

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ И ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ
Макарян В.С., Члингярян Г.С.

Ключевые слова: плоскость, пространство, трещина, антитрещина, включение, напряжение, точное решение, преобразование.

Key words: surface, space, crack, anticrack, inclusion, stress, exact solution, transformation.

Վ. Ս. Մակարյան, Գ. Ս. Չլինգարյան

Կոշտ ներդիրներով առաձգական հարթության և տարածության հարթ և առանցքասիմետրիկ
կոնտակտային խնդիրներ

Դիտարկվում է կոշտ ներդիրներ պարունակող առաձգական հարթության և տարածության հարթ և առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդիրները: Ներդիրների և առաձգական միջավայրերի միջև տեղի ունեն կոշտ ամրակցման պայմանները: Հանկելի և Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխությունների հիման վրա ստացված են խնդիրների ճշգրիտ լուծումները: Բացահայտ տեսքով ստացված են խնդիրների լուծումները՝ ներդիրների տարբեր ձևերի դեպքում: Մասնավոր սահմանային դեպքերում ստացված են խնդիրների լուծումները՝ հակաճաքի համար:

V. S. Makaryan, G. S. Chlingaryan

A Plane and Axisymmetric Contact Tasks for Elastic Surface and Space Containing Rigid Inclusion

A plane and axisymmetric contact problems for elastic surface and space containing rigid inclusion are discussed. There exist conditions of full contact cohesion between inclusions and elastic mediums. Based on Fourier and Hankel integral transformations exact solutions of tasks are obtained. For various forms of inclusions, solutions in explicit forms are obtained. For special extreme cases the solution of tasks are obtained for anticracks.

Рассматривается плоская и осесимметричная контактные задачи для упругих плоскости и пространства, когда последние содержат в себе жесткие включения. Между включениями и упругими средами имеют место условия полного сцепления. На основе интегральных преобразований Фурье и Ханкеля получены точные решения задач. При различных формах включений решения представлены в явном виде. В частых предельных случаях получены решения задач для антитрещин.

1. Плоская задача. Пусть упругая плоскость содержит в себе математический разрез $|x| \leq a$, $y = 0$, берега которого в результате деформации принимают вид заданной функции. На бесконечности $y \rightarrow \infty$ действуют нормальные сжимающие усилия интенсивности \mathbf{P} (фиг. 1).

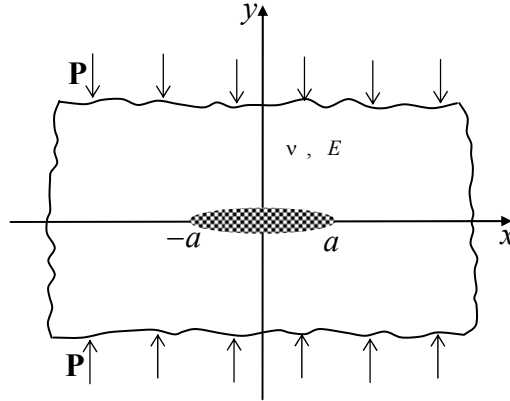
Граничные условия задачи запишем следующим образом:

$$\tau_{xy}(x, y) = \begin{cases} q(x) & y = 0 \quad -a < x < a \\ 0 & y = 0 \quad |x| > a \end{cases} \quad (1.1)$$

$$u_y(x, y) = \begin{cases} V(x) & y = 0 \quad -a \leq x \leq a \\ 0 & y = 0 \quad |x| > a \end{cases} \quad (1.2)$$

$$u_x(x, y) = 0 \quad y = 0 \quad -a \leq x \leq a \quad (1.3)$$

Функция $q(x)$ – неизвестная функция контактного касательного напряжения и подлежит определению, а функция $V(x)$ – заданная функция.



Фиг. 1

Заметим, что для функции $V(x)$ должны быть выполнены условия

$$V(-a) = V(a) = 0 \quad (1.4)$$

что является необходимым условием сплошности упругой среды. Для простоты предположим также, что функция $V(x)$ симметрична относительно оси Oy . В этом случае условиям (1.1) – (1.4) необходимо добавить условия симметрии:

$$u_x(x, y) = \tau_{xy}(x, y) = 0, \quad x = 0, \quad -\infty < y < +\infty \quad (1.5)$$

Решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции напряжений Эйри, которую представим в виде следующей суммы интеграла Фурье и вспомогательной функции:

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) + \lambda y B(\lambda)] e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda - \frac{P}{2} x^2 \quad \begin{matrix} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{matrix} \quad (1.6)$$

$$\Delta^2 \Phi(x, y) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{– оператор Лапласа,} \quad (1.7)$$

В представлении (1.6) $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ – неизвестные функции интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий (1.1) – (1.5).

Выразив при помощи известных соотношений [2]:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.8)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} + u_0$$

$$v(x, y) = \frac{1}{E} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\} + v_0 \quad (1.9)$$

компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию (1.6), будем иметь

$$\sigma_x(x, y) = \int_0^\infty \lambda^2 (A(\lambda) + (y\lambda - 2)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (1.10)$$

$$\sigma_y(x, y) = -P - \int_0^\infty \lambda^2 (A(\lambda) + y\lambda B(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (1.11)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = - \int_0^\infty \lambda^2 (A(\lambda) + (y\lambda - 1)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} u_x(x, y) = & \frac{1}{E} \int_0^\infty \lambda ((1+v)A(\lambda) + ((1+v)y\lambda - 2)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \sin(\lambda x) d\lambda + \\ & + \frac{vP}{E} x + u_0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} u_y(x, y) = & \frac{1}{E} \int_0^\infty \lambda ((1+v)A(\lambda) + (1-v + (1+v)y\lambda)B(\lambda)) e^{-\lambda y} \cos(\lambda x) d\lambda - \\ & - \frac{Px}{E} + v_0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Удовлетворив далее граничным условиям (1.1) и (1.2), на основе интегрального преобразования Фурье получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$A(\lambda) = -\frac{1-v}{\pi\lambda^2} \int_0^a q(s) \sin(\lambda s) ds - \frac{E}{\pi\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.15)$$

$$B(\lambda) = \frac{1+v}{\pi\lambda^2} \int_0^a q(s) \sin(\lambda s) ds - \frac{E}{\pi\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.16)$$

где

$$V'(x) = \frac{dV(x)}{dx} \quad (1.17)$$

Условия симметрии (1.5) удовлетворяются тождественно. Удовлетворение же граничному условию (1.3) приводит к следующему интегральному уравнению с ядром Коши относительно касательных контактных напряжений:

$$\int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds = -\frac{2\pi v P}{(3-v)(1+v)} + \frac{E(1-v)}{(3-v)(1+v)} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{x-s} ds \quad (1.18)$$

Решая уравнение (1.18) [3,4], получим:

$$\tau_{xy}(x, 0) \equiv q(x) = \frac{2\nu P}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{(1-\nu)E}{(3-\nu)(1+\nu)} V'(x) \quad |x| < a \quad (1.19)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > a \quad (1.20)$$

В силу известного интегрального представления [4]:

$$\int_0^a \frac{x \sin \lambda x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \frac{\pi a}{2} J_1(\lambda a) \quad (1.21)$$

выражения (1.15) – (1.16) примут следующий вид:

$$A(\lambda) = -\frac{\nu(1-\nu)Pa}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{1}{\lambda^2} J_1(\lambda a) - \frac{4E}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.22)$$

$$B(\lambda) = \frac{\nu Pa}{(3-\nu)} \frac{1}{\lambda^2} J_1(\lambda a) - \frac{2E}{\pi(3-\nu)} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^a V'(s) \sin(\lambda s) ds \quad (1.23)$$

Подставляя выражения (1.22) – (1.23) в (1.11), получим следующую формулу для нормальных контактных напряжений, действующих на линии $-\infty < x < +\infty$, $y = 0$:

$$\sigma_y(x, 0) = -P - \frac{2E}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{x-s} ds \quad |x| < a \quad (1.24)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{x^2 - a^2 + |x| \sqrt{x^2 - a^2}} \right) - \frac{2E}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \int_{-a}^a \frac{V'(s)}{x-s} ds \quad |x| > a \quad (1.25)$$

Формулы для перемещений принимают следующий вид:

$$u_x(x, 0) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \frac{\nu P}{E} \sqrt{x^2 - a^2} & |x| > a \end{cases} \quad u_0 = 0 \quad (1.26)$$

$$u_y(x, 0) = \int_0^a V'(s) (\operatorname{sgn}(s-x) + \operatorname{sgn}(s+x)) ds, \quad v_0 = 0 \quad -\infty < x < +\infty \quad (1.27)$$

В частном случае, когда форма жесткого включения взята в виде пересечения двух парабол:

$$V(x) = \mp \frac{k}{2} (x^2 - a^2), \quad k > 0 \quad y \rightarrow \pm 0 \quad (1.28)$$

формулы (1.19), (1.24) и (1.25) преобразуются к следующему виду:

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{2\nu P}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{k(1-\nu)E}{(3-\nu)(1+\nu)} x \quad |x| < a \quad (1.29)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P - \frac{2kE}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \left(x \ln \frac{a+x}{a-x} - 2a \right) \quad |x| < a \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = & -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} (\sqrt{x^2 - a^2} + |x|)} \right) - \\ & - \frac{2kE}{\pi(3-\nu)(1+\nu)} \left(x \ln \frac{x+a}{x-a} - 2a \right) \quad |x| > a \quad (1.31) \end{aligned}$$

Из последних формул легко заметить, что касательные напряжения в точках $x = \pm a$ имеют особенность в виде квадратного корня, нормальные же напряжения при $x \rightarrow \pm a \mp 0$ имеют логарифмическую особенность, а при $x \rightarrow \pm a \pm 0$ – особенность в виде квадратного корня.

Если форму включения взять в виде эллипса:

$$V(x) = \mp \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad b > 0, \quad y \rightarrow \pm 0 \quad (1.32)$$

будем иметь:

$$\tau_{xy}(x, 0) = -\frac{b(1-\nu)E - 2a\nu P}{a(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad |x| < a \quad (1.33)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P - \frac{b}{a} \frac{2E}{(3-\nu)(1+\nu)} \quad |x| < a \quad (1.34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, 0) = & -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{|x| \sqrt{x^2 - a^2} + x^2 - a^2} \right) + \\ & + \frac{b}{a} \frac{2E_1}{(3-\nu)(1+\nu)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} - 1 \right) \quad |x| > a \quad (1.35) \end{aligned}$$

Формулы (1.33) – (1.35) показывают, что в случае эллиптического включения касательные напряжения имеют корневые особенности в точках $x \pm a$, а нормальные напряжения ограничены при $x \rightarrow \pm a \mp 0$ и имеют корневые особенности при $x \rightarrow \pm a \pm 0$.

Предельные значения, когда $k \rightarrow 0$ в случае параболического включения и $b \rightarrow 0$ в случае эллиптического включения, совпадают со значениями предельной задачи: именно задачи, когда жесткое включение является отрезком прямой $|x| \leq a, y = 0$ (случай антитрещины [6]) и формулы для напряжений принимают следующий простой вид:

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{2\nu P}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad |x| < a \quad (1.36)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P \quad |x| < a \quad (1.37)$$

$$\sigma_y(x, 0) = -P \left(1 + \frac{\nu(1-\nu)}{(3-\nu)(1+\nu)} \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x^2-a^2}+|x|)} \right) \quad |x| > a \quad (1.38)$$

Заметим также, что последнее заключение является непосредственным следствием необходимых условий (1.4).

2. Осесимметричная задача. Упругое пространство содержит в себе круговой разрез, $z = 0, 0 \leq r \leq R$, в который помещено жесткое дискообразное включение, иными словами, в результате деформации круговые берега разреза получили вид заданной функции. На бесконечности $z \rightarrow \infty$ действуют сжимающие усилия интенсивности \mathbf{P} (фиг. 2).

Граничные условия запишем следующим образом:

$$\tau_{rz}(r, z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \quad r > R \\ q(r) & z = 0 \quad 0 < r < R \end{cases} \quad (2.1)$$

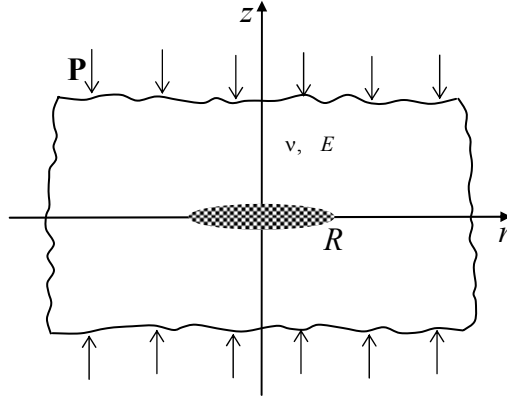
$$u_z(r, z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \quad r > R \\ v(r) & z = 0 \quad 0 \leq r \leq R \quad v(R) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$u_r(r, z) = 0 \quad z = 0 \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.3)$$

Функция $q(r)$ – неизвестная функция контактного касательного напряжения и подлежит определению, а функция $v(r)$ – заданная функция.

Решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции напряжений Лява [4], которую представим в виде следующего интеграла Ханкеля и вспомогательной функции:

$$\Phi(r, z) = \frac{P}{4(2-\nu)} r^2 z + \int_0^\infty [A(\lambda) + \lambda z B(\lambda)] e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad \begin{matrix} 0 < z < \infty \\ 0 < r < \infty \end{matrix} \quad (2.4)$$



Фиг. 2

$$\Delta^2 \Phi[r, z] = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа}$$

Здесь $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ – неизвестные функции интегрирования, которые должны определиться из граничных условий (2.1) – (2.3).

Выразив при помощи следующих известных соотношений [2]

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left((2 - \nu) \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial z^2} \right) \\ \sigma_r(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial r^2} \right) \\ \sigma_\phi(r, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi[r, z] - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi[r, z]}{\partial r} \right) \\ \tau_{rz}(r, z) &= \frac{\partial}{\partial r} \left((1 - \nu) \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial r \partial z}, \quad u_z(r, z) = \frac{1}{2G} \left(2(1 - \nu) \Delta \Phi[r, z] - \frac{\partial^2 \Phi[r, z]}{\partial z^2} \right)$$

компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию (2.4), будем иметь

$$\sigma_z(r, z) = P + \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^3 (A(\lambda) + (1 - 2\nu + \lambda z) B(\lambda)) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (2.6)$$

$$\sigma_r(r, z) = -P \frac{1 - 2\nu}{2(2 - \nu)} - \int_0^\infty e^{-\lambda z} \lambda^3 (A(\lambda) - (1 + 2\nu - \lambda z) B(\lambda)) J_0(\lambda r) d\lambda +$$

$$+\frac{1}{r} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \lambda^2 (A(\lambda) - (1-\lambda z)B(\lambda)) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi}(r, z) = & -P \frac{1-2\nu}{2(2-\nu)} + 2\nu \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \lambda^3 B(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda - \\ & - \frac{1}{r} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \lambda^2 (A(\lambda) - (1-\lambda z)B(\lambda)) J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \lambda^3 (A(\lambda) - (2\nu - \lambda z)B(\lambda)) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (2.9)$$

$$u_r(r, z) = \frac{-1}{2G} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \lambda^2 (A(\lambda) - (1-\lambda z)B(\lambda)) J_1(\lambda r) d\lambda - \frac{P}{4G(2-\nu)} r + u_0 \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} u_z(r, z) = & -\frac{1}{2G} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \lambda^2 (A(\lambda) + (2(1-2\nu) + \lambda z)B(\lambda)) J_1(\lambda r) d\lambda + \\ & + \frac{P(1-\nu)}{G(2-\nu)} z + v_0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Удовлетворив граничным условиям (2.1)–(2.3), на основе интегрального преобразования Ханкеля получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$\begin{aligned} A(\lambda) = & -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)\lambda^2} \int_0^R t q(t) J_1(\lambda t) dt + \frac{2G\nu}{(1-\nu)\lambda} \int_0^R t v(t) J_0(\lambda t) dt \\ B(\lambda) = & -\frac{1}{2(1-\nu)\lambda^2} \int_0^R t q(t) J_1(\lambda t) dt - \frac{G}{(1-\nu)\lambda} \int_0^R t v(t) J_0(\lambda t) dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

Удовлетворение же граничного условия (2.3) приводит к следующему интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_1(\lambda r) d\lambda \int_0^R t q(t) J_1(\lambda t) dt = & -\frac{(1-\nu)P}{(3-4\nu)(2-\nu)} r - \\ & - 2 \frac{1-2\nu}{3-4\nu} G \int_0^{\infty} \lambda \bar{v}(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \quad 0 < r < R \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\bar{v}(\lambda) = \int_0^R t v(t) J_0(\lambda t) dt \quad (2.14)$$

Приложив к обеим частям уравнения (2.13) оператор [4]:

$$I[\varphi] = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \int_0^x \frac{\varphi}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \right\} \quad (2.15)$$

и используя известное интегральное представление

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ x \int_0^x \frac{J_1(\lambda r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \right\} = \sin(\lambda x) \quad (2.16)$$

уравнение (2.13) приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_0^R t q(t) dt \int_0^\infty \sin(\lambda x) J_1(\lambda t) d\lambda = -\frac{(1-\nu)P}{(3-4\nu)(2-\nu)} x - \\ - 2 \frac{1-2\nu}{3-4\nu} G \int_0^\infty \lambda \bar{\nu}(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda \quad 0 < x < R \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая далее известное значение разрывного интеграла [3]

$$\int_0^\infty \sin(\lambda x) J_1(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} \frac{x}{t\sqrt{t^2 - x^2}} & t > x \\ 0 & t < x \end{cases} \quad (2.18)$$

вместо (2.17) будем иметь следующее интегральное уравнение Абеля:

$$\begin{aligned} \int_x^R \frac{q(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt = -\frac{(1-\nu)P}{(3-4\nu)(2-\nu)} - \\ - \frac{2G(1-2\nu)}{3-4\nu} \frac{1}{x} \int_0^\infty \lambda \bar{\nu}(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda \quad 0 < x < R \end{aligned} \quad (2.19)$$

решение которого имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, 0) \equiv q(r) = -2P \frac{1-\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 2G \frac{1-2\nu}{3-4\nu} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \int_r^R \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \int_0^\infty \lambda \bar{\nu}(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

В частном случае, когда форма жесткого включения взята в виде пересечений двух параболоид

$$\nu(r) = \mp k(r^2 - R^2), \quad k > 0 \quad z \rightarrow \pm 0 \quad (2.21)$$

для касательных контактных напряжений получим следующую формулу:

$$\tau_{rz}(r, 0) = \frac{kG(1-2\nu)\pi}{3-4\nu} r - P \frac{2(1-\nu)}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.22)$$

Для нормальных напряжений из (2.6) будем иметь:

$$\sigma_z(r, 0) = P - P \frac{1-2\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{\pi}{2} +$$

$$+ k G \frac{2(3-4\nu) + \pi(1-2\nu)^2}{(3-4\nu)(1-\nu)} R \left[2E\left(\frac{r^2}{R^2}\right) - K\left(\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.23)$$

$$\sigma_z(r, 0) = P - P \frac{1-2\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \left[\arcsin\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \right] - \frac{2kG}{(1-\nu)\pi} R \times$$

$$\times \left[\pi - E\left(\frac{R^2}{r^2}\right) - K\left(\frac{R^2}{r^2}\right) \right] + \frac{kG(1-2\nu)^2 r}{(3-4\nu)(1-\nu)} \left(2E\left(\frac{R}{r}\right) + \left(\frac{R^2}{r^2} - 2\right) K\left(\frac{R}{r}\right) \right) \quad (2.24)$$

$$R < r.$$

В формулах (2.23) и (2.24) $K(k)$ и $E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k\sin^2\theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k\sin^2\theta} d\theta \quad (2.25)$$

Как видно, и в этом случае касательные напряжения в точке $r = R$ имеют особенность в виде квадратного корня, нормальные же напряжения слева от точки $r = R$ – логарифмическую особенность, а справа – особенности в виде квадратного корня.

Случай эллипсоидального включения также аналогичен случаю эллиптического включения в плоской задаче. Аналогично плоской задаче при предельном переходе $k \rightarrow 0$ (случай круговой антитрещины) получим:

$$\tau_{rz}(r, 0) = -P \frac{2(1-\nu)}{(3-4\nu)(2-\nu)} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.26)$$

$$\sigma_z(r, 0) = P \left(1 - \frac{\pi(1-2\nu)}{2(3-4\nu)(2-\nu)} \right) \quad 0 \leq r \leq R \quad (2.27)$$

$$\sigma_z(r, 0) = P \left(1 - \frac{1-2\nu}{(3-4\nu)(2-\nu)} \left[\arcsin\left(\frac{R}{r}\right) - \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \right] \right) \quad R < r \quad (2.28)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Макарян В.С., Члингярян Г.С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с трещиной, перпендикулярной к границе раздела материалов. //Изв НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.3–12.
2. Новожилов В.В. Теория упругости. М.: Судпромгиз, 1958. 370с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 639с.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. М.: Изд. иностр. лит., 1949. 798с.
5. Александров А.Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимости между осесимметричными и плоскими состояниями. // ПММ. 1961.Т.25. Вып.5. С. 912-920.
6. John Dundurs, Xanthippi Markenscoff. A Green's function formulation of anticracks and their interaction with load-induced singularities.// Journal of applied mechanics. Vol. 56. 1989.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
12.02.2008