

УДК 539.3: 537.228.1

ОБ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ
ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.

Ключевые слова: электроупругое поле, характеристики, особенность напряжений и электрической индукции.

Keywords: Electroelasticity field, characteristics, singularity of the stresses and electric induction.

Ա.Գ.Ավետիսյան, Գ.Գ.Ներսիսյան, Ա.Մ.Սարգսյան

Սեպի համար էլեկտրաառաձգականության տեսության մի խնդրում լարումների եզակիության մասին

Կառուցված է էլեկտրաառաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը բարակ պիեզաէլեկտրիկ սեպի համար, որի եզրերին տրված են զրոյական շոշոփող լարումներ և նորմալ տեղափոխությունների արժեքները: Սեպի եզրերին տրված են նաև էլեկտրական երեք հնարավոր պայմաններ: Հետազոտված է էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների (լարումներ, ինդուկցիայի վեկտորի բաղադրիչներ) վարքը սեպի գագաթի շրջակայքում: Ցույց է տրված, որ նշված մեխանիկական եզրային պայմանների դեպքում էլեկտրաառաձգական դաշտի բնութագրիչների վարքի վրա էլեկտրական եզրային պայմանների ազդեցությունը աննշան է:

A.G.Avetisyan, G.G.Nersisyan, A.M.Sargsyan

On Singularities of Stresses in One Problem of Electroelasticity Theory for a Wedge

The solution of a plane problem of electroelasticity for a thin piezoelectric wedge is built. On the bounds of the wedge the zero tangential stresses and the normal displacement values are given. On the bounds of the wedge three possible electric conditions are also given. The behaviour of electroelastic field characteristics (stresses, components of electric induction vector) in the visiting of the wedge top is studied. It is shown that at the noted mechanical boundary conditions the influence of electrical boundary conditions on the electroelastic characteristics (stresses, components of electric induction vector) is insignificant.

Построено решение плоской задачи электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина. На гранях клина заданы нулевые касательные напряжения и значения нормальных перемещений. На гранях клина заданы также три возможных электрических условия.

Исследуется поведение характеристик электроупругого поля (напряжения, компоненты вектора электрической индукции) в окрестности вершины клина.

Показано, что при этих механических граничных условиях влияние электрических граничных условий на поведение характеристик электроупругого поля незначительно.

Поведение характеристик электроупругого поля (напряжений и компоненты вектора электрической индукции) в окрестности вершины тонкого пьезоэлектрического клина, на гранях которого заданы разнообразные электромеханические условия, исследовано в ряде работ последних лет [1-5]. Выявлено влияние некоторых электромеханических граничных условий на характер распределения напряжений и электрической индукции вблизи вершины клина.

В данной работе эти вопросы исследуются для случая, когда на гранях клина осуществляется условие соприкосновения с жестким штампом без трения (граничные условия гладкого контакта). Такая постановка задачи имеет определенный интерес еще и в том смысле, что исследование решений этой задачи в упругой постановке имеет ряд упущений [6-8]. Попытка заполнить этот пробел была предпринята в работе [9].

Рассмотрим краевую задачу электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина ($0 \leq r < \infty, 0 < \theta \leq \theta_1$), на гранях которого заданы механические условия гладкого контакта

$$\begin{aligned} u_0(r, 0) = u_0(r), \quad \tau_{r\theta}(r, 0) = 0, \\ u_0(r, \theta_1) = u_1(r), \quad \tau_{r\theta}(r, \theta_1) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и электрические условия, записанные в одном из видов

$$V(r, 0) = V_0(r), \quad V(r, \theta_1) = V_1(r), \quad (2.1)$$

$$D_0(r, 0) = D_0(r), \quad D_0(r, \theta_1) = D_1(r), \quad (2.2)$$

$$V(r, 0) = V_0(r), \quad D_0(r, \theta_1) = D_1(r). \quad (2.3)$$

В условиях (2.1) – (2.3) $V(r, \theta)$ – потенциал электрического поля, $D_0(r, \theta)$ – компонент вектора электрической индукции в направлении θ .

Предполагается, что пьезоэлектрический клин в каждой точке имеет плоскость материальной симметрии, параллельную его срединной плоскости.

Как и в работах [1-4], представляя общее решение уравнений электроупругости для тонкого пьезоклина

$$4\pi L_4 \varphi(x, y) - L_3 \psi(x, y) = 0, \quad L_3 \varphi(x, y) + L_2 \psi(x, y) = 0, \quad (3)$$

где

$$L_2 = \eta_{22} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\eta_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \eta_{11} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_3 = -g_{22} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (g_{12} + g_{26}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (g_{21} + g_{16}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + g_{11} \frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$L_4 = s_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2s_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2s_{12} + s_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2s_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + s_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

(s_{22}, \dots – коэффициенты упругости при постоянной электрической индукции, η_{22}, \dots – коэффициенты диэлектрической восприимчивости при постоянных механических напряжениях, g_{22}, \dots – пьезоэлектрические модули) в виде

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j \varphi_j(x + \mu_j y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j \varphi_j(z_j), \quad (4)$$

$$\psi(x, y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j \varphi_j'(x + \mu_j y) = \sum_{j=1}^6 \gamma_j f_j \varphi_j'(z_j)$$

и учитывая уравнения состояния, условие потенциальности электрического поля и соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_x = \partial^2 \varphi / \partial y^2, \quad \sigma_y = \partial^2 \varphi / \partial x^2, \quad \tau_{xy} = -\partial^2 \varphi / \partial x \partial y, \\ D_x = \partial \psi / \partial y, \quad D_y = -\partial \psi / \partial x \end{aligned} \quad (5)$$

в полярной системе координат имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r = \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j), \quad \sigma_\theta = \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) \varphi_j''(z_j), \\ \tau_{r\theta} = -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) \varphi_j''(z_j), \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) \varphi_j''(z_j), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) \phi_j''(z_j), & \frac{\partial V}{\partial r} &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) m_j \phi_j''(z_j), \\ D_\theta &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j \phi_j''(z_j), & D_r &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j \phi_j''(z_j),\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}a_j(\theta) &= \cos \theta + \mu_j \sin \theta, & b_j(\theta) &= -\sin \theta + \mu_j \cos \theta, \\ M_j &= s_{11} \mu_j^2 - s_{16} \mu_j + s_{12} - f_j (g_{11} \mu_j - g_{21}) / 4\pi, \\ N_j &= s_{12} \mu_j - s_{26} + s_{22} \mu_j^{-1} - f_j (g_{12} - g_{22} \mu_j^{-1}) / 4\pi, \\ m_j &= g_{11} \mu_j^2 - g_{16} \mu_j + g_{12} + f_j (\eta_{11} \mu_j - \eta_{12}), \\ c_j(\theta) &= M_j \cos \theta + N_j \sin \theta, & d_j(\theta) &= N_j \cos \theta - M_j \sin \theta,\end{aligned}$$

D_x и D_y – компоненты вектора электрической индукции в направлениях x и y .

μ_j – неравные между собой корни алгебраического уравнения шестого порядка

$$\begin{aligned}4\pi l_4(\mu) l_2(\mu) + l_3^2(\mu) &= 0, \\ \mu_j &= \sigma_j + i\nu_j, & f_j &= -l_3(\mu_j) / l_2(\mu_j) \quad (j=1, 2, \dots, 6), \\ \mu_4 &= \bar{\mu}_1, \quad \mu_5 = \bar{\mu}_2, \quad \mu_6 = \bar{\mu}_3; & \nu_1 &> 0, \quad \nu_2 > 0, \quad \nu_3 > 0, \\ \gamma_j &= \begin{cases} 1, & (j=1, 2, 4, 5) \\ l_3(\mu_j) / 4\pi l_4(\mu_j) & (j=3, 6). \end{cases}\end{aligned}\quad (7)$$

Полиномы $l_k(\mu)$ ($k=2, 3, 4$) получаются из L_k заменой $\partial^k / \partial x^k$ на единицу, а $\partial^k / \partial y^k$ – на μ^k .

Принимается, что корни уравнения (7) не являются одновременно корнями уравнений $l_k(\mu) = 0$ ($k=2, 3, 4$).

Для решения краевых задач (1)–(5) используется обобщенное интегральное преобразование Меллина аналитической функции $f(z) = f(x + \mu y)$ (μ – некоторая комплексная константа), впервые, по-видимому, введенное в работах [10, 11]

$$\begin{aligned}\langle f(z) \rangle &= \int_0^\infty f(z) r^{s-1} dr = a^{-s}(\theta) \bar{f}(s), \\ a(\theta) &= \cos \theta + \mu \sin \theta, \quad \bar{f}(s) = \int_0^\infty f(z) z^{s-1} dz, \\ f(z) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \langle f(z) \rangle r^{-s} ds.\end{aligned}\quad (8)$$

Если $f(z)$ аналитична в некотором секторе $\theta_0 < \theta < \theta_*$, $0 < r \leq \infty$ и $f(z) = O(r^\xi)$ при $r \rightarrow 0$, $f(z) = O(r^\eta)$ при $r \rightarrow \infty$, то $\bar{f}(s)$ существует в полосе $-\xi < c < -\eta$ и не зависит от θ в заданном секторе.

Будем искать решение (1)–(6), удовлетворяющее следующим условиям: $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, D_r, D_\theta, \partial u_r / \partial r$ и $\partial u_\theta / \partial r$ при $r \rightarrow 0$ имеют порядок $O(r^{-1+\alpha})$, а при $r \rightarrow \infty$ исчезают как $O(r^{-1-\beta})$, где $\alpha > 0, \beta \geq 0$. Тогда в полосе $1 - \alpha < \text{Re } s < 1 + \beta$ существует преобразование Меллина.

Применяя обобщенное интегральное преобразование Меллина к выражениям (6), получим

$$\begin{aligned} \langle \sigma_r \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \langle \sigma_\theta \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j^2(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), \\ \langle \tau_{r\theta} \rangle &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) b_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) c_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), \\ \left\langle \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) d_j(\theta) a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \left\langle \frac{\partial V}{\partial r} \right\rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) m_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), \\ \langle D_\theta \rangle &= -\sum_{j=1}^6 \gamma_j a_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), & \langle D_r \rangle &= \sum_{j=1}^6 \gamma_j b_j(\theta) f_j a_j^{-s}(\theta) \bar{\varphi}_j(s), \end{aligned}$$

$$\bar{\varphi}_j(s) = \int_0^\infty \varphi_j''(z_j) z_j^{s-1} dz_j. \quad (9)$$

Продифференцировав первое и третье условия из (1) и (2.1) по r и применив к граничным условиям (2)–(2.1), (2)–(2.2), (2)–(2.3) преобразование Меллина (предполагается, что функции $V_0(r), V_1(r), D_0(r)$ и $D_1(r)$ удовлетворяют требованиям преобразования Меллина), в каждом конкретном случае получим систему алгебраических уравнений относительно $\bar{\varphi}_j(s)$

$$\sum_{j=1}^6 B_{lj} \bar{\varphi}_j(s) = T_l(s), \quad (l = 1, 2, \dots, 6), \quad (10)$$

где под $T_l(s)$ подразумеваются преобразования соответствующих граничных условий.

В случае граничных условий (1), (2.1) имеем

$$T_{l1}^* = \left\| \left\langle \frac{du_0(r)}{dr} \right\rangle, 0, \langle \sigma_1(r) \rangle, 0, \left\langle \frac{dV_0(r)}{dr} \right\rangle, \left\langle \frac{dV_1(r)}{dr} \right\rangle \right\|$$

Здесь звездочка означает транспонирование.

Матрица коэффициентов B_{lj} в данном случае имеет вид:

$$\left\| \begin{array}{cccccc} M_1 & M_2 & M_4 & M_5 & \gamma_3 M_3 & \gamma_6 M_6 \\ N_1 & N_2 & N_4 & N_5 & \gamma_3 N_3 & \gamma_6 N_6 \\ a_1^{2-s} & a_2^{2-s} & a_4^{2-s} & a_5^{2-s} & \gamma_3 a_3^{2-s} & \gamma_6 a_6^{2-s} \\ b_1 a_1^{1-s} & b_2 a_2^{1-s} & b_4 a_4^{1-s} & b_5 a_5^{1-s} & \gamma_3 b_3^{2-s} & \gamma_6 b_6^{2-s} \\ m_1 & m_2 & m_4 & m_5 & m_{33} & m_{66} \\ m_1 a_1^{1-s} & m_2 a_2^{1-s} & m_4 a_4^{1-s} & m_5 a_5^{1-s} & m_{33} a_3^{1-s} & m_{66} a_6^{1-s} \end{array} \right\| \quad (11)$$

где

$$a_j = a_j(\theta_1), \quad b_j = b_j(\theta_1), \quad c_j = c_j(\theta_1), \quad d_j = d_j(\theta_1),$$

где N_k – кратность полюсов s_k , а $G_{krn}(\theta), \dots, H_{krn}(\theta)$ – гладкие функции угла θ , причем $\operatorname{Re} s_k < 1$ ($\operatorname{Re} s_1 > \operatorname{Re} s_2 > \dots$).

Если внешние воздействия равны нулю в некоторой окрестности вершины клина, то в области $\operatorname{Re} s < 1$ нет полюсов $T_l(s)$ и все полюсы s_k находятся среди нулей $\Delta(s)$. Следовательно, сингулярные члены в (14) определяются только нулями $\Delta(s)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Причем максимальная степень сингулярности напряжений равна действительной части s_k , ближайшего к прямой $\operatorname{Re} s = 1$. Если $\Delta(s)$ имеет нули только первого порядка, то в выражениях (13) отсутствуют множители $\ln r$.

Заметим, что при отсутствии пьезоэффекта $g_{ij} = 0$ каждая из рассматриваемых задач распадается на две независимые задачи: упругую задачу для анизотропного клина $L_4\varphi(x, y) = 0$ с граничными условиями (5) и электростатическую задачу $L_2\psi(x, y) = 0$ с одним из граничных условий (5.1)–(5.4).

При этом вместо (2) и (3) будем иметь

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2) + \varphi_4(z_4) + \varphi_5(z_5), \quad (2')$$

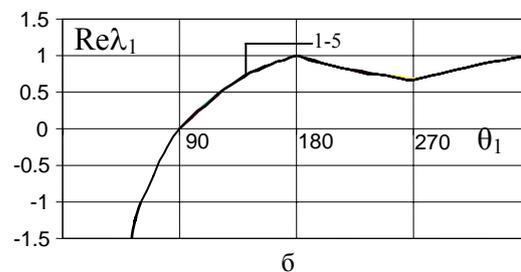
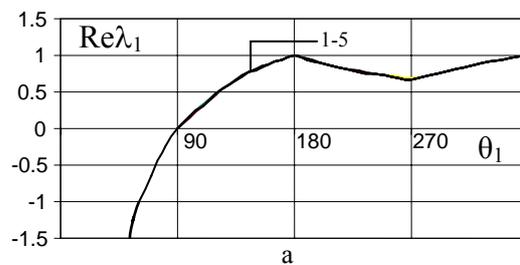
$$\psi(x, y) = \varphi_3(z_3) + \varphi_6(z_6),$$

$$l_4(\mu)l_2(\mu) = 0, \quad (3')$$

а матрица (11) становится ступенчатой с диагональными клетками A_4 и A_2

$$\begin{vmatrix} A_4 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix}$$

где A_4 – матрица четвертого порядка, A_2 – второго порядка. Корни $l_4(\mu) = 0$



Фиг.1

зависят только от упругих коэффициентов, а корни $l_2(\mu) = 0$ – только от коэффициентов диэлектрической восприимчивости.

Некоторые результаты численного исследования зависимости $Re s_1$ от угла раствора клина, изготовленного из бифталата калия или бифталата рубидия, представлены в виде кривых на фиг. 1а и 1б, соответственно (номера кривых соответствуют номерам граничных условий (2)). Там же, для сравнения, приведены соответствующие кривые для упругого изотропного (кривая 4) и анизотропного (кривая 5) клиньев.

Как следует из приведенных кривых, особенности напряжений, возникающие в задачах электроупругости и упругости для клина при граничных условиях гладкого контакта, почти полностью совпадают, т.е. электрические граничные условия (2.1)–(2.3) в данном случае не влияют на поведение характеристик электроупругого поля, что было обнаружено также в работе [12]. Между тем, в работах [1–4], где на гранях клина были заданы или напряжения, или перемещения, обнаружено, что при смешанных электрических граничных условиях такое влияние существенно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саргсян А.М. Поведение связанного электроупругого поля в окрестности угловой точки пьезоэлектрического клина при обобщенном плоском напряженном состоянии. // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С. 34-39.
2. Саргсян А.М. Особенность связанного электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Сб. научных трудов конференции, посвященной 91-летию со дня рождения профессоров Т.Т.Хачатряна и О.М.Сапонджяна, состоявшейся 23-24 октября 1998г. в г.Ереване. С. 169-175.
3. Саргсян А.М. Об особенностях связанного плоского электроупругого поля в угловой точке пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С. 36-41.
4. Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. Влияние типа граничных условий на поведение напряжений в окрестности угловой точки тонкого пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении, Механика. 2005. Т.58. №3. С.74-81.
5. Саргсян А.М. О решении краевых задач электроупругости для клиновидных областей. // Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №2. С.153-160.
6. Каландия А.И. Замечания об особенностях упругих решений вблизи углов. // ПММ. 1969. Т. 33. №1. С. 132-135.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312с.
8. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
9. Саргсян А.М. Об особенностях напряжений в одной задаче теории упругости для клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т. 61. №1. С.48–53.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
11. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин. // ПМ. 1975. №5. С. 45-53.
12. Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М. О решении четырех краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №3. С.27-33.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.04.2007