ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №2, 2008 Механика

УДК 62.50:534.112

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ С ЗАДАННЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ

Барсегян В. Р., Саакян М. А.

Ключевые слова: струна, колебания, промежуточные моменты времени, оптимальное управление
Keywords: wire, vibration, intermediate periods of time, optimal control

Վ.Ռ. Բարսեղյան, Մ. Ա. Սահակյան

Ժամանակի միջանկյալ պահերին տրված վիճակներով լարի տատանման օպտիմալ ղեկավարումը

Ուսումնասիրված է ժամանակի միջանկյալ պահերին տրված վիճակներով լարի տատանման օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը: Օգտվելով Ֆուրյեի փոփոխականների անջատման եղանակից յուրաքանչյուր հարմոնիկի համար կամայական թվով միջանկյալ պահերի դեպքում մոմենտների պրոբլեմով լուծված է օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը: Ստացվել են օպտիմալ ղեկավարող ազդեցությունները և լարի տատանման ֆունկցիան: Բերված է թվային օրինակ:

V. R. Barsegyan, M. A. Sahakyan

The optimal control of wire vibration in the states of the given intermediate periods of time

The problem of the optimal control of wire vibration in the states of given intermediate periods of time is investigated. By using Fourier` s method of parting variables for each harmonic with arbitrary cases of intermediate moments, with the help of the moments problem the problem of optimal control is solved. The optimal control effects and function of wire vibration are received. Numerical example is given.

Рассмотрена задача об оптимальном управлении колебания струны с заданными промежуточными состояниями. Используя метод разделения переменных по Фурье, для каждой гармоники с произвольным количеством промежуточных моментов с помощью проблемы моментов решена задача оптимального управления. Получены оптимальные управляющие воздействия и функция колебаний струны. Приведен числовой пример.

1. Рассмотрим однородную, упругую струну длиной ℓ, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x,t)$. Ограничимся рассмотрением малых колебаний струны и предположим, что участок, на который действуют распределенные силы, имеет положительную меру по Лебегу.

Пусть $Q(x,t)$ при $0 \le x \le \ell$ и $t \ge 0$ есть прогиб струны, подчиненный при $0 < x < \ell$ и $t > 0$ следующему уравнению [1]:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$Q(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_0(x) \quad 0 \le x \le \ell \tag{1.2}$$

и однородными граничными условиями

$$Q(0,t) = 0, \quad Q(\ell,t) = 0 \quad t > 0, \tag{1.3}$$

где $a^2 = T_0/\rho$, T_0 – натяжение, ρ – плотность однородной струны.

Пусть в некоторые промежуточные моменты времени $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T$ заданы значения состояния и скорости любой точки струны

$$Q(x,t_j) = \varphi_j(x), \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=t_j} = \psi_j(x) \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{1.4}$$

Задача оптимального управления колебаниями струны ставится следующим образом: среди возможных управлений $u(x,t)$ при $0 \le x \le \ell$, $0 \le t \le T$ требуется найти оптимальное управление $u^0(x,t)$, переводящее струну из заданного начального состояния (1.2) через промежуточные состояния (1.4) в конечное состояние

$$Q(x,T) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial t}\Big|_{t=T} = 0 \quad 0 \le x \le \ell \tag{1.5}$$

и минимизирующее функционал

$$\int_0^T \int_0^\ell [u(x,t)]^2 \, dxdt. \tag{1.6}$$

2. Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$Q(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(t) \sin\frac{k\pi}{\ell} x. \tag{2.1}$$

Представив функции $u(x,t), \quad \varphi_j(x,t), \quad \psi_j(x,t) \quad (j = 1,2,\ldots,n)$ в виде рядов Фурье и подставив их значения вместе с $Q(x,t)$ в уравнение (1.1) и в условие (1.2), (1.4), (1.5), получаем

$$\ddot{Q}_k(t) + \lambda_k^2 Q_k(t) = u_k(t) \tag{2.2}$$

$$Q_k(0) = \varphi_k^{(0)}, \quad \dot{Q}_k(0) = \psi_k^{(0)} \tag{2.3}$$

$$Q_k(t_j) = \varphi_k^{(j)}, \quad \dot{Q}_k(t_j) = \psi_k^{(j)} \quad (j = 1,\ldots,n) \tag{2.4}$$

$$Q_k(T) = \varphi_k^{(n+1)} = 0, \quad \dot{Q}_k(T) = \psi_k^{(n+1)} = 0, \tag{2.5}$$

где через $u_k(t), \quad \varphi_k^{(j)}, \quad \psi_k^{(j)}$ обозначены коэффициенты Фурье, соответственно функциям

$u(x,t), \quad \varphi_j(x,t), \quad \psi_j(x,t)$, а $\lambda_k^2 = a^2\pi^2k^2/\ell^2 \quad (k = 1,2,\ldots)$.

Предполагается, что функция $u(x,t)$ такая, что ее коэффициенты $u_k(t) \quad 0 \le t \le T$ для любого индекса k не равны нулю.

Общее решение уравнения (2.2) с начальными условиями (2.3) имеет вид [2]

$$Q_k(t) = \varphi_k^{(0)} \cos\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\psi_k^{(0)} \sin\lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t u_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.6}$$

Имея явное выражение (2.6) для $Q(x,t)$ и учитывая условия (2.4) и (2.5), получим, что функции $u_k(\tau)$ должны удовлетворять следующей бесконечной системе равенств:

$$\int_0^{t_j} u_k(\tau)\sin\lambda_k(t_j-\tau)d\tau=\lambda_k\varphi_k^{(j)}-\lambda_k\varphi_k^{(0)}\cos\lambda_k t_j-\psi_k^{(0)}\sin\lambda_k t_j \qquad (2.7)$$

$$\int_0^{t_j} u_k(\tau)\cos\lambda_k(t_j-\tau)d\tau=\psi_k^{(j)}-\lambda_k\varphi_k^{(0)}\sin\lambda_k t_j-\psi_k^{(0)}\cos\lambda_k t_j, \qquad (2.8)$$

где $(j=1,2,...,n+1)$.

Эти равенства удобно представить в виде

$$\int_0^{t_j} u_k(\tau)\sin\lambda_k\tau d\tau=c_{1k}(t_j),\quad \int_0^{t_j} u_k(\tau)\cos\lambda_k\tau d\tau=c_{2k}(t_j), \qquad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} c_{1k}(t_j)&=\lambda_k\varphi_k^{(0)}-\lambda_k\varphi_k^{(j)}\cos\lambda_k t_j+\psi_k^{(j)}\sin\lambda_k t_j\\ c_{2k}(t_j)&=-\psi_k^{(0)}+\psi_k^{(j)}\cos\lambda_k t_j+\lambda_k\varphi_k^{(j)}\sin\lambda_k t_j \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Для того, чтобы левую часть системы (2.9) для каждого $(\kappa=1,2,3,...)$ рассматривать как линейную операцию, порожденную функцией $u_k(\tau)$ на отрезке $[0,T]$, целесообразно ввести следующие функции [3]:

$$h_{1k}^{(j)}(\tau)=\begin{cases}\sin\lambda_k\tau & \text{при}\quad 0\le\tau\le t_j\\ 0 & \text{при}\quad t_j\le\tau\le T\end{cases} \qquad (2.11)$$

$$h_{2k}^{(j)}(\tau)=\begin{cases}\cos\lambda_k\tau & \text{при}\quad 0\le\tau\le t_j\\ 0 & \text{при}\quad t_j\le\tau\le T,\end{cases}$$

(2.12)

где $(j=1,2,...,n+1)$.

Соотношения (2.9) при помощи функций $h_{1k}^{(j)}(\tau)$ (2.11) и $h_{2k}^{(j)}(\tau)$ (2.12) запишутся как:

$$\begin{aligned} &\int_0^T h_{1k}^{(j)}(\tau)u_k(\tau)d\tau=c_{1k}(t_j)\\ &\int_0^T h_{2k}^{(j)}(\tau)u_k(\tau)d\tau=c_{2k}(t_j)\qquad (j=1,2,...,n+1) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Учитывая, что $u(x,t)$ является элементом пространства L_2 при $x\in[0,\ell]$, получим, что минимизация функционала (1.6) равносильна минимизации функционалов

$$\int_0^T u_k^2(\tau)d\tau \qquad (k=1,2,...) \qquad (2.14)$$

Таким образом, для каждого индекса k надо найти такое оптимальное управляющее воздействие $u_k^{(0)}(t)$ $t\in[0,T]$, $(k=1,2,...)$, которое удовлетворяет интегральным условиям (2.13) и минимизирует функционал (2.14). Так как (2.14) является квадратом нормы линейного нормированного пространства, то решение поставленной задачи можно найти с помощью проблемы моментов [4].

3. Для решения задачи (2.13), (2.14), следуя работам [2,4], нужно найти числа p_{jk} и q_{jk} $\left(j=1,2,...,n+1\right)$, связанные условием

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left[p_{jk}c_{1k}\left(t_j\right)+q_{jk}c_{2k}\left(t_j\right)\right]=1, \tag{3.1}$$

для которых

$$\left(\rho_k^0\right)^2=\min_{(3.1)}\int_0^T h_k^2(\tau)d\tau, \tag{3.2}$$

где

$$h_k(\tau)=\sum_{j=1}^{n+1}\left[p_{jk}h_{1k}^{(j)}(\tau)+q_{jk}h_{2k}^{(j)}(\tau)\right]. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), проведя соответствующие вычисления и вводя следующие обозначения:

$$a_{ik}=t_i-\frac{\sin 2\lambda_k t_i}{2\lambda_k},\ b_{ik}=t_i+\frac{\sin 2\lambda_k t_i}{2\lambda_k},\ d_{ik}=\frac{\sin^2\lambda_k t_i}{\lambda_k},$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\left(\rho_k^0\right)^2=\min_{(3.1)}\Bigg[\sum_{i=1}^{n+1}\Bigg(&\sum_{j=1}^{i-1}\left(p_{ik}p_{jk}a_{jk}+p_{ik}q_{jk}d_{jk}+q_{ik}q_{jk}b_{jk}+p_{jk}q_{ik}d_{jk}\right)+\\&+\sum_{j=i}^{n+1}\left(p_{ik}p_{jk}a_{ik}+p_{ik}q_{jk}d_{ik}+q_{ik}q_{jk}b_{ik}+p_{jk}q_{ik}d_{ik}\right)\Bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{3.4}$$

Методом неопределенных множителей Лагранжа из (3.4) получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n+1}\left(p_{ik}a_{1k}+q_{ik}d_{1k}\right)=\nu_k c_{1k}(t_1)\\&\sum_{i=1}^{n+1}\left(p_{ik}d_{1k}+q_{ik}b_{1k}\right)=\nu_k c_{2k}(t_1)\\&\sum_{i=m+1}^{n+1}\left(p_{ik}\sigma_{1mk}+q_{ik}\sigma_{3mk}\right)=-\nu_k c_{1mk}\\&\sum_{i=m+1}^{n+1}\left(p_{ik}\sigma_{3mk}+q_{ik}\sigma_{2mk}\right)=-\nu_k c_{2mk}\qquad (m=1,...,n)\end{aligned} \tag{3.5}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\sigma_{1ik}=a_{ik}-a_{i+1k},\ \sigma_{2ik}=b_{ik}-b_{i+1k},\ \sigma_{3ik}=d_{ik}-d_{i+1k}$$

$$c_{1ik}=c_{1k}\left(t_{i+1}\right)-c_{1k}\left(t_i\right),\ c_{2ik}=c_{2k}\left(t_{i+1}\right)-c_{2k}\left(t_i\right)\ (i=1,...,n) \tag{3.6}$$

а ν_k – неопределенный множитель Лагранжа. Присоединяя к системе (3.5) условие (3.1), получим замкнутую систему алгебраических уравнений относительно p_{jk}, q_{jk}, ν_k $\left(j=1,2,...,n+1\right)$.

Полученная система алгебраических уравнений допускает следующее решение:

$$\begin{cases} p_{1k} = \nu_k \left(\dfrac{e_k}{\Delta_k} + \dfrac{M_{1k}}{\Delta_{1k}}\right), \\ q_{1k} = \nu_k \left(\dfrac{f_k}{\Delta_k} + \dfrac{N_{1k}}{\Delta_{1k}}\right) \\ p_{mk} = \nu_k \left(\dfrac{M_{mk}}{\Delta_{mk}} - \dfrac{M_{m-1k}}{\Delta_{m-1k}}\right) \\ q_{mk} = \nu_k \left(\dfrac{N_{mk}}{\Delta_{mk}} - \dfrac{N_{m-1k}}{\Delta_{m-1k}}\right) \quad m = 2,...,n \\ p_{n+1k} = -\nu_k \dfrac{M_{nk}}{\Delta_{nk}}, \\ p_{n+1k} = -\nu_k \dfrac{N_{nk}}{\Delta_{nk}}, \\ \nu_k = \dfrac{\Delta_k}{A_k} \end{cases} \tag{3.7}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$e_k = c_{1k}(t_1)b_{1k} - c_{2k}(t_1)d_{1k}, \; f_k = c_{2k}(t_1)a_{1k} - c_{1k}(t_1)d_{1k}$$
$$\Delta_{ik} = \sigma_{1ik}\sigma_{2ik} - \sigma_{3ik}^2, \; \Delta_k = a_{1k}b_{1k} - d_{1k}^2$$
$$M_{ik} = c_{1ik}\sigma_{2ik} - c_{2ik}\sigma_{3ik}, \; N_{ik} = c_{2ik}\sigma_{1ik} - c_{1ik}\sigma_{3ik}, \tag{3.8}$$
$$A_k = c_{1k}^2(t_1)b_{1k} - 2c_{1k}(t_1)c_{2k}(t_1)d_{1k} + c_{2k}^2(t_1)a_{1k} - \sum_{i=1}^{n}(c_{1ik}M_{ik} + c_{2ik}N_{ik})\frac{\Delta_k}{\Delta_{ik}}$$

Из (3.4) с учетом (3.7) будем иметь

$$\left(\rho_k^0\right)^2 = \frac{\Delta_k}{2A_k}. \tag{3.9}$$

Подставляя из (3.7) значения для p_{jk}^0, q_{jk}^0 $\left(j = 1,2,...,n+1\right)$ в (3.3), получим

$$h_k^{(0)}(\tau) = \frac{1}{A_k}[e_k h_{1k}^{(1)}(\tau) + f_k h_{2k}^{(1)}(\tau) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_k}{\Delta_{ik}}M_{ik}(h_{1k}^{(i)}(\tau) - h_{1k}^{(i+1)}(\tau)) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_k}{\Delta_{ik}}N_{ik}(h_{2k}^{(i)}(\tau) - h_{2k}^{(i+1)}(\tau))] \tag{3.10}$$

Так как

$$u_k^0(t) = \frac{1}{\left(\rho_k^0\right)^2}h_k^{(0)}(t), \tag{3.11}$$

то с учетом (2.11), (2.12) и учитывая (3.9), (3.10), для каждого индекса оптимальное управляющее воздействие имеет следующий вид:

$$u_k^0(t)=\begin{cases} u_k^{01}(t) & \text{при} \quad 0\le t\le t_1 \\ u_k^{02}(t) & \text{при} \quad t_1<t\le t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ u_k^{0n+1}(t) & \text{при} \quad t_n<t\le t_{n+1} \end{cases}, \tag{3.12}$$

где

$$\begin{gathered} u_k^{0i+1}(t)=\frac{2}{(t_{i+1}-t_i)(1-(S_{ki})^2)}\Big\{\Big\{\lambda_k\varphi_k^{(i)}\left[\cos\lambda_k t_i+S_{ki}\cos\lambda_k t_{i+1}\right]- \\ -\psi_k^{(i)}\left[\sin\lambda_k t_i-S_{ki}\sin\lambda_k t_{i+1}\right]-\lambda_k\varphi_k^{(i+1)}\left[\cos\lambda_k t_{i+1}+S_{ki}\cos\lambda_k t_i\right]+ \\ +\psi_k^{(i+1)}\left[\sin\lambda_k t_{i+1}-S_{ki}\sin\lambda_k t_i\right]\Big\}\sin\lambda_k t+ \\ +\Big\{-\lambda_k\varphi_k^{(i)}\left[\sin\lambda_k t_i+S_{ki}\sin\lambda_k t_{i+1}\right]-\psi_k^{(i)}\left[\cos\lambda_k t_i-S_{ki}\cos\lambda_k t_{i+1}\right]+ \\ +\lambda_k\varphi_k^{(i+1)}\left[\sin\lambda_k t_{i+1}+S_{ki}\sin\lambda_k t_i\right]+\psi_k^{(i+1)}\left[\cos\lambda_k t_{i+1}-S_{ki}\cos\lambda_k t_i\right]\Big\}\cos\lambda_k t\Big\} \end{gathered} \tag{3.13}$$

при $S_{ki}=\dfrac{\sin\lambda_k(t_i-t_{i+1})}{\lambda_k(t_i-t_{i+1})}$.

4. В пункте 3 полностью определены функции $u_k^0(t)$ $(\kappa=1,2,\dots)$. Для функции $u^0(x,t)$ будем иметь

$$u^0(x,t)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^{01}(t)\sin\dfrac{k\pi}{\ell}x & \text{при} \quad 0\le t\le t_1 \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^{02}(t)\sin\dfrac{k\pi}{\ell}x & \text{при} \quad t_1<t\le t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^{0n+1}(t)\sin\dfrac{k\pi}{\ell}x & \text{при} \quad t_n<t\le t_{n+1} \end{cases} \tag{4.1}$$

Для функции $Q_k(t)$, из формулы (2.6) с учетом (3.12) и интегрального условия (2.7) будем иметь

$$Q_k^{i+1}(t)=\varphi_k^{(0)}\cos\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\psi_k^{(0)}\sin\lambda_k t+\frac{1}{\lambda_k}\sum_{j=1}^{i}\int_{t_{j-1}}^{t_j}u_k^{0j}(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau+\frac{1}{\lambda_k}\int_{t_i}^{t}u_k^{0i+1}(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau \tag{4.2}$$

где $t_i<t\le t_{i+1}$, $(i=1,2,\dots,n)$

Для того, чтобы убедиться в непрерывности функций прогиба струны

$$Q(x,t)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}Q_k^1(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}x & \text{при} \quad 0\le t\le t_1\\ \sum_{k=1}^{\infty}Q_k^2(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}x & \text{при} \quad t_1<t\le t_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum_{k=1}^{\infty}Q_k^n(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}x & \text{при} \quad t_n<t\le t_{n+1}\end{cases} \tag{4.3}$$

достаточно доказать равномерную сходимость рядов (4.3). Равномерная сходимость рядов (4.1), (4.3) и рядов для функции $Q_{xx}(x,t)$, $Q_{tt}(x,t)$ сводится к сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\alpha}\left|\varphi_k^{(j)}\right| \qquad (\alpha=0,1,2;\ j=0,1,2,\dots,n) \tag{4.4}$$

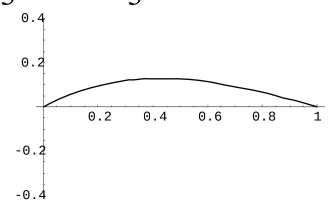
$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{\alpha}\left|\psi_k^{(j)}\right| \qquad (\alpha=-1,0,1;\ j=0,1,2,\dots,n) \tag{4.5}$$

для сходимости рядов (4.4) достаточно потребовать, чтобы начальные и промежуточные отклонения, т.е. $\varphi_0(x)$, $\varphi_j(x)$ удовлетворяли условиям сходимости ряда при $\alpha=2$.

Для сходимости рядов (4.5) достаточно потребовать, чтобы начальная и промежуточная скорости $\psi_0(x)$, $\psi_j(x)$ удовлетворяли сходимости ряда при $\alpha=1$.

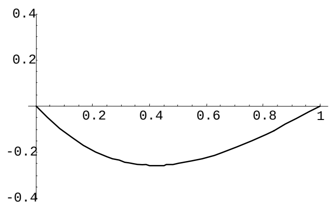
5. **Численный пример**. Рассматривается оптимальное управление колебаниями упругой струны длиной в 1 м, края которой закреплены. Пусть в вертикальной плоскости на струну действуют распределенные силы с плотностью $u(x,t)$ и при $t=0$

$$\varphi_0(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{2x}{3}, \qquad \psi_0(x)=-x^2+x \tag{5.1}$$



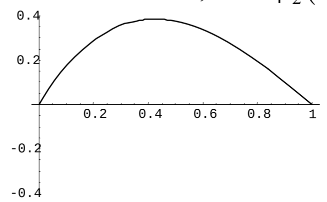
Среди возможных управлений $u(x,t)$ $0\le x\le\ell,$ $t\ge 0$ требуется найти оптимальное управление $u^0(x,t)$, переводящее струну из заданного начального состояния (5.1) через промежуточные состояния (5.2), (5.3) при

$$t=3,\quad \varphi_1(x)=-\frac{2x^3}{3}+2x^2-\frac{4x}{3}, \qquad \psi_1(x)=-\frac{x^2}{3}+\frac{x}{3} \tag{5.2}$$



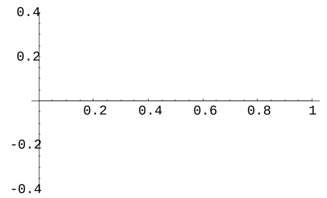
при

$$t = 6\,, \quad \varphi_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \qquad \psi_2(x) = -2x^2 + 2x \qquad (5.3)$$



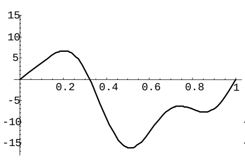
в конечное состояние при

$$t = 9\,, \qquad \varphi_3(x) = 0, \qquad \psi_3(x) = 0 \qquad (5.4)$$

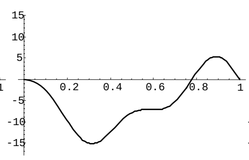


и минимизирующее функционал (1.6).

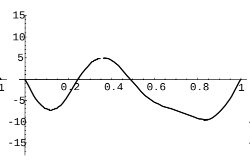
Подставим значения функций $\varphi_0(x)$, $\psi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, , $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$ в уравнения (3.13) и получим значения $u_k^{0i+1}(t)$, с помощью которых из (4.1), (4.2), (4.3) получаем значения оптимального управления $u^0(x,t)$ и $Q(x,t)$. Приводятся графики функции $u^0(x,t)$ при $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.



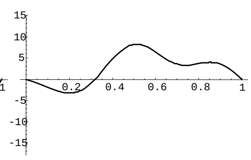
$t = 0$



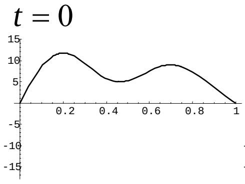
$t = 1$



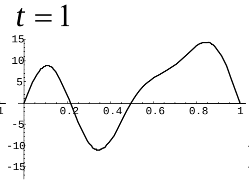
$t = 2$



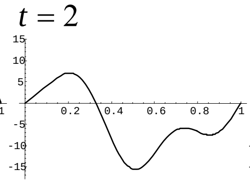
$t = 3$



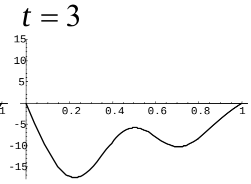
$t = 4$



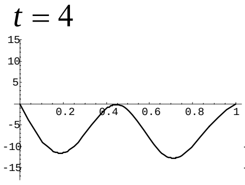
$t = 5$



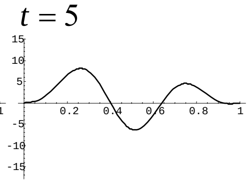
$t = 6$



$t = 7$

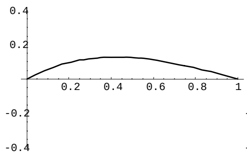


$t = 8$

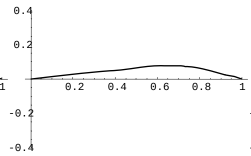


$t = 9$

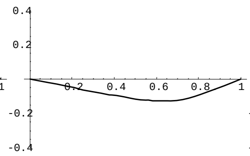
Приводятся графики функции $Q(x,t)$ при $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.



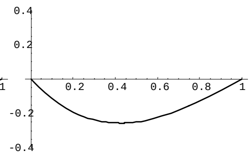
$t = 0$



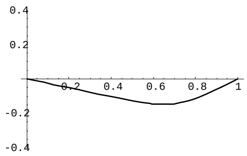
$t = 1$



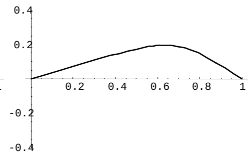
$t = 2$



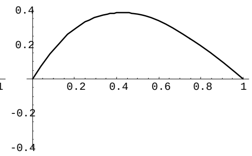
$t = 3$



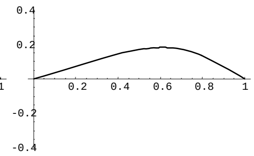
$t = 4$



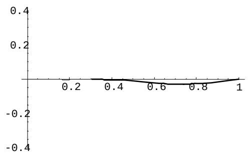
$t = 5$



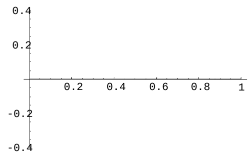
$t = 6$



$t = 7$



$t = 8$



$t = 9$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
2. Барсегян В.Р. Об оптимальном управлении колебаниями мембраны при фиксированных промежуточных состояниях. //Уч. записки ЕГУ. 1988. №1 (188). С. 24-29.
3. Барсегян В.Р. Оптимальное управление линейными системами при фиксированных промежуточных фазовых состояниях. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. №2. С. 56-62.
4. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
19.07.2006