

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЬНОГО  
СДВИГА СОСТАВНОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА В ОКРЕСТНОСТЯХ  
УГЛОВЫХ ТОЧЕК

Агаларян О. Б.

**Ключевые слова:** нелинейное упругое тело, упрочнение, составной материал.  
**Key words:** non-linear elastic body, strengthening, compaund material.

Հ. Բ. Աղալարյան

Երկայնական սահքի խնդրի լուծման ասիմպտոտիկ վարքը՝ ոչ գծային առաձգական բաղադրյալ  
մարմինների անկյունային կետի շրջակայքում

Դիտարկվում է կամայական անկյունային մեծությամբ երկու սեպերից կազմված, ոչ գծային աստիճանային օրենքով ամրապնդվող, առաձգական բաղադրյալ սեպի լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը՝ երկայնական սահքի խնդրում, երբ ընդհանուր կողի վրա տրված են լրիվ կոնտակտի պայմանները: Հոդոգրաֆի մեթոդի կիրառմամբ արտածված են լարումների և տեղափոխությունների դաշտերի արտահայտությունները անվերջ գումարների տեսքերով: Ստացված տրանսցենդենտ հավասարման համակարգի արմատը, որոշակի ինտերվալում, որոշում է միացման գազաթի շրջակայքում լարումների վարքը և թերլարվածության երևույթը բնութագրող սահմանային կորի հավասարումը, որից մասնավոր դեպքում ստացվում է գծային առաձգականության հայտնի արդյունքները:

O.B. Agalaryan

**Asymptotic behaviour of the solution of problem of longitudinal shear of compaund nonlinear elastic body  
at the neighbourhood of angular points**

The asymptotic behavior of stressed state near wedge-shaped prominent or entering edge of surface is investigated at the outside compound nonlinear elastic body which is located in anti-plane condition under the action of external tangential loads applied on certain distance from the apex of junction. To the investigation of similar questions for plane problems, as well as the problem of torsion and longitudinal shear are dedicated [1-8].

Рассматривается асимптотическое поведение напряжённого состояния около клиновидного выступающего или входящего края поверхности в нагружённом составном нелинейном упругом теле, которое находится в антиплоском состоянии под действием внешних касательных нагрузок, приложенных на некотором расстоянии от вершины соединения.

Исследованию подобных вопросов для плоской задачи, а также задачи кручения и продольного сдвига посвящены [1-8].

1. Пусть составное клиновидное тело, изготовленное из двух различных нелинейно-упругих материалов, находится в состоянии антиплоской деформации под действием заданных внешних касательных нагрузок (фиг. 1-а). Требуется определить поля напряжений и деформаций в конечной области, содержащей внутри угловую точку, и вывести асимптотику этих полей в окрестности вершины соединения. Выберем декартовую координатную систему  $\{X, Y, Z\}$ , начало которой находится в угловой точке, а ось  $\{O, Z\}$  направлена перпендикулярно к указанной плоскости. Тогда, по определению продольного сдвига, единственным неравным нулю компонентом перемещения будет  $u_z^{(i)} = w_1(x, y)$ , где  $(i = 1, 2)$ , соответственно, для первого и второго тела. Следовательно, все компоненты деформации тождественно равны нулю кроме продольных сдвигов  $\gamma_{xz}^{(i)}, \gamma_{yz}^{(i)}$ . Следуя деформационной теории

пластичности, зависимость между напряжением и деформацией в общем случае принимается в виде

$$\tau_{xz} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \frac{T(\Gamma)}{\Gamma} \gamma_{yz}. \quad (1.1)$$

Остальные компоненты напряжения равны нулю в связи с отсутствием соответствующих компонентов деформации. Здесь  $T$  является интенсивностью касательных напряжений, а  $\Gamma$  – интенсивностью деформации сдвигов. В данном случае эти величины имеют вид:

$$T = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}, \quad \Gamma = \sqrt{\gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2}. \quad (1.2)$$

В случае антиплоской деформации из общих уравнений равновесия и совместности остаются одно уравнение равновесия и одно уравнение совместности, то есть:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) и (1.3) составляют нелинейную задачу в каждой области  $\Omega_i$  ( $i=1,2$ ), которые должны быть решены с учетом следующих граничных условий:

$$\begin{cases} \tau_{nz}^{(1)}(x, y) = 0 & \text{на } OA \\ \tau_{nz}^{(2)}(x, y) = 0 & \text{на } OB \end{cases} \quad (1.4)$$

На общей стороне  $OC$  должны выполняться условия непрерывности составляющих напряжений и перемещений

$$\begin{cases} w^{(1)}(x, 0) = w^{(2)}(x, 0) \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = \tau_{yz}^{(2)}(x, 0) \end{cases}. \quad (1.5)$$

При полном построении решения в окрестности вершины соединения необходимо также удовлетворить граничным условиям на линиях  $AC$  и  $BC$ , которые можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \tau_{nz}^{(1)}(x, y) = f_1(x, y) & \text{на } AC \\ \tau_{nz}^{(2)}(x, y) = f_2(x, y) & \text{на } BC \end{cases}, \quad (1.6)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – известные функции, удовлетворяющие условиям равновесия как следствие отсутствия внешних нагрузок.

Нелинейные уравнения задач продольного сдвига можно привести к линейным уравнениям, если координаты  $x, y$  рассмотреть как функции от деформации или, что эквивалентно, от напряжений, то есть

$$\begin{cases} x = x(\gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ y = y(\gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x(\tau_{xz}, \tau_{yz}) \\ y = y(\tau_{xz}, \tau_{yz}) \end{cases}. \quad (1.7)$$

Такое предположение справедливо, если компоненты деформаций являются однозначными функциями координат в рассматриваемых областях. При асимптотическом исследовании, не нарушая общности задач, можно предположить, что в окрестности вершины соединения существует область, где такое соответствие имеет место.

Тогда уравнения (1.3), с учётом (1.1), переходят в следующее, эквивалентное им, уравнение на плоскости  $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$  [5, 9] для неизвестных функций  $\Psi^{(i)}(\gamma_{xz}, \gamma_{yz})$ :

$$\frac{T(\gamma)}{\gamma T'(\gamma)} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \gamma} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad (1.8)$$

где  $\{\gamma, \vartheta\}$  – полярная координатная система на плоскости  $\{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$

$$\gamma_{xz} = \gamma \cos \vartheta, \quad \gamma_{yz} = -\gamma \sin \vartheta.$$

Здесь  $\vartheta$  отсчитывается от оси  $\{0, \gamma_{yz}\}$  в направлении против часовой стрелки, отметим, что  $\Gamma = \gamma$ . При этом  $x$  и  $y$  в каждой области  $\Omega_i$  определяются через функцию  $\Psi^{(i)}$  следующими формулами:

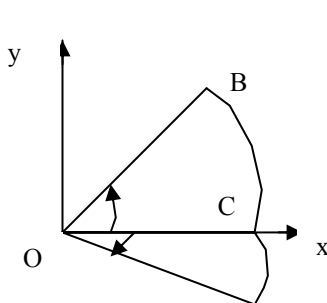
$$\begin{cases} x = -\sin \vartheta \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \gamma} - \frac{\cos \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \vartheta}, \\ y = \cos \vartheta \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \gamma} - \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial \vartheta}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Теперь выясним, для какой области и при каких краевых условиях необходимо решить уравнение (1.8). С этой целью отметим, что в работе [6] на основе линейной теории упругости для задачи кручения призматических составных стержней, поперечное сечение которых представляет собой область, показанная на фиг. 1-а, получено, что на плоскости  $(\alpha, \beta)$  существуют три типа областей: первая соответствует тому случаю, когда напряжения около рассматриваемой угловой точки обращаются в нуль независимо от отношения модулей сдвига составляющих материалов; во второй области напряжения всегда имеют особенность, а в третьей

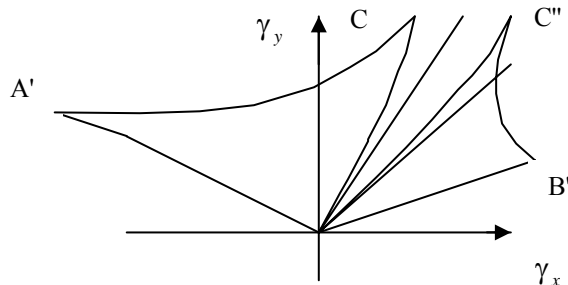
области каждому значению отношения  $k_1 = \frac{G_1}{G_2}$  соответствует предельная кривая

$$(1 + k_1) \sin(\alpha + \beta) + (1 - k_1) \sin(\alpha - \beta) = 0,$$

отделяющая зону малонапряжённости от зоны концентрации напряжения. При рассмотрении нелинейных тел предполагается, что указанные три типа областей не изменяются, а после построения решения нелинейной задачи доказывается справедливость этого предположения.



Фиг.1а А



Фиг.1б

Пусть точка  $\{\alpha, \beta\}$  принадлежит к области первого типа,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , при этом грани  $OA$  и  $OB$  отображаются на  $OA'$  и  $OB'$ , а луч  $OC$  разбивается на две кривые:  $OC'$  и  $OC''$ . Обозначим уравнение кривой  $OC'$  через  $\varphi_1(\gamma_{xz})$ , а  $OC''$  – через  $\varphi_2(\gamma_{xz})$ , которые можем представить в виде следующих степенных рядов в окрестности точки  $O'$ :

$$\varphi_1(\gamma_{xz}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_{xz}^n, \quad \varphi_2(\gamma_{xz}) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \gamma_{xz}^n. \quad (1.10)$$

С учетом условий (1.5) нетрудно убедиться, что между коэффициентами  $a_1$  и  $b_1$  справедливо следующее соотношение:

$$a_1(1+a_1^2)^{\frac{\nu-1}{2}} = \frac{B_2}{B_1} b_1(1+b_1^2)^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (1.11)$$

Заменим линии  $OC'$  и  $OC''$  касательными, проведенными в точке  $O$  и обозначим составленные углы с осью  $\{O\gamma_{xz}\}$ , соответственно,  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , тогда будем иметь:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \arctg a_1 \\ \beta_1 = \arctg b_1 \end{cases}. \quad (1.12)$$

Как известно, от этого характер распределения напряжений в малой окрестности угловой точки не изменится. С учетом этого, окончательно получим, что в области  $\Omega_1'$  необходимо решить уравнение (1.8) для неизвестной функции  $\Psi_1(\gamma, \vartheta)$  со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_1(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha \\ \cos \vartheta \frac{\partial \Psi_1(\gamma, \vartheta)}{\partial \gamma} - \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi_1(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = -\frac{\pi}{2} + \alpha_1 \end{cases} \quad (1.13)$$

а в области  $\Omega_2'$  – уравнение (1.8) для функции  $\Psi_2(\gamma, \vartheta)$  со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi_2(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = -\frac{\pi}{2} + \beta \\ \cos \vartheta \frac{\partial \Psi_2(\gamma, \vartheta)}{\partial \gamma} - \frac{\sin \vartheta}{\gamma} \frac{\partial \Psi_2(\gamma, \vartheta)}{\partial \vartheta} = 0 & \vartheta = -\frac{\pi}{2} + \beta_1 \end{cases}. \quad (1.14)$$

Решения этих краевых задач при помощи метода разделения переменных записываются в виде

$$\Psi_i(\gamma, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{m_k^{(i)}} \left[ A_k^{(i)} \cos(\lambda_k^{(i)} \vartheta) + B_k^{(i)} \sin(\lambda_k^{(i)} \vartheta) \right], \quad (1.15)$$

где  $\lambda_k^{(1)}$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sin \lambda_k^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right); & -\cos \lambda_k^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \\ \left( m_k^{(1)} + \lambda_k^{(1)} \right) \cos \left( 1 - \lambda_k^{(1)} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) + m_k - \lambda_k^{(1)}; & \left( m_k^{(1)} + \lambda_k^{(1)} \right) \sin \left( 1 - \lambda_k^{(1)} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.16)$$

а  $\Delta_1$  является главным определителем системы относительно неизвестных постоянных  $A_k^{(1)}, B_k^{(1)}$ , полученных из граничных условий (1.13), а из граничных условий (1.14) следует, что  $\lambda_k^{(2)}$  удовлетворяет уравнению:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin \lambda_k^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) & \cos \lambda_k^{(2)} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \\ \left( m_k^{(2)} + \lambda_k^{(2)} \right) \cos \left( 1 - \lambda_k^{(2)} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) + \left( m_k^{(2)} - \lambda_k^{(2)} \right) \cos \left( 1 + \lambda_k^{(2)} \right) \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) & \left( m_k^{(2)} + \lambda_k^{(2)} \right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{где} \quad m_k^{(i)} = \frac{1 - \nu + \sqrt{(1 + \nu)^2 + 4\nu\lambda_k^{(i)2}}}{2}. \quad (1.17)$$

На основании формул (1.1) и (1.9) заключаем, что асимптотический характер компонентов напряжения определяется наименьшим значением  $\lambda = \min \left\{ \lambda_k^{(i)} \right\}$ .

Присоединения к уравнениям  $\Delta_1 = 0$  и  $\Delta_2 = 0$  условия (1.11), получим для трёх неизвестных величин  $\{\lambda, a_1, b_1\}$  следующую систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} \lambda \sin \lambda (\pi - \alpha - \arctg a_1) + m a_1 \cos \lambda (\pi - \alpha - \arctg a_1) = 0 \\ \lambda \sin \lambda (\arctg b_1 - \beta) - m b_1 \cos \lambda (\arctg b_1 - \beta) = 0 \\ a_1 (1 + a_1^2)^{\frac{\nu-1}{2}} = \frac{B_2}{B_1} (1 + b_1^2)^{\frac{\nu-1}{2}} b_1 \end{cases}, \quad (1.18)$$

$$\text{где} \quad m = \frac{1}{2} \left( 1 - \nu + \sqrt{(1 - \nu)^2 + 4\nu\lambda^2} \right).$$

По данным значениям параметров  $\{B_1, B_2, \nu\}$  из системы (1.18) можем определить  $\lambda$ , а потом и величину показателя особенности напряжения  $\{n_1\}$  по

$$\text{формуле} \quad n_1 = \frac{\nu}{\lambda - 1}. \quad \text{При построении этого решения предполагалось, что } \lambda$$

является вещественной величиной. Как показывают дальнейшие исследования, при помощи предельного перехода, из полученных решений получаются результаты линейной теории упругости, а это означает, что принятое предположение является справедливым для любого значения  $\nu$ .

Пусть при фиксированном значении угла  $\beta$   $\alpha$  начинает увеличиваться, принимая значение больше  $\frac{\pi}{2}$   $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$ . Тогда с учетом того, что при построении отображения луч  $OA'$  не изменяет своего положения, а луч  $OC'$  поворачивается вокруг начала координат по направлению часовой стрелки, пересекая ось  $\{O\gamma_{xz}\}$  и исходя из непрерывного характера отображения и следующих неравенств  $(\beta < \beta' < \alpha' < \alpha)$ , приходим к выводу о существовании такого значения  $\alpha$ , при котором области  $\Omega'_1$  и  $\Omega'_2$  одновременно переходят в отрезки. А это означает, что компоненты напряжения принимают отличные от нуля значения, т. е. точка  $\{\alpha, \beta\}$  лежит на предельной кривой. Теперь определим уравнение этой кривой. С этой целью сначала покажем, что из системы уравнений (1.18) можно получить уравнение предельной кривой для линейной теории упругости. В этом случае ( $\nu = 1, \lambda = m, B_1 = G_1, B_2 = G_2$ ) и из первых двух уравнений получим:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\lambda(\pi - \alpha - \operatorname{arctg}a_1) = -a_1 \\ \operatorname{tg}\lambda(\operatorname{arctg}b_1 - \beta) = b_1 \end{cases}$$

Решая систему (1.18) относительно  $a_1$  и  $b_1$ , будем иметь:

$$a_1 = -\operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\alpha\right); \quad b_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\beta\right).$$

Подставляя эти значения в третье уравнение системы (1.18), после некоторых преобразований получим следующее уравнение относительно  $\{\lambda\}$ :

$$(1 + k_1)\sin\frac{\lambda}{\lambda-1}(\alpha + \beta) + (k_1 - 1)\sin\frac{\lambda}{\lambda-1}(\alpha - \beta) = 0, \quad (1.19)$$

которое при обозначении  $\frac{\lambda}{\lambda-1} = s$  полностью совпадает с уравнением, полученным в [6]. По данным значениям  $k_1$  можем определить  $\lambda$ , а затем и

показатель напряжения по формуле  $n_1 = \frac{1}{\lambda-1}$ , откуда следует, что напряжения

принимают конечные значения, т. е.  $n_1 \rightarrow 0$ , если  $\lambda \rightarrow \infty$ . Сделав этот формальный предельный переход, получим уравнение предельной кривой для линейной теории упругости. Теперь рассмотрим нелинейный случай. Тогда из (1.17) следует:

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}a_1 + \frac{1}{\lambda}\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{ma_1}{\lambda}\right) = \pi - \alpha, \\ \operatorname{arctg}b_1 - \frac{1}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{mb_1}{\lambda} = \beta. \end{cases} \quad (1.20)$$

Переходя здесь к пределу при  $\lambda \rightarrow \infty$  и решив систему (с учетом правомерности предельного перехода), найдём

$$a_1 = -\operatorname{tg}\alpha, \quad b_1 = \operatorname{tg}\beta \quad (1.21)$$

Подставляя эти значения в третье уравнение, после некоторых преобразований получим уравнение предельной кривой для нелинейной задачи:

$$\left[ B_1 |\cos \alpha|^{1-\nu} + B_2 |\cos \beta|^{1-\nu} \right] \sin(\alpha + \beta) + \left[ B_1 |\cos \alpha|^{1-\nu} - B_2 |\cos \beta|^{1-\nu} \right] \sin(\alpha - \beta) = 0 \quad (1.22)$$

которое при  $\nu = 1$  переходит в соответствующее уравнение линейной задачи. Очевидно, что область второго типа также не изменяется. При увеличении  $\nu$  предельная кривая продвигается в направлении начала координат, это означает, что если для линейного тела напряжения стремятся к нулю, то при переходе к нелинейному, напряжения могут принимать только конечные или бесконечные значения.

На основании формул (1.9) и (1.15) для неизвестных компонентов напряжений и перемещений нетрудно получить асимптотические формулы в окрестности угловой точки, обобщающие известные формулы в линейной теории упругости. В частности, для первого клина в полярной координатной системе  $(r, \varphi)$  эти выражения имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} W^{(1)}(r, \varphi) = K_1 \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{m_1}{m_1-1}} \left[ m_1^2 \cos^2 \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) + \right. \\ \left. + \lambda^2 \sin^2 \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) \right]^{\frac{m_1}{2(m_1-1)}} (1 - m_1) \cos \lambda (\chi_1 - \varphi); \\ \tau_{\varphi z}^{(1)}(r, \varphi) = B_1 \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{\nu}{m_1-1}} \left[ m_1^2 \cos^2 \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) + \right. \\ \left. + \lambda^2 \sin^2 \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) \right]^{\frac{\nu}{2(1-m_1)}} \cos \lambda (\varphi - \chi_1); \\ \tau_{rz}^{(1)}(r, \varphi) = B_1 \left( \frac{r}{K_1} \right)^{\frac{\nu}{m_1-1}} \left[ m_1^2 \cos^2 \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) + \right. \\ \left. + \lambda^2 \sin^2 \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) \right]^{\frac{\nu}{2(1-m_1)}} \sin \lambda (\varphi - \chi_1); \end{array} \right. \quad (1.23)$$

где угол  $\chi_1$  определяется из следующего уравнения:

$$\lambda \sin(\varphi - \chi_1) \sin \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) - m_1 \cos \lambda \left( \chi_1 + \alpha - \frac{\pi}{2} + \vartheta_1 \right) \cos(\varphi - \chi_1) = 0 \quad (1.24)$$

$$\text{при } -\alpha < \varphi < 0 \quad -\frac{\pi}{2} + \alpha_1^* < \chi_1 < \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Нетрудно убедиться, что система трансцендентных уравнений имеет бесконечное множество собственных значений и соответствующие им собственные функции, которые образуют ортогональную систему. Поэтому, составляя суммы этих выражений по  $\lambda_i$ , тем самым, получаем решение краевой задачи в области, содержащей начало координат.

Нужно ещё удовлетворить условиям (1.6). С этой целью достаточно потребовать разложимость функций  $f_1(r)$  и  $f_2(r)$  в ряд по собственным функциям и найти коэффициенты разложения. При этом, из этих выражений при помощи предельного перехода выводятся результаты линейной теории упругости. В [7] исследуется лишь характер, то есть показатель особенности напряжений, поэтому вышесказанные результаты по этой статье не выводятся и, в частности, не получаются асимптотические формулы типа формул (1.23).

Таким образом, если точка  $\{\alpha, \beta\}$  и начало координат расположены по разные стороны от предельной кривой, то образы  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  будут дополнениями к областям  $\Omega'_1, \Omega'_2$ .

Тогда уравнения  $\varphi_1(\gamma_{xz})$  и  $\varphi_2(\gamma_{xz})$  будут иметь вид:

$$\begin{cases} \varphi_1(\gamma_{xz}) = a_1 \gamma_{xz} + \varphi_{11}(\gamma_{xz}) \\ \varphi_2(\gamma_{xz}) = b_1 \gamma_{xz} + \varphi_{22}(\gamma_{xz}) \end{cases} \quad (1.25)$$

где  $\varphi_{11}(\gamma_{xz})$  и  $\varphi_{22}(\gamma_{xz})$  стремятся к нулю при  $\gamma_{xz} \rightarrow \infty$ . При помощи замены переменных  $\gamma_1 = \frac{1}{\gamma}$ ,  $\vartheta_1 = -\vartheta$ , области  $\Omega'_1$  и  $\Omega'_2$  переходят в области,

выходящие из начала координат и снова неизвестные функции находятся при помощи метода однородных решений. Аналогичные построения можно сделать так же, тогда точка  $\{\alpha, \beta\}$  принадлежит ко второму или третьему типу областей. При этом, для третьего типа области, сначала на основании нелинейной теории упругости необходимо решить задачу и построить соответствующую предельную кривую, а потом, определяя положение точки  $(\alpha, \beta)$  относительно этой кривой, построить указанные отображения. Отметим, что для всех этих случаев полученная система полностью совпадает с системой (1.16), в которой  $\alpha$  и  $\beta$  являются соответствующими углами растворов клиньев, а в выражении  $m$  перед радикалом надо поставить знак минус. Это дает возможность распространить метод годографа и для этих случаев, тем самым, исчерпая все возможные случаи, когда компоненты напряжения стремятся к нулю или бесконечно увеличиваются.

С целью применения полученных решений для определения поля напряжений и деформаций в составных телах, имеющих угловые вырезы или трещины, и подверженных упруго-пластическому кручению, отметим следующее: как в задаче кручения, так и в задаче антиплоского сдвига, имеется лишь один коэффициент интенсивности, и при малых пластических зонах поля в них асимптотически одинаковые. Это позволяет на основе полученных формул найти линию постоянной интенсивности касательных напряжений, то есть упруго-пластическую границу с точностью до постоянного множителя. Вне этой линии материал остается упругим, что делает целесообразным использование известных эффективных численных методов, в частности, методов граничных интегральных уравнений, для определения напряжённо-деформированного состояния в упругой области. Неизвестные множители  $K_i$  определяются из условий непрерывности решений на линии раздела.

В заключение отметим, что указанный способ решения упруго-пластических задач справедлив тогда, когда область пластической деформации мала по сравнению с упругой областью, то есть когда она локализована в окрестности угловой точки.



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.: Гостехиздат, 1947.
2. Математические основы теории разрушения. Т.2. М.: Мир, 1975.
3. Анин Б.Д., Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача. Новосибирск: Наука.Сибирское отделение. 1983.
4. Райс Дж. Напряжения, обусловленные острым вырезом в упрочняющемся материале при продольном сдвиге. // ПМ. №2. 1967.
5. Соколовский В.В. Концентрация касательных напряжений при нелинейном законе деформации. //Изв. АН СССР. Инженерный ж-л. 1962. Т.2. Вып.2. С.362–368.
6. Чобанян К.С. Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд.АН Арм.ССР, 1987.
7. Задоян М.А. Продольный сдвиг составного клина. //ДАН СССР. 1987. №2.
8. Агаларян О.Б. К задаче кручения осесимметричного упруго-пластического тела с трещиной. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1987. Т.31. №6. С.36–41.
9. Агаларян О.Б. Асимптотическое поведение решения задачи продольного сдвига нелинейного упругого тела в окрестности угловых точек. //Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №3. С.3–13.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию  
14.07.2006