ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №3, 2008 Механика

УДК 539.3:534.2

КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННОЙ УПРУГОЙ КОНСТРУКЦИИ ИЗ НЕЗАМКНУТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ОБРАЗУЮЩИМИ

Гулгазарян Г.Р., Срапионян Дж. Л.

Ключевые слова: колебания, оболочечная конструкция, классическая, граничные образующие.

Keywords: vibrations, shell–structure, classical, boundary generators.

Գ. Ռ. Ղուլղազարյան, Ջ.Լ. Սրապիոնյան

Օրթոտրոպ առաձգական բաց գլանային թաղանթներից կազմված ազատ եզրային ծնիչներով բարակապատ կառուցվածքի տատանումները

Հետազոտված են միատեսակ օրթոտրոպ բաց անվերջ շրջանային գլանային թաղանթներից կազմված բարակապատ կառուցվածքի սեփական տատանումները, երբ եզրային ծնիչներն ազատ են և միատեսակ օրթոտրոպ բաց վերջավոր շրջանային գլանային թաղանթներից կազմված բարակապատ կառուցվածքի սեփական տատանումները, երբ եզրային ծնիչներն ազատ են, իսկ եզրային ուղղորդ կորերը հոդակապորեն ամրակցված: Նշված բարակապատ կառուցվածքների համար, ստացված են դիսպերսիոն հավասարումներ և ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնցով որոշվում են հնարավոր սեփական տատանումների հաճախությունները:

G. R. Ghulghazaryan, Dj.L. Srapionyan

Vibrations of a thin-shell structure constructed from orthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free boundary generators

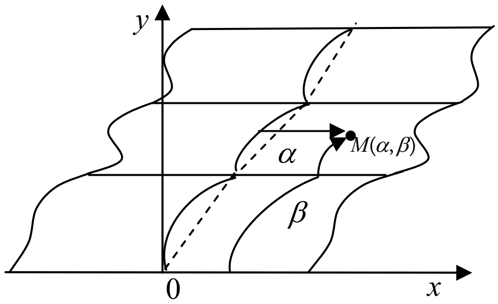
The problems of existence of natural vibrations of an elastic orthotropic thin-shell structure constructed from circular non-closed infinite cylindrical shells with free boundary generators and an elastic orthotropic thin-shell structure constructed from circular non-closed finite cylindrical shells with free boundary generators, which have a Navier's hinge on the boundary directional curves, are studied. The dispersion equations and asymptotic formulas are obtained for determining the natural frequencies of possible vibration types for the foregoing thin-shell structures.

Исследованы вопросы существования собственных колебаний тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими, и оболочечной конструкции, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек со свободными граничными образующими при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих. Для вышеуказанных оболочечных конструкций получены дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для нахождения собственных частот возможных типов колебаний.

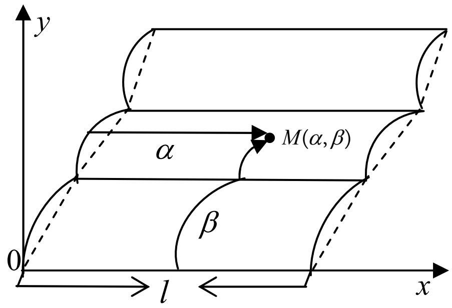
Известно, что волны в тонкостенной упругой оболочечной конструкции распространяются в виде преимущественно изгибных и преимущественно тангенциальных волн [1-4]. У свободного края тонкостенной упругой конструкции оболочечного типа происходят трансформации одного типа волнового движения в другой. При трансформации волн, с учетом геометрических и механических параметров оболочечной конструкции со свободным краем, возникают сложные картины распределения частот собственных колебаний [5-7].

Используя полученные ниже дисперсионные уравнения и асимптотические формулы для этих дисперсионных уравнений, можно, меняя геометрию конструкции и механические свойства материала, управлять спектром, смещая или начало спектра или точки сгущения из нежелательной области резонанса.

1. Основные уравнения и постановка краевых задач. Предполагается, что образующие ортогональны краям тонкостенной оболочечной конструкции. На срединной поверхности оболочечной конструкции вводятся криволинейные координаты (α, β) ($-\infty < \alpha < \infty$, если составляющие цилиндрической оболочки бесконечны; $0 \le \alpha \le l$, если цилиндрические оболочки имеют длину l и $0 \le \beta \le \beta_0$), являющиеся, соответственно, длиной образующей и длиной дуги направляющей кривой (фиг. 1 и 2). Обозначим через s длину одной арки цилиндрической оболочки срединной поверхности. В частности, при $\beta_0 = s$ имеем цилиндрическую оболочку открытого профиля.



Фиг. 1#



Фиг. 2#

Заметим, что в данной работе фактически рассматриваются цилиндрические оболочки, направляющие срединной поверхности которых представляют собой непрерывную незамкнутую кусочно-гладкую кривую. На линиях раздела цилиндрических оболочек кривизна направляющей кривой срединной поверхности имеет устранимые особенности. Строгое использование системы уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек связано с введением промежуточных сопрягающих элементов, обеспечивающих непрерывность перемещений вектора точки срединной поверхности. Однако выполнение таких строгих сопряжений связано с произволом при задании вида сопрягающего элемента, что существенно усложняет расчеты, особенно при исследовании конструкций, состоящих из большого числа цилиндрических оболочек (см. [8], стр. 56). Исходя из этого, здесь, вместо введения сопрягающих элементов, кривизна направляющей кривой цилиндрической оболочки заменяется соответствующим рядом Фурье с периодом s и применяются динамические уравнения классической теории ортотропных цилиндрических оболочек [4,9,10]. Итак, в качестве исходных уравнений, описывающих колебания тонкостенной конструкции вышеуказанного типа, используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек и записаны в выбранных криволинейных координатах α, β [11]:

$$-B_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66}\frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66})\frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1 ,$$

$$-(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u_1}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}-B_{22}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}+B_{22}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_3}{R}\right)-\frac{\mu^4}{R}\left(4B_{66}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\left(\frac{u_2}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+B_{22}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\left(\frac{u_2}{R}\right)\right)-\frac{\mu^4}{R}\left(B_{22}\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3}+(B_{12}+4B_{66})\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\right)=\lambda u_2\ , \qquad (1.1)$$

$$\mu^4\left(B_{11}\frac{\partial^4 u_3}{\partial\alpha^4}+2(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^4 u_3}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+B_{22}\frac{\partial^4 u_3}{\partial\beta^4}\right)+\mu^4\left(B_{22}\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}\left(\frac{u_2}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+(B_{12}+4B_{66})\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\left(\frac{u_2}{R}\right)\right)-\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}-\frac{B_{22}}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}+\frac{B_{22}}{R^2}u_3=\lambda u_3\,.$$

Здесь u_1,u_2,u_3 –проекции вектора смещений, соответственно в направлениях α,β и нормали к поверхности оболочки, $R^{-1}=R^{-1}(\beta)$ –кривизна направляющей кривой срединной поверхности, $\mu^4=h^2/12$ (h –толщина оболочки). $\lambda=\omega^2\rho$, где ω –угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала. B_{ij} –коэффициенты упругости.

Ряд Фурье кривизны направляющей кривой срединной поверхности такой оболочечной конструкции имеет постоянную сумму R^{-1} при $-\infty<\beta<\infty$, где R –радиус составляющих цилиндрических оболочек срединной поверхности. Обозначим $k=2\pi n_0/l,\ n_0\in N$, если конструкция составлена из одинаковых ортотропных незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек, где l – произвольное положителное число, или $k=\pi/l$, если составляющие цилиндрической оболочки имеют длину l и $R^{-1}=kr_0/2$, где r_0 – безразмерный параметр. Рассматриваются следующие граничные условия:

$$\left.\frac{B_{12}}{B_{22}}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right|_{\beta=0,\beta_0}=\left.\frac{B_{12}}{B_{22}}\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right|_{\beta=0,\beta_0}=0, \qquad (1.2)$$

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial u_1}{\partial\beta}\right|_{\beta=0,\beta_0}=\left.\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta^3}+\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\frac{\partial^3 u_3}{\partial\beta\partial\alpha^2}+\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial\beta^2}+\frac{4B_{66}}{B_{22}}\frac{\partial^2 u_2}{\partial\alpha^2}\right)\right|_{\beta=0,\beta_0}=0;$$

$$u_i(\alpha+2\pi/k,\beta)=u_i(\alpha,\beta),\ i=\overline{1,3}\,. \qquad (1.3)$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\beta}-\frac{u_3}{R}\right)\right|_{\alpha=0,l}=u_2\big|_{\alpha=0,l}=u_3\big|_{\alpha=0,l}=\left.\frac{\partial^2 u_3}{\partial\alpha^2}+\frac{B_{12}}{B_{11}}\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u_2}{\partial\beta}\right)\right|_{\alpha=0,l}=0. \qquad (1.4)$$

Граничные условия (1.2)-(1.3) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых бесконечных цилиндрических оболочек: соотношения (1.2) выражают условия свободного края при $\beta=0$, $\beta=\beta_0$, а соотношения (1.3)–условия волнообразности колебания, где $k=2\pi n_0/l,$ $n_0\in N$, $l>0$ (фиг. 1). Граничные условия (1.2), (1.4) соответствуют конструкции оболочечного типа, составленной из ортотропных одинаковых незамкнутых круговых конечных цилиндрических оболочек: соотношения (1.4) являются условиями шарнирного закрепления по граничным направляющим $\alpha=0$ и $\alpha=l$, где $k=\pi/l$ (фиг. 2).

Можно доказать, что задачи (1.1)-(1.3); (1.1)-(1.2),(1.4) самосопряженные и имеют неотрицательный дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$ [12, с.362].

2. Вывод и анализ характеристических уравнений. В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1) (при постоянной кривизне, R^{-1}), спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно.

Решение системы (1.1) (с вышеуказанными изменениями) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_{cn}\cos kn\alpha,\ v_{sn}\sin kn\alpha,\ \sin kn\alpha)\exp(k\chi\beta),\quad n = \overline{1,+\infty}\ , \tag{2.1}$$

где n – волновое число, u_{cn}, v_{sn} – неопределенные коэффициенты и χ – неопределенный коэффициент затухания. При этом условия (1.3) и (1.4) выполняются автоматически и поставленные задачи решаются аналогичным образом, придавая параметру k разные значения. Подставляя (2.1) в (1.1), получим [4]

$$(c_n + \frac{r_0^2}{4}a^2 g_n d_n)u_{cn} = \frac{r_0\, n}{2}\left\{a_n + a^2\,\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}}\chi^2 l_n + \frac{r_0^2}{4}a^2\,\frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}}d_n\right\} \tag{2.2}$$

$$(c_n + \frac{r_0^2}{4}a^2 g_n d_n)v_{sn} = \frac{r_0\,\chi}{2}\left\{b_n - a^2 g_n l_n\right\} \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} R_{nn}c_n + \frac{r_0^2}{4}\left\{c_n - b_n\chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}n^2 a_n + a^2(R_{nn}g_n d_n + 2\chi^2 l_n b_n) + \right. \\ \left. + \frac{r_0^2}{4}a^2 d_n(b_n - \frac{B_{12}}{B_{11}}n^2) - a^4\chi^2 g_n l_n^2\right\} = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$a_n = -\left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}}n^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_2^2\right),\ \ b_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^2 - B_1 n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2$$

$$c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^4 - B_2\, n^2\chi^2 + \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_2^2\right)\chi^2 + \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_1^2\right)\left(n^2 - \eta_2^2\right)$$

$$B_1 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}},\ B_2 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}},\ d_m = \chi^2 - \frac{4B_{66}}{B_{11}}n^2$$

$$g_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{66}}n^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_1^2,\ \ l_n = \chi^2 - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}n^2,\ \ a^2 = \mu^4 k^2 \tag{2.5}$$

$$R_{nn} = a^2\left(\chi^4 - \frac{2(B_{12}+2B_{66})n^2}{B_{22}}\chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}}n^4\right) - \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_3^2,\quad \eta_i^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66}k^2},\ i = \overline{1,3}$$

Пусть $\chi_j,\ j = \overline{1,4}$ – попарно различные нули уравнения (2.4) с неположительными действительными частями, тогда $\chi_5 = -\chi_1$, $\chi_6 = -\chi_2$, $\chi_7 = -\chi_3$, $\chi_8 = -\chi_4$ – также попарно различные нули этого уравнения. Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}),\ j = \overline{1,8}$ – нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) при $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$, соответственно. Представляя решение задач (1.1)-(1.3) и (1.1)-(1.2),(1.4) в виде

$$u_i = \Sigma_{j=1}^{8} w_j u_i^{(j)}, \quad i = \overline{1,3}$$

и учитывая граничные условия (1.2), получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{8} \frac{M_{ij}^{(n)} w_j}{c_n^{(j)} + 0.25\, a^2 r_0^2 g_n^{(j)} d_n^{(j)}} = 0, \quad i = \overline{1,8}, \tag{2.6}$$

$$M_{1j}^{(n)} = \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 a_n^{(j)} + \chi_j^2 b_n^{(j)} - c_n^{(j)} - \frac{r_0^2}{4} a^2 d_n^{(j)} \left(b_n^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} n^2\right) - a^2 \chi_j^2 l_n^{(j)} b_n^{(j)}$$

$$M_{2j}^{(n)} = -\chi_j \left\{ a_n^{(j)} + b_n^{(j)} + a^2 l_n^{(j)} \left(\frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{22}}{B_{66}} n^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_1^2 \right) + a^2 \frac{r_0^2}{4} \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} d_m^{(j)} \right\}$$

$$M_{3j}^{(n)} = \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}} n^2 \right) c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} \left(\chi_j^2 b_n^{(j)} + \frac{4 B_{12} B_{66}}{B_{22}^2} a^2 n^4 g_n^{(j)} \right), \; z_j = k \chi_j \beta_0 \tag{2.7}$$

$$M_{4j}^{(n)} = \chi_j \left\{ l_n^{(j)} c_n^{(j)} + \frac{r_0^2}{4} b_n^{(j)} d_n^{(j)} \right\}, \quad M_{ij}^{(n)} = M_{i-4j}^{(n)} \exp(z_j), i = \overline{5,8}, j = \overline{1,8}$$

Здесь индекс j означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$. Чтобы система (2.6) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{Det} \left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0. \tag{2.8}$$

Численный анализ показывает, что левая часть этого равенства становится малой, когда любые два χ-корня уравнения (2.4) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель, в левой части равенства (2.8), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого введем обозначения:

$$x_j = \chi_j / n, \; j = \overline{1,8}; \; \eta_{in} = \eta_i / n, \; i = \overline{1,3}; \; \varepsilon_n = r_0 / (2n),$$

$$[z_i z_j] = (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j) k n \beta_0, \; [z_i z_j z_k] = \left([z_i z_j] - [z_i z_k]\right) / (z_j - z_k) k n \beta_0$$

$$[z_1 z_2 z_3 z_4] = \left([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]\right) / (z_3 - z_4) k n \beta_0, \sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

$$\sigma_3 = \sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 \tag{2.9}$$

$$\sigma_4 = \sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4, \; \overline{\sigma}_k = \sigma_k(x_1, x_2, x_3, 0), \; \overline{\overline{\sigma}}_k = \sigma_k(x_1, x_2, 0, 0), \; k = \overline{1,4}$$

При этом $\overline{\sigma}_4 = \overline{\overline{\sigma}}_4 = \overline{\overline{\sigma}}_3 = 0$. Пусть $f_m, m = \overline{1,6}$ является симметрическим многочленом m-ой степени от переменных x_1, x_2, x_3, x_4. Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$f_m = f_m(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4), \overline{f}_m = f_m(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3, 0), \overline{\overline{f}}_m = f_m(\overline{\overline{\sigma}}_1, \overline{\overline{\sigma}}_2, 0, 0), \; m = \overline{1,6}$$

$$f_1 = \sigma_1, \; f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2, \; f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3, \; f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4 \tag{2.10}$$

$$\bar{f}_5 = \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3\,, \quad \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_2^3$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.8), получим

$$\mathrm{Det}\left\| M_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^{8} = n^{40} K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4)\,\mathrm{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} \qquad (2.11)$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

$$m_{11} = Hx_1^6 + d_1x_1^4 + d_2x_1^2 + d_3,\ m_{12} = H\bar{\bar{f}}_5 + d_1\bar{\bar{f}}_3 + d_2\bar{\bar{f}}_1,\ m_{13} = H\bar{f}_4 + d_1\bar{f}_2 + d_2$$

$$m_{14} = Hf_3 + d_1f_1;\ m_{21} = Tx_1^5 + d_4x_1^3 + d_5x_1,\ m_{22} = T\bar{\bar{f}}_4 + d_4\bar{\bar{f}}_2 + d_5\,,\ m_{23} = T\bar{f}_3 + d_4\bar{f}_1$$

$$m_{24} = Tf_2 + d_4\,;\ m_{31} = Fx_1^6 + d_6x_1^4 + d_7x_1^2 + d_8,\ m_{32} = F\bar{\bar{f}}_5 + d_6\bar{\bar{f}}_3 + d_7\bar{\bar{f}}_1$$

$$m_{33} = F\bar{f}_4 + d_6\bar{f}_2 + d_7,\ \ m_{34} = Ff_3 + d_6f_1;\ m_{41} = Fx_1^7 + d_9x_1^5 + d_{10}x_1^3 + d_{11}x_1$$

$$m_{42} = F\bar{\bar{f}}_6 + d_9\bar{\bar{f}}_4 + d_{10}\bar{\bar{f}}_2 + d_{11},\ m_{43} = F\bar{f}_5 + d_9\bar{f}_3 + d_{10}\bar{f}_1,\ m_{44} = Ff_4 + d_9f_2 + d_{10}$$

$$m_{i5} = (-1)^{i+1} m_{i1}\exp(z_1),\ \ m_{i8} = (-1)^{i+1}(m_{i4}\exp(z_4) + m_{i3}[z_3z_4] + m_{i2}[z_2z_3z_4] + m_{i1}[z_1z_2z_3z_4])$$

$$m_{i6} = (-1)^{i+1}(m_{i2}\exp(z_2) + m_{i1}[z_1z_2]),\quad m_{i7} = (-1)^{i+1}(m_{i3}\exp(z_3) + m_{i2}[z_2z_3] + m_{i1}[z_1z_2z_3])$$

$$m_{ij} = m_{i-4\,j+4}\,,\ m_{i\,j+4} = m_{i-4\,j}\,,\ i = \overline{5,8},\ j = \overline{1,4}$$

$$d_1 = a^2n^2\left(B_1 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2\frac{B_{22}}{B_{11}} \right) \qquad (2.12)$$

$$d_2 = a^2n^2\varepsilon_n^2\left(B_1 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 - a^2n^2\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}\left(B_1 - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right)$$

$$d_3 = -(1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2n^2\varepsilon_n^2)\left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right),\ d_4 = a^2n^2\left(\frac{2B_{12}}{B_{11}} - B_2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \varepsilon_n^2\frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} \right)$$

$$d_5 = 4a^2n^2\varepsilon_n^2\frac{B_{12}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 + a^2n^2\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}\left(\frac{B_{22}}{B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2$$

$$d_6 = \frac{B_{22}}{B_{11}}\varepsilon_n^2 - B_1 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2$$

$$d_7 = (1 - \eta_{2n}^2)(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2) + \frac{B_{12}}{B_{22}}\left(B_2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 \right) + \varepsilon_n^2\left(4a^2n^2\frac{B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} - B_1 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right)$$

$$d_8 = -\frac{B_{12}}{B_{22}}\left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right)(1 - \eta_{2n}^2 + 4a^2n^2\varepsilon_n^2),\ d_9 = \frac{B_{22}}{B_{11}}\varepsilon_n^2 - B_1 - \frac{4B_{66}}{B_{11}} + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2$$

$$d_{10} = (1 - \eta_{2n}^2)(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2) + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}\left(B_2 - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{2n}^2 \right) - \varepsilon_n^2\left(B_1 + \frac{4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right)$$

$$d_{11} = 4\varepsilon_n^2\left(B_1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right) - \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}(1 - \eta_{2n}^2)\left(1 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_{1n}^2 \right)$$

Уравнение (2.8) эквивалентно уравнению

$$\mathrm{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0. \tag{2.13}$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3, уравнение (2.13) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

Замечание 1. При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (2.4) является характеристическим уравнением для системы (1.1), а уравнение (2.13) при $k = 2\pi n_0 / l,\ \ n_0 \in N$ является дисперсионным уравнением задачи (1.1)-(1.3), а при $k = \pi / l$ –дисперсионным уравнением задачи (1.1)-(1.2),(1.4), соответственно.

3. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.13) при $r_0 \to 0$ **.** При использовании предыдущих формул будем предполагать, что $\eta_{1n} = \eta_{2n} = \eta_{3n} = = \eta_n = \eta / n$. Тогда при $r_0 \to 0$ уравнение (2.4) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_n = \frac{B_{22}}{B_{11}}\chi^4 - B_2\, n^2\chi^2 + \frac{B_{22} + B_{66}}{B_{11}}\eta^2\chi^2 + \left(n^2 - \frac{B_{66}}{B_{11}}\eta^2\right)\left(n^2 - \eta^2\right) = 0 \tag{3.1}$$

$$R_{nn} = a^2\left(\chi^4 - \frac{2(B_{12} + 2B_{66})n^2}{B_{22}}\chi^2 + \frac{B_{11}}{B_{22}}n^4\right) - \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta^2 = 0, \tag{3.2}$$

которые являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний пластины, соответственно [4,10]. Корни χ / n уравнений (3.1) и (3.2) с неположительными действительными частями обозначим через y_1, y_2 и y_3, y_4, соответственно. Заметим, что при

$$\varepsilon_n << 1, \quad y_i \neq y_j,\ i \neq j \tag{3.3}$$

x^2 – корни уравнения (2.4) можно представить в виде [6]

$$x_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(n)}\varepsilon_n^2 + \beta_i^{(n)}\varepsilon_n^4 + \ldots,\ \ i = \overline{1,4} \tag{3.4}$$

$$\alpha_i^{(n)} = P_n(y_i^2) / \left(\prod\nolimits_{j=1,\, j\neq i}^{4} (y_j^2 - y_i^2)\right), \quad i = \overline{1,4} \tag{3.5}$$

При условии (3.3), используя (2.7),(3.4) и тот факт, что

$$M_{31}^{(n)} / n^6 = M_{32}^{(n)} / n^6 = M_{41}^{(n)} / n^7 = M_{42}^{(n)} / n^7 = O(\varepsilon_n^2) \tag{3.6}$$

уравнение (2.13) приводится к виду

$$\mathrm{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\right)^4 N^2(\eta_n)\left\{\overline{F}_0(\eta_n)\,\overline{E}_0(\eta_n)K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2)\right\} = 0 \tag{3.7}$$

$$N(\eta_n) = (y_1 + y_3)(y_2 + y_3)(y_1 + y_4)(y_2 + y_4)$$

$$\overline{F}_0(\eta_n) = K_{10}^2(\eta_n)(1+\exp(2(z_3+z_4))) + 8m_{33}m_{44}m_{34}m_{43}\exp(z_3+z_4) -$$

$$-4m_{33}m_{43}(m_{33}m_{44}+m_{34}m_{43})(\exp(z_4)-\exp(z_3))[z_3z_4] -$$

$$-(m_{33}m_{44}+m_{34}m_{43})^2(\exp(2z_3)+\exp(2z_4)) - 4m_{33}^2m_{43}^2[z_3z_4]^2$$

$$\overline{E}_0(\eta_n) = K_{20}^2(\eta_n)(1+\exp(2(z_1+z_2))) + \frac{8B_{22}^2m_{11}m_{22}m_{12}m_{21}}{(B_{12}+B_{66})^2}\exp(z_1+z_2) -$$

$$-\frac{4B_{22}^2[m_{11}m_{21}(m_{11}m_{22}+m_{21}m_{12})]}{(B_{12}+B_{66})^2}(\exp(z_2)-\exp(z_1))[z_1z_2] -$$

$$-\frac{B_{22}^2(m_{11}m_{22}+m_{12}m_{21})^2}{(B_{12}+B_{66})^2}(\exp(2z_1)+\exp(2z_2)) - \frac{4B_{22}^2m_{11}^2m_{21}^2}{(B_{12}+B_{66})^2}[z_1z_2]^2$$

$$m_{11} = y_1^2 + \frac{B_{12}}{B_{22}}(1-\eta_n^2),\ m_{12} = m_{34} = y_1 + y_2,\ m_{21} = y_1^3 + \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} + \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_n^2\right)y_1 \quad (3.8)$$

$$m_{22} = y_1y_2 + B_1 - \eta_n^2,\ m_{33} = y_3^2 - \frac{B_{12}}{B_{22}},\ m_{44} = y_3y_4 + \frac{B_{12}}{B_{22}}$$

$$m_{43} = y_3^2 - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}y_3, \quad K_{10}(\eta_n) = y_3^2y_4^2 + 4\frac{B_{66}}{B_{22}}y_3y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{22}}\right)^2$$

$$K_{20}(\eta_n) = (1-\eta_n^2)\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{22}B_{66}} - \eta_n^2\right) - \eta_n^2y_1y_2,\ K_{30}(\eta_n) = N_1(\eta_n) + a^2n^2N_2(\eta_n) + a^4n^4N_3(\eta_n)$$

$$N_1(\eta_n) = \frac{B_{66}(B_{12}+B_{22})}{B_{11}^2}\eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2}{B_{11}^2},\ N_2(\eta_n) = \left(\frac{B_{22}B_{12}+B_{12}B_{66}+B_{22}B_{66}}{B_{11}^2}\eta_n^2 -\right.$$

$$\left.-\frac{B_{11}B_{22}B_{12}+B_{11}B_{22}B_{66}-B_{12}^3-3B_{12}^2B_{66}-4B_{12}B_{66}^2}{B_{66}B_{11}^2}\right)\left(\frac{B_{22}+B_{66}}{B_{22}}\eta_n^2 - \frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}}\right) -$$

$$-2\left(1-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_n^2\right)\left(\frac{2B_{12}+4B_{66}}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}}\eta_n^2\right),\ N_3(\eta_n) = -\frac{B_{22}(B_{12}+B_{66})}{B_{11}B_{66}}\left(1-\frac{B_{66}}{B_{11}}\eta_n^2\right)X$$

$$X\left\{(1-\eta_n^2)\left(\frac{B_{11}}{B_{22}} - \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_n^2\right) - \frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\left(\frac{B_{11}B_{22}-B_{12}^2-2B_{12}B_{66}}{B_{22}B_{66}} - \frac{B_{22}+B_{66}}{B_{22}}\eta_n^2\right) + \left(\frac{B_{12}+4B_{66}}{B_{22}}\right)^2\right\}$$

Из (3.7) следует, что при $\varepsilon_n \to 0$ уравнения (2.13) распадаются на уравнения

$$\overline{E}_0(\eta_n) = 0,\ \overline{F}_0(\eta_n) = 0,\ K_{30}(\eta_n) = 0 \qquad (3.9)$$

Из них первые два–дисперсионные уравнения планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для ортотропной пластины-полосы со свободными краями ($k=2\pi n_0/l$) или прямоугольной пластинки со свободными противоположными сторонами, когда остальные стороны шарнирно закреплены ($k = \pi/l$).

Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания оболочечной конструкции; оно появляется в результате использовния уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 – корни уравнения (3.1) и (3.2) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $n\beta_0 \to \infty$ уравнение (2.13) преобразуется в уравнение

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\right)^4 N^2(\eta_n)K_{10}^2(\eta_n)K_{20}^2(\eta_n)K_{30}^2(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) + \sum\nolimits_{j=1}^{4} O(\exp(z_j)) = 0 \,, \tag{3.10}$$

из которого следует, что при $\varepsilon_n \to 0$ и $n\beta_0 \to \infty$ дисперсионное уравнение (2.13) распадается на уравнения

$$K_{10}(\eta_n) = 0,\ K_{20}(\eta_n) = 0,\ K_{30}(\eta_n) = 0 \tag{3.11}$$

Из них первые два–дисперсионные уравнения изгибных и планарных колебаний полубесконечной ортотропной пластинки со свободным краем ($k = 2\pi n_0 / l$) или полубесконечной ортотропной пластинки-полосы со свободным торцом при наличии шарнирного закрепления на боковых краях ($k = \pi / l$), соответственно [4,10]. Следовательно, при малых ε_n и больших $n\beta_0$ приближенными значениями корней уравнения (2.13) являются корни уравнения (3.11).

4. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.13) при $\beta_0 \to \infty$. При использовании предыдущих формул будем предполагать, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (2.4)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (2.13) можно привести к виду

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \left(\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4}\right)^2 + \sum\nolimits_{j=1}^{4} O(\exp(k\chi_j\beta_0)) = 0 \tag{4.1}$$

откуда следует, что при $\beta_0 \to \infty$ уравнение (2.13) преобразуется в уравнение

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4} = 0 \tag{4.2}$$

Уравнение (4.2) при $n \in N$ определяет частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной граничной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых открытых ортотропных бесконечных цилиндрических оболочек ($k = 2\pi n_0 / l$) или частоты всевозможных локализованных собственных колебаний у свободной граничной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек $(k = \pi / l)$ при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях. Если $\varepsilon_n \to 0$, то имеем [4,10]

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{4} = \left(\frac{B_{22}}{B_{11}}\right)^2 N(\eta_n)K_{10}(\eta_n)K_{20}(\eta_n)K_{30}(\eta_n) + O(\varepsilon_n^2) \tag{4.3}$$

Учитывая формулы (4.1) и (4.3), еще раз убеждаемся в справедливости асимптотической формулы (3.10).

В табл. 1 приведены значения некоторых корней (η_n) уравнения (3.9) с соответствующими коэффициентами затухания $k\chi_0 / n$ для пластинки из стеклопластика с механическими параметрами [13]

$$\rho = 2.4 \cdot 10^3 \text{кг/М}^3,\ \mathrm{E}_1 = 6.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9\ \text{Н/М}^2,\ \mathrm{E}_2 = 1.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9\ ,$$

$$G = 0.5 \cdot 9.8 \cdot 10^9,\ \nu_1 = 0.26,\ \nu_2 = 0.06 \tag{4.4}$$

при $h = 1/50;\ s = 4;\ l = 2s;\ k = \pi / l;\ \beta_0 = 5s,\ s$. Численный анализ показывает, что у свободных граничных образующих пластинчатой тонкостенной конструкции могут появляться локализованные колебания. При $n\beta_0 \to \infty$ частоты локализованных волн у свободных краев пластинчатой тонкостенной конструкции, составленной из бесконечных одинаковых пластин–полос и локализованных колебаний у свободных краев пластинчатой тонкостенной конструкции, составленной из одинаковых прямоугольных пластин при наличии шарнирного закрепления боковых краев, стремятся к частотам аналогичных задач для полубесконечной пластинки и полубесконечной пластинки–полосы соответственно. Существует зона волновых чисел: $10 \le n \le 37$, где третье уравнение из (3.11) не имеет действительных η_n -корней.

В табл. 2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η / n и характеристики коэффициентов затухания соответствующих форм $k\chi_0 / n$ для тонкостенных конструкций оболочечного типа, изготовленных из стеклопластика с механическими параметрами (4.4) и геометрическими параметрами: $R = 40;\quad r_0 = 0.1274$, $k = \pi / l,\ l = 2s,\ h = 1/50,\ s = 4.00167$ при $\beta_0 = 5s$ и $\beta_0 = s$.

Отметим, что модули упругости E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей, соответственно. В качестве характеристики коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0 / n = \max\{k \operatorname{Re} \chi_1 / n,\ k \operatorname{Re} \chi_2 / n,\ k \operatorname{Re} \chi_3 / n,\ k \operatorname{Re} \chi_4 / n\}. \tag{4.5}$$

Замечание 2. В табл. 2 между характеристиками коэффициентов затухания и собственными частотами указан тип колебаний; b –преимущественно изгибный, e – преимущественно планарный и t– преимущественно крутильный.

В таблице 2 третья колонка соответствует задаче (1.1)-(1.2),(1.4). Четвертая колонка соответствует задаче (1.1)-(1.2),(1.4), в которой отсутствуют тангенциальные компоненты силы инерции, т.е. имеем преимущественно изгибный тип колебаний. Аналогично, пятая колонка соответствует преимущественно планарному типу, а шестая – преимущественно изгибно-крутильному типу. Отметим, что первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободного края тонкостенной конструкции оболочечного типа, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа. Вычисления показывают, что рядом с первыми частотами колебания квазипоперечного типа существуют частоты незатухающих колебаний квазитангенциального типа. С увеличением n эти колебания становятся колебаниями релеевского типа.

Таблица1

n	$\bar{E}_0(\eta_n)=0,\ \beta_0=s$	$\bar{F}_0(\eta_n)=0,\ \beta_0=5s$	$\bar{F}_0(\eta_n)=0,\ \beta_0=s$	$\bar{E}_0(\eta_n)=0,\ \beta_0=5s$	$K_{30}(\eta_n)=0$
	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$k\chi_0/n \quad \eta/n$	$\eta/n=0$
1	-0.0778 0.94366	-0.0378 0.00822	-0.0680 0.00819	-0.0530 0.97432	3.2114
	-0.0149 0.99799			-0.0200 0.99641	
2	-0.0670 0.95852	-0.0278 0.01646	-0.0558 0.01641	-0.0447 0.98182	3.2093
	-0.0159 0.99771			-0.0281 0.99285	
3	-0.0605 0.96630	-0.0234 0.02470	-0.0473 0.02464	-0.0413 0.98448	3.2057
	-0.0171 0.99735			-0.0337 0.98968	
4	-0.0562 0.97110	-0.0209 0.03294	-0.0417 0.03288	-0.0397 0.98567	3.2003
	-0.0185 0.99692			-0.0363 0.98806	
5	-0.0530 0.97432	-0.0192 0.04118	-0.0378 0.04112	-0.0389 0.98624	3.1924
	-0.0199 0.99641			-0.0373 0.98734	
9	-0.0457 0.98092	-0.0160 0.07413	-0.0291 0.07407	-0.0382 0.98673	2.7088
	-0.0265 0.99363	-0.0109 0.07417		-0.0381 0.98678	3.0773
10	-0.0447 0.98182	-0.0157 0.08236	-0.0278 0.08230	-0.0382 0.98674	-
	-0.0281 0.99285	-0.0121 0.08237		-0.0381 0.98677	-
110	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.90605	-0.0144 0.90605	-0.0382 0.98676	3.3658
	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.90605	-0.0144 0.90606	-0.0382 0.98676	3.6218
120	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.98842	-0.0144 0.98842	-0.0382 0.98676	3.3651
	-0.0382 0.98676	-0.0144 0.98842	-0.0144 0.98842	-0.0382 0.98676	3.6235
130	-0.0382 0.98676	-0.0144 1.07079	-0.0144 1.07079	-0.0382 0.98676	3.3645
	-0.0382 0.98676	-0.0144 1.07079	-0.0144 1.07079	-0.0382 0.98676	3.6251

При $\varepsilon_n \to 0$ собственные колебания для задач (1.1)-(1.3), (1.1)-(1.2), (1.4) расчленяются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания. При этом частоты этих задач стремятся к частотам аналогичных задач для пластинки-полосы и прямоугольной пластинки, соответственно. При увеличении n колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими. Безразмерные характеристики η_n собственной частоты квазитангенциальных колебаний стремятся к корню уравнения Рэлея $(K_{20}(\eta_n)=0)$ из (3.11). При $n\beta_0 \to \infty$ частоты волн, локализованных у свободных граничных образующих тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек $(k = 2\pi n_0/l)$ и частоты колебаний, локализованных у свободных граничных образующих тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек $(k=\pi/l)$ при наличии шарнирного закрепления Навье на граничных направляющих, стремятся к частотам волн тонкостенной конструкции оболочечного типа, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых бесконечных цилиндрических оболочек или частотам колебаний, локализованных у свободной образующей оболочечной конструкции, составленной из счетного числа одинаковых ортотропных незамкнутых конечных цилиндрических оболочек при наличии шарнирного закрепления Навье на боковых краях, соответственно.

Колебания преимущественно изгибно-крутильного типа $(\eta_2 = \eta_3 = \eta,\ \eta_1 = 0)$ при достаточно больших n расчленяются на квазипоперечные и преимущественно крутильные типы колебаний. При дальнейшем увеличении n колебания квазипоперечного типа становятся незатухающими (в таблицах параметры для незатухающих колебаний не приводятся).

Таблица 2

β_0	n	$\eta_1=\eta_2=\eta_3=\eta$	$\eta_1=\eta_2=0,\ \eta_3=\eta$	$\eta_1=\eta_2=\eta,\ \eta_3=0$	$\eta_2=\eta_3=\eta,\ \eta_1=0$
		$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n	$k\chi_0/n$ η/n
$5s$	1	-0.4047 b 0.01677	-0.4048 b 0.01678	-0.4009 e 0.68968	-0.4047 b 0.01677
		-0.4047 b 0.01678	-0.4047 b 0.01679	-0.4009 e 0.68983	-0.4047 b 0.01678
	2	-0.2773 b 0.02213	-0.2773 b 0.02213	-0.3672 e 0.89948	-0.2773 b 0.02213
		-0.2773 b 0.02213	-0.2773 b 0.02214	-0.3672 e 0.89948	-0.2773 b 0.02213
	3	-0.2199 b 0.02872	-0.2200 b 0.02872	-0.1204 e 0.96233	-0.2199 b 0.02872
		-0.2199 b 0.02872	-0.2200 b 0.02872	-0.1203 e 0.96257	-0.2199 b 0.02872
	4	-0.1871 b 0.03588	-0.1872 b 0.03589	-0.0649 e 0.97792	-0.1871 b 0.03588
		-0.1871 b 0.03588	-0.1872 b 0.03589	-0.0634 e 0.97896	-0.1871 b 0.03588
	5	-0.1664 b 0.04336	-0.1665 b 0.04337	-0.0496 e 0.98277	-0.1664 b 0.04336
		-0.1664 b 0.04336	-0.1665 b 0.04337	-0.0481 e 0.98380	-0.1664 b 0.04336
	9	-0.0629 b 0.07482	-0.0628 b 0.07482	-0.0392 e 0.98637	-0.0629 b 0.07482
		-0.0629 b 0.07482	-0.0628 b 0.07482	-0.0391 e 0.98647	-0.0629 b 0.07482
	10	-0.0462 b 0.08289	-0.0461 b 0.08289	-0.0389 e 0.98651	-0.0462 b 0.08289
		-0.0462 b 0.08289	-0.0461 b 0.08289	-0.0388 e 0.98656	-0.0462 b 0.08289
	110	-0.0144 b 0.90568	-0.0144 b 0.90568	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90568
		-0.0144 b 0.90568	-0.0144 b 0.90568	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90568
	120	-0.0382 e 0.98676	- -	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
		-0.0382 e 0.98676	- -	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
		-0.0144 b 0.98802	-0.0144 b 0.98801	- -	-0.0144 b 0.98802
		-0.0144 b 0.98802	-0.0144 b 0.98801	- -	-0.0144 b 0.98802
	130	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772
		-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772
s	1	-0.4273 b 0.01400	-0.4273 b 0.01400	- -	-0.4273 b 0.01400
		-0.4002 b 0.01728	-0.4002 b 0.01728	- -	-0.4002 b 0.01728
	2	-0.2914 b 0.02085	-0.2914 b 0.02085	-0.3699 e 0.91898	-0.2914 b 0.02085
		-0.2585 b 0.02368	-0.2585 b 0.02368		-0.2585 b 0.02368
	3	-0.2288 b 0.02812	-0.2288 b 0.02812	-0.1647 e 0.93009	-0.2288 b 0.02812
		-0.2082 b 0.02949	-0.2082 b 0.02949		-0.2082 b 0.02949
	4	-0.1920 b 0.03562	-0.1921 b 0.03562	-0.0987 e 0.94855	-0.1920 b 0.03562
		-0.1813 b 0.03619	-0.1814 b 0.03619		-0.1813 b 0.03619
	5	-0.1678 b 0.04330	-0.1678 b 0.04331	-0.0764 e 0.95867	-0.1678 b 0.04330
		-0.1651 b 0.04342	-0.1652 b 0.04342		-0.1651 b 0.04342
	9	-0.0750 b 0.07469	-0.0748 b 0.07469	-0.0529 e 0.97506	-0.0750 b 0.07469
		-0.0223 b 0.07509	-0.0219 b 0.07509		-0.0223 b 0.07509
	10	-0.0576 b 0.08277	-0.0575 b 0.08277	-0.0507 e 0.97696	-0.0576 b 0.08277
		-0.0576 b 0.08277	-0.0575 b 0.08277		-0.0003 b 0.08309
	110	-0.0144 b 0.90567	-0.0144 b 0.90567	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90567
		-0.0144 b 0.90567	-0.0144 b 0.90567	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 0.90567
	120	-0.0382 e 0.98676	- -	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
		-0.0382 e 0.98676	- -	-0.0382 e 0.98676	-0.0207 t 0.98771
		-0.0144 b 0.98801	-0.0144 b 0.98801	- -	-0.0144 b 0.98802
		-0.0144 b 0.98801	-0.0144 b 0.98801	- -	-0.0144 b 0.98802
	130	-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772
		-0.0382 e 0.98676	-0.0144 b 1.07034	-0.0382 e 0.98676	-0.0366 t 0.98772

Численный анализ показывает, что процесс затухания зависит от типа колебаний, от геометрических и физических параметров конструкции: колебания квазипоперечного типа, в основном, затухают медленнее, чем остальные типы колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.
2. Гринченко В.Т. Эффекты локализации волновых движений в упругих волноводах // Прикл. мех. 2005. Т. 41. № 9. С.38-45.
3. Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Wilde M.V. Free localajzed vibrations of a semi-infinite cylindrical shell // J. Acoust. Soc. America. 2000. V. 107. № 3. P. 1383-1393.
4. Гулгазарян Г.Р. О волнах, локализованных у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки //Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия механика. Вып. 1(5). 2003. С. 23-31.
5. Гулгазарян Г.Р. О локализованных собственных колебаниях у свободного торца полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки // Изв. РАН. МТТ. 2003. №1. С. 180-192.
6. Gulgazaryan G.R. Vibrations of a semi-infinite, orthotropic, cylindrical shells of open profile //Appl. Mech. 2004, Vol. 40. №2, P. 199-212.
7. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями // Проблемы прочности и пластичности, 2006. Вып. 68. С. 150-160
8. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б., Шинкар А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1986. 170с.
9. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания ортотропной гофрированной цилиндрической оболочки со свободными краями. // Прикл. мех. 2006. Т. 42. № 12. С.97-114.
10. Гулгазарян Г.Р. Волны у образующей полубесконечной ортотропной гофрированной тонкой упругой цилиндрической оболочки // В сб.: “Математический анализ и его приложения.” Ереван: 2003. Вып.3. С.41-93.
11. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
12. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383с.
13. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев. // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. №3. С.171-174.

Институт механики НАН Армении
Армгоспедуниверситет им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
17.09.2007