sigma_{xy}(x, -h_2) &= -X^-(x) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

при условиях полного контакта между слоями :

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^I(x, 0) &= \sigma_{yy}^{II}(x, 0), & \sigma_{xy}^I(x, 0) &= \sigma_{xy}^{II}(x, 0) \\ u^I(x, 0) &= u^{II}(x, 0), & v^I(x, 0) &= v^{II}(x, 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

и условиях на торцевых сечениях $x = 0, l$, которые пока не будем конкретизировать.

Чтобы решить поставленную задачу, введем безразмерные координаты $\xi = x/l, \zeta = y/h$ и безразмерные перемещения $U_x = u/l, U_y = v/l$. В результате, уравнения (1.1) примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{xx}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \zeta} &= l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_x^k}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{xy}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{yy}^k}{\partial \zeta} &= l^2 \rho^k \frac{\partial^2 U_y^k}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial U_x^k}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{12}^k \sigma_{yy}^k, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_y^k}{\partial \zeta} &= \beta_{12}^k \sigma_{xx}^k + \beta_{22}^k \sigma_{yy}^k, \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U_x^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_y^k}{\partial \xi} &= a_{66}^k \sigma_{xy}^k, & \varepsilon &= h/l.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Решение системы (1.4) будем искать в виде [11,14]

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\beta}^k(\xi, \zeta, t) &= \sigma_{ij}^k(\xi, \zeta) \exp(i\omega t), \quad \alpha, \beta = x, y, \quad i, j = 1, 2 \\
(U_x^k(\xi, \zeta, t), U_y^k(\xi, \zeta, t)) &= (U^k(\xi, \zeta), V^k(\xi, \zeta)) \exp(i\omega t), \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Подставив (1.5) в (1.4), получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k U^k &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}^k}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{22}^k}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \omega_*^2 \rho^k V^k &= 0, \\
\frac{\partial U^k}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{11}^k + \beta_{12}^k \sigma_{22}^k, & \varepsilon^{-1} \frac{\partial V^k}{\partial \zeta} &= \beta_{12}^k \sigma_{11}^k + \beta_{22}^k \sigma_{22}^k, \\
\varepsilon^{-1} \frac{\partial U^k}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^k}{\partial \xi} &= a_{66}^k \sigma_{12}^k, & \omega_* &= h\omega, \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Система (1.6) сингулярно возмущена малым параметром ε . Ее решение складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I^b) [9,15,16]

$$I = I^{\text{int}} + I^b \tag{1.7}$$

2. Решение внутренней задачи. Решение системы (1.6), соответствующее внутренней задаче, будем искать в виде

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{k \text{int}} &= \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ij}^{k(s)}(\xi, \zeta), \quad (U^{k \text{int}}, V^{k \text{int}}) = \varepsilon^s (U^{k(s)}, V^{k(s)}), \\
i, j &= 1, 2, \quad k = I, II, \quad s = \overline{0, N}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Подставив (2.1) в (1.6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения коэффициентов разложения (2.1) получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{11}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k U^{k(s)} &= 0, & \frac{\partial \sigma_{12}^{k(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{22}^{k(s)}}{\partial \zeta} + \omega_*^2 \rho^k V^{k(s)} &= 0, \\
\frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} &= \beta_{11}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{12}^k \sigma_{22}^{k(s)}, & \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} &= \beta_{12}^k \sigma_{11}^{k(s)} + \beta_{22}^k \sigma_{22}^{k(s)}, \\
\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} &= a_{66}^k \sigma_{12}^{k(s)}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Из системы (2.2) напряжения можно выразить через перемещения по формулам

$$\sigma_{11}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(-\beta_{12}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \sigma_{22}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial V^{k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial U^{k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad \Delta_1^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - (\beta_{12}^k)^2 \quad (2.3)$$

Для определения же $U^{k(s)}, V^{k(s)}$ получаются уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U^{\kappa(s)}}{\partial \zeta^2} + a_{66}^{\kappa} \omega_*^2 \rho^k U^{\kappa(s)} &= f_u^{\kappa(s)}, & \frac{\partial^2 V^{\kappa(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \omega_*^2 \rho^k V^{\kappa(s)} &= f_v^{\kappa(s)} \\ f_u^{\kappa(s)} &= -a_{66}^{\kappa} \left(\frac{\partial \sigma_{11}^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 V^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right), & f_v^{\kappa(s)} &= \frac{\beta_{12}^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \frac{\partial^2 U^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \frac{\partial \sigma_{12}^{\kappa(s-1)}}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решения уравнений (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} U^{\kappa(s)} &= C_1^{\kappa(s)}(\xi) \sin \sqrt{a_{66}^{\kappa} \rho^k} \omega_* \zeta + C_2^{\kappa(s)}(\xi) \cos \sqrt{a_{66}^{\kappa} \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{u}^{-\kappa(s)} \\ V^{\kappa(s)} &= C_3^{\kappa(s)}(\xi) \sin \sqrt{\frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \rho^k} \omega_* \zeta + C_4^{\kappa(s)}(\xi) \cos \sqrt{\frac{\Delta_1^{\kappa}}{\beta_{11}^{\kappa}} \rho^k} \omega_* \zeta + \bar{v}^{-\kappa(s)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\bar{u}^{-k(s)}, \bar{v}^{-k(s)}$ – частные решения уравнений (2.4). Вычислив по формулам (2.3) компоненты напряжений и удовлетворив граничным условиям (1.2) и условиям контакта (1.3), определим функции $C_i^{k(s)}$:

$$\begin{aligned} C_1^{I(s)} &= b_3^{(s)} + k_5 \frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, & C_1^{II(s)} &= \frac{d_1^{(s)}}{\delta_1}, & C_2^{I(s)} &= b_1^{(s)} + \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1}, & C_2^{II(s)} &= \frac{d_2^{(s)}}{\delta_1}, \\ C_3^{I(s)} &= b_4^{(s)} + k_6 \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, & C_3^{II(s)} &= \frac{d_3^{(s)}}{\delta_2}, & C_4^{I(s)} &= b_2^{(s)} + \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2}, & C_4^{II(s)} &= \frac{d_4^{(s)}}{\delta_2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \cos k_3 \zeta_2 \sin k_1 \zeta_1 + k_5 \cos k_1 \zeta_1 \sin k_3 \zeta_2, \\ \delta_2 &= \cos k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta_1 + k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta_2, \\ d_1^{(s)} &= b_7^{(s)} \sin k_1 \zeta_1 + (b_5^{(s)} - b_3^{(s)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(s)} \sin k_1 \zeta_1) \sin k_3 \zeta_2, \\ d_2^{(s)} &= b_7^{(s)} k_5 \cos k_1 \zeta_1 - (b_5^{(s)} - b_3^{(s)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(s)} \sin k_1 \zeta_1) \cos k_3 \zeta_2, \\ d_3^{(s)} &= b_8^{(s)} \sin k_2 \zeta_1 + (b_6^{(s)} - b_4^{(s)} \cos k_2 \zeta_1 + b_2^{(s)} \sin k_2 \zeta_1) \sin k_4 \zeta_2, \\ d_4^{(s)} &= b_8^{(s)} k_6 \cos k_2 \zeta_1 - (b_6^{(s)} - b_4^{(s)} \cos k_2 \zeta_1 + b_2^{(s)} \sin k_2 \zeta_1) \cos k_4 \zeta_2, \\ b_1^{(s)} &= \bar{u}^{II(s)}(\xi, 0) - \bar{u}^{I(s)}(\xi, 0), & b_2^{(s)} &= \bar{v}^{II(s)}(\xi, 0) - \bar{v}^{I(s)}(\xi, 0), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$b_3^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, 0) - f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, 0) \right),$$

$$b_4^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, 0) - f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, 0) \right),$$

$$b_5^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \left(X^{+(s)} - f_{\sigma_{12}}^{I(s)}(\xi, \zeta_1) \right),$$

$$b_6^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \left(Y^{+(s)} - f_{\sigma_{22}}^{I(s)}(\xi, \zeta_2) \right),$$

$$b_7^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a_{66}^{II} / \rho^{II}} \left(-X^{- (s)} - f_{\sigma_{12}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) \right),$$

$$b_8^{(s)} = \frac{1}{\omega_*} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \left(-Y^{- (s)} - f_{\sigma_{22}}^{II(s)}(\xi, -\zeta_2) \right),$$

$$X^{\pm(0)} = \pm \varepsilon X^{\pm}, \quad Y^{\pm(0)} = \pm \varepsilon Y^{\pm}, \quad X^{\pm(s)} = 0, \quad Y^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0,$$

$$k_1 = \omega_* \sqrt{a_{66}^I \rho^I}, \quad k_2 = \omega_* \sqrt{\Delta_1^I \rho^I / \beta_{11}^I}, \quad k_3 = \omega_* \sqrt{a_{66}^{II} \rho^{II}}, \quad k_4 = \omega_* \sqrt{\Delta_1^{II} \rho^{II} / \beta_{11}^{II}},$$

$$k_5 = \sqrt{a_{66}^I \rho^{II} / a_{66}^{II} \rho^I}, \quad k_6 = \sqrt{\Delta_1^I \rho^{II} \beta_{11}^{II} / \Delta_1^{II} \rho^I \beta_{11}^I},$$

$$f_{\sigma_{11}}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(-\beta_{12}^k \frac{\partial \bar{v}^{-k(s)}}{\partial \zeta} + \beta_{22}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

$$f_{\sigma_{12}}^{k(s)} = \frac{1}{a_{66}^k} \left(\frac{\partial \bar{u}^{-k(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right),$$

$$f_{\sigma_{22}}^{k(s)} = \frac{1}{\Delta_1^k} \left(\beta_{11}^k \frac{\partial \bar{v}^{-k(s)}}{\partial \zeta} - \beta_{12}^k \frac{\partial U^{k(s-1)}}{\partial \xi} \right), \quad k = I, II.$$

Подставив значения $C_i^{k(s)}$ в формулу (2.5), определим перемещения, а из формул (2.3) определим значения напряжений:

$$\sigma_{11}^{I(s)} = -k_2 \frac{\beta_{12}^I}{\Delta_1^I} \left(C_3^{I(s)} \cos k_2 \zeta - C_4^{I(s)} \sin k_2 \zeta \right) + f_{\sigma_{11}}^{I(s)},$$

$$\sigma_{11}^{II(s)} = -k_4 \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \left(C_3^{II(s)} \cos k_4 \zeta - C_4^{II(s)} \sin k_4 \zeta \right) + f_{\sigma_{11}}^{II(s)}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_{12}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\rho^k / a_{66}^k} \left(C_1^{k(s)} \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta - C_2^{k(s)} \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{12}}^{k(s)},$$

$$\sigma_{22}^{k(s)} = \omega_* \sqrt{\beta_{11}^k \rho^k / \Delta_1^k} \left(C_3^{k(s)} \cos \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta - C_4^{k(s)} \sin \sqrt{\Delta_1^k \rho^k / \beta_{11}^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{22}}^{k(s)},$$

Формулы (1.5), (2.1), (2.3), (2.5)-(2.8) позволяют определить все компоненты напряжений и перемещений двухслойной полосы во внутренней задаче с заранее заданной асимптотической точностью. Из этих формул следует, что в отличие от статической задачи [9], эти величины полностью определяются из граничных условий (1.2) на лицевых поверхностях и из условий контакта (1.3). Другой особенностью является и то, что асимптотика (2.1) в динамической задаче принципиально отличается от асимптотики в статической задаче [1,9]:

$$\sigma_{xx} = O(\varepsilon^{-2}), \quad \sigma_{xy} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \sigma_{yy} = O(\varepsilon^0), \quad u = O(\varepsilon^{-2}), \quad v = O(\varepsilon^{-3}) \quad (2.9)$$

Найденное выше решение будет справедливым, если $\delta_1 \neq 0, \delta_2 \neq 0$. Значения ω , при которых $\delta_1 = 0$ или $\delta_2 = 0$, совпадают со значениями частот собственных колебаний двухслойной полосы [11].

3. Частные решения. Используя приведенные выше формулы, найдем решения некоторых частных задач. Пусть

$$X^{\pm} = \text{const}, Y^{\pm} = \text{const} \quad (3.1)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что отличными от нуля будут величины исходного приближения $s=0$, т. е. для этого случая $Q^{k(s)} \equiv 0$ при $s \geq 1$. В результате получим следующее точное решение внутренней задачи :
 величины первого слоя ($0 \leq y \leq h_1$)–

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^I &= -\frac{\beta_{12}^I}{\Delta_1^I \delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- k_6 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_2 (\zeta + \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{yy}^I &= \frac{1}{\delta_2} \left[Y^+ (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta + \cos k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- \sin k_2 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{xy}^I &= \frac{1}{\delta_1} \left[X^+ (k_5 \sin k_3 \zeta_2 \cos k_1 \zeta + \cos k_3 \zeta_2 \sin k_1 \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + X^- \sin k_1 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ u^I &= \frac{h}{\delta_1 \omega_*} \left[X^+ \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} (k_5 \sin k_3 \zeta_2 \sin k_1 \zeta - \cos k_3 \zeta_2 \cos k_1 \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - X^- k_5 \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \cos k_1 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ v^I &= \frac{h}{\delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta - \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - Y^- k_6 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) \right] \exp(i\omega t), \\ \zeta_1 &= h_1/h, \quad \zeta_2 = h_2/h, \quad h = \max(h_1, h_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

величины второго слоя ($-h_2 \leq y \leq 0$)–

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{II} &= -\frac{k_4 \beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II} \delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{yy}^{II} &= \frac{1}{\delta_2} \left[Y^+ k_6 \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + Y^- (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \\ \sigma_{xy}^{II} &= \frac{1}{\delta_1} \left[X^+ k_5 \sin k_3 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\ &\quad \left. + X^- (k_5 \cos k_1 \zeta_1 \sin k_3 \zeta - \sin k_1 \zeta_1 \cos k_3 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
u'' &= -\frac{h}{\delta_1 \omega_*} \left[X^+ \sqrt{a_{66}^I / \rho^I} \cos k_3 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\
&\quad \left. + X^- \sqrt{a_{66}^{II} / \rho^{II}} (k_5 \cos k_1 \zeta_1 \cos k_3 \zeta + \sin k_1 \zeta_1 \sin k_3 \zeta) \right] \exp(i\omega t), \\
v'' &= -\frac{h}{\delta_2 \omega_*} \left[Y^+ \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) + \right. \\
&\quad \left. + Y^- \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta + \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta) \right] \exp(i\omega t),
\end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда

$$X^\pm = 0, \quad Y^+ = -a_1 \xi, \quad Y^- = a_2 \xi \quad (3.4)$$

Для этого случая отличными от нуля будут величины приближений $s = 0, 1$. При $s = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
U^{I(0)} &= 0, \quad U^{II(0)} = 0, \quad \sigma_{12}^{I(0)} = 0, \quad \sigma_{12}^{II(0)} = 0, \\
V^{I(0)} &= -\frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta - \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta) + \right. \\
&\quad \left. + a_2 \xi k_6 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) \right], \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V^{II(0)} &= \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) - \right. \\
&\quad \left. - a_2 \xi \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta + \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{I(0)} &= \frac{\beta_{12}^I \varepsilon}{\Delta_1^I \delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) - \right. \\
&\quad \left. - a_2 \xi k_6 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \sin k_2 (\zeta + \zeta_1) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{II(0)} &= \frac{\beta_{12}^{II} k_4 \varepsilon}{\Delta_1^{II} \delta_2 \omega_*} \left[a_1 \xi \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) - \right. \\
&\quad \left. - a_2 \xi \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right],
\end{aligned}$$

$$\sigma_{22}^{I(0)} = \frac{\varepsilon}{\delta_2} \left[-a_1 \xi (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta + \cos k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta) + a_2 \xi \sin k_2 (\zeta - \zeta_1) \right],$$

$$\sigma_{22}^{II(0)} = \frac{\varepsilon}{\delta_2} \left[-a_1 \xi k_6 \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + a_2 \xi (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta - \sin k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta) \right],$$

При $s = 1$ получаются

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{I(1)} &= 0, \quad \sigma_{11}^{II(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{I(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{II(1)} = 0, \quad V^{I(1)} = 0, \quad V^{II(1)} = 0, \\
U^{I(1)} &= C_1^{I(1)} \sin k_1 \zeta + C_2^{I(1)} \cos k_1 \zeta + \bar{u}^{I(1)}, \\
U^{II(1)} &= C_1^{II(1)} \sin k_3 \zeta + C_2^{II(1)} \cos k_3 \zeta + \bar{u}^{II(1)}, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{12}^{k(1)} = \sqrt{\rho^k / a_{66}^k} \omega_* \left(C_1^{k(1)} \cos \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta - C_2^{k(1)} \sin \sqrt{a_{66}^k \rho^k} \omega_* \zeta \right) + f_{\sigma_{12}}^{k(1)},$$

где

$$\bar{u}^{I(1)} = B_1 \sin k_2 (\zeta + \zeta_1) + B_2 \sin k_2 (\zeta - \zeta_1) + B_3 \sin(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) + B_4 \cos k_2 \zeta + B_5 \sin k_2 \zeta,$$

$$\bar{u}^{II(1)} = A_1 \sin k_4 (\zeta + \zeta_2) + A_2 \sin k_4 \zeta + A_3 \cos k_4 \zeta,$$

$$B_1 = \gamma_1 a_2 k_6 \frac{a_{66}^I \beta_{12}^I}{\Delta_1^I} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}}, \quad B_2 = \gamma_1 a_2 k_6 k_2 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}},$$

$$B_3 = -\gamma_1 a_1 \frac{a_{66}^I \beta_{12}^I}{\Delta_1^I} \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I}, \quad B_4 = -\gamma_1 a_1 k_6 k_2 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \sin k_4 \zeta_2,$$

$$B_5 = -\gamma_1 a_1 k_2 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 \zeta_2,$$

$$A_1 = -\gamma_2 a_1 k_4 \left(1 + a_{66}^{II} \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \right) \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I},$$

$$A_2 = \gamma_2 k_6 \left(a_2 a_{66}^{II} \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \cos k_2 \zeta_1 + k_4 \cos k_2 \zeta_1 \right),$$

$$A_3 = -\gamma_2 \left(a_2 a_{66}^{II} \frac{\beta_{12}^{II}}{\Delta_1^{II}} \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \sin k_2 \zeta_1 + k_4 \sin k_2 \zeta_1 \right),$$

$$\gamma_1 = \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_* (a_{66}^I \omega_*^2 \rho^I - k_2^2)}, \quad \gamma_2 = \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_* (a_{66}^{II} \omega_*^2 \rho^{II} - k_4^2)},$$

(3.7)

$$f_{\sigma_{12}}^{I(1)} = \frac{1}{a_{66}^I} (B_1 k_2 \cos k_2 (\zeta + \zeta_1) + B_2 k_2 \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) + B_3 k_2 \cos(k_2 \zeta + k_4 \zeta_2) - B_4 k_2 \sin k_2 \zeta + B_5 k_2 \cos k_2 \zeta) + \frac{\varepsilon}{a_{66}^I \delta_2 \omega_*} \left[-a_1 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta - \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta) - a_2 k_6 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} \cos k_2 (\zeta - \zeta_1) \right],$$

$$f_{\sigma_{12}}^{II(1)} = \frac{1}{a_{66}^{II}} (A_1 k_4 \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) + A_2 k_4 \cos k_4 \zeta - A_3 k_4 \sin k_4 \zeta) + \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \sqrt{\Delta_1^I / \beta_{11}^I \rho^I} \cos k_4 (\zeta + \zeta_2) - a_2 \sqrt{\Delta_1^{II} / \beta_{11}^{II} \rho^{II}} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta + \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta) \right],$$

Постоянные $C_1^{k(1)}, C_2^{k(1)}$ вычисляются по формулам (2.6), где

$$\begin{aligned}
b_1^{(1)} &= A_1 \sin k_4 \zeta_2 + A_3 - (B_1 - B_2) \sin k_2 \zeta_1 - B_3 \sin k_4 \zeta_2 + B_4, \\
b_3^{(1)} &= \frac{1}{\omega_*} \sqrt{a'_{66}/\rho'} \left\{ \frac{1}{a''_{66}} (A_1 k_4 \cos k_4 \zeta_2 + A_2 k_4) - \frac{1}{a'_{66}} (B_1 k_2 \cos k_2 \zeta_1 + \right. \\
&+ B_2 k_2 \cos k_2 \zeta_1 + B_3 k_2 \cos k_4 \zeta_2 + B_5 k_2) + \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left(\frac{1}{a''_{66}} - \frac{1}{a'_{66}} \right) \times \\
&\times \left(a_1 \sqrt{\Delta'_1/\beta'_{11}\rho'} \cos k_4 \zeta_2 - a_2 k_6 \sqrt{\Delta''_1/\beta''_{11}\rho''} \cos k_2 \zeta_1 \right) \Big\}, \\
b_5^{(1)} &= -\frac{1}{a'_{66}\omega_*} \sqrt{a'_{66}/\rho'} \{ B_1 k_2 \cos 2k_2 \zeta_1 + B_2 k_2 + B_3 k_2 \cos(k_2 \zeta_1 + k_4 \zeta_2) - \\
&- B_4 k_2 \sin k_2 \zeta_1 + B_5 k_2 \cos k_2 \zeta_1 + \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[-a_1 \sqrt{\Delta'_1/\beta'_{11}\rho'} (k_6 \sin k_4 \zeta_2 \sin k_2 \zeta_1 - \right. \\
&- \cos k_4 \zeta_2 \cos k_2 \zeta_1) - a_2 k_6 \sqrt{\Delta''_1/\beta''_{11}\rho''} \Big] \Big\}, \\
b_7^{(1)} &= -\frac{1}{a''_{66}\omega_*} \sqrt{a''_{66}/\rho''} \{ A_1 k_4 + A_2 k_4 \cos k_4 \zeta_2 + A_3 k_4 \sin k_4 \zeta_2 + \\
&+ \frac{\varepsilon}{\delta_2 \omega_*} \left[a_1 \sqrt{\Delta'_1/\beta'_{11}\rho'} - a_2 \sqrt{\Delta''_1/\beta''_{11}\rho''} (k_6 \cos k_2 \zeta_1 \cos k_4 \zeta_2 - \right. \\
&- \sin k_2 \zeta_1 \sin k_4 \zeta_2) \Big] \Big\}, \\
d_1^{(1)} &= b_7^{(1)} \sin k_1 \zeta_1 + (b_5^{(1)} - b_3^{(1)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(1)} \sin k_1 \zeta_1) \sin k_3 \zeta_2, \\
d_2^{(1)} &= b_7^{(1)} k_5 \cos k_1 \zeta_1 - (b_5^{(1)} - b_3^{(1)} \cos k_1 \zeta_1 + b_1^{(1)} \sin k_1 \zeta_1) \cos k_3 \zeta_2
\end{aligned}$$

Используя формулы (1.5), (2.1), (3.5)-(3.8), получим окончательное решение

$$\begin{aligned}
u^k &= hU^{k(1)} \exp(i\omega t), \quad v^k = lV^{k(0)} \exp(i\omega t), \quad \sigma_{xx}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{11}^{k(0)} \exp(i\omega t), \\
\sigma_{xy}^k &= \sigma_{12}^{k(1)} \exp(i\omega t), \quad \sigma_{yy}^k = \varepsilon^{-1} \sigma_{22}^{k(0)} \exp(i\omega t), \quad k = I, II
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Из полученных выше решений можно заключить, что если функции $X^\pm(\xi), Y^\pm(\xi)$ являются многочленами, итерационный процесс будет обрываться на определённом приближении, в результате получим математически точное решение внутренней задачи. Полученные выше решения, как правило, не будут удовлетворять граничным условиям на торцах $x = 0, l$ полосы. Возникающая невязка устраняется с помощью решения пограничного слоя. Это решение строится описанным в [14] способом, где изложена также процедура сопряжения решений внутренней задачи и пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С.668-686.
2. Friedrichs K. O. Kirchhoff's Boundary Conditions and the Edge Effect for Elastic Plates // Proc. Symp. , Appl.Math.3.Amer. Math.Soc. , N. Y. , 1950.
3. Friedrichs K. O. and Dressler R.F. A Boundary-Layer Theory for Elastic Plates // Comm.Pure and Appl.Math. 1961.Vol.14, № 1.
4. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. Школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Изд-во Тбилисского ун-та. 1975. С. 51-149.
5. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells// Proc. Roy.Soc.Ser.A. 1962.Vol.266, №1325.
6. Агаловян Л. А. Применение метода асимптотического интегрирования к построению приближенной теории анизотропных оболочек // ПММ. 1966. Т.30. Вып.2. С.388-398.
7. Агаловян Л. А. О характере взаимодействия погранслоя с внутренним напряженно-деформированным состоянием полосы. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1977. Т. 30. №5. С.48-62.
8. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука. 1976. 510с.
9. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука Физматлит. 1997. 414с.
10. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во "Гитутюн" НАН РА. 2005. 468 с.
11. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин.// Изв. ВУЗов РФ, Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8-11.
12. Агаловян Л. А. Асимптотика решений классических и неклассических краевых задач статики и динамики тонких тел. // Междунар. научн. журнал. Прикл. Механика. 2002. Т. 38. №7. С. 3-24.
13. Агаловян Л. А. , Гулгазарян Л. Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. // ПММ. 2006. Т.70. Вып.1. С.111-125.
14. Агаловян Л. А. , Закарян Т. В. Асимптотическое решение динамической первой краевой задачи теории упругости для ортотропной полосы. // В сб.: "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Ереван: 2007. С.21-27.
15. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
16. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.03.2008