ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №2, 2008 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: пластинка, свободный край, устойчивость.
Keywords: plate, free edges, stability.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Երկու եզրերով ազատ ուղղանկյան սալի կայունության մասին

Դիտարկվում է ուղղանկյան սալի կայունությունը, երբ երկու եզրերն ազատ հենված են, իսկ մյուս երկուսն՝ ազատ: Ուսումնասիրվում է կրիտիկական ճիգի կախվածությունը Պուասոնի գործակցից և կողմերի հարաբերությունից:

L.A. Movsisyan
About Stability of Rectangular Plate with Two Free Edges
The influence of coefficient of Poisson and ratio of sides on value of critical force is investigated.

Рассматривается устойчивость прямоугольной пластинки, две сжимающиеся стороны которой свободно оперты, а другие свободны. Изучается влияние коэффициента Пуассона и отношение сторон на значения критического усилия.

Поводом, по причине которого пишется настоящая заметка, является [1]. Как известно, из решения задачи устойчивости прямоугольных пластин со свободно опертыми краями как частный случай рассматривается вариант, когда сжатие стороны во много больше, чем остальные [2]. Тогда для критического усилия получается выражение

$$P_{\text{кр}}^{(1)} = \frac{Eh^3\pi^2}{12\left(1-\nu^2\right)a^2}. \tag{1}$$

При этом принимается, что форма потери устойчивости происходит по цилиндрической поверхности (цилиндрический изгиб).

Если сжатые стороны пластинки свободно оперты, а две другие свободны (здесь рассматривается только такой случай) и при этом длины первых во много меньше по сравнению со свободными краями, то естественно, пластинка будет работать как стержень (ширины 1) и критическое усилие есть

$$P_{\text{кр}}^{(2)} = \frac{Eh^3\pi^2}{12\ a^2}. \tag{2}$$

Заметим, что (2) получится и из (1) при $\nu = 0$. Очевидно, что уже для пластинки, стороны которой соразмерные, или ширина во много больше "длины", будем иметь критическое усилие $P_{\text{кр}}$

$$P_{\text{кр}}^{(2)} \le P_{\text{кр}} \le P_{\text{кр}}^{(1)}. \tag{3}$$

То, что при двух свободных краях не осуществляется цилиндрический изгиб, известно давно [3] (с.245-246). Подобное может произойти лишь только тогда, когда $\nu = 0$ (замечание вышеприведенное), или заданы нулевые краевые условия относительно нормальной производной от прогиба и перерезывающего усилия. Тем не менее, при расссмотрении задачи устойчивости для не полностью свободно опертых пластин принимается, что $P_{кр}$ должно быть больше, чем (1) (во всей знакомой мне литературе). Например, в [2] (с.290) читаем «Как мы видели, в предельном случае пластинки со свободными продольными сторонами критическое напряжение определяется формулой (88) ...». Формула (88) есть (1), написанная для напряжения. Но ведь (1) или (88) получена не для свободных продольных сторон.

В [1] считаю важным, что при наличии свободного края возможно значение критической силы меньше, чем (1).

В данной заметке рассматривается прямоугольная пластинка с двумя свободными сторонами. Целью является выяснить, как изменяется $P_{кр}$ в зависимости от коэффициента ν и отношений сторон пластинки.

Критическое усилие рассматриваемой пластинки определяется из уравнения

$$U_1V_2 - U_2V_1 = 0, \tag{4}$$

$$U_i = \left(s_i^2 - \nu\lambda^2\right)\operatorname{ch} 0.5 s_i \ , \ V_i = s_i\left[s_i^2 - (2-\nu)\lambda^2\right]\operatorname{sh} 0.5 s_i \,, \ i = 1,2,$$

$$s_1 = \lambda\left[1 + \sqrt{\delta\left(1-\nu^2\right)}\right]^{1/2} , \quad s_2 = \lambda\left[1 - \sqrt{\delta\left(1-\nu^2\right)}\right]^{1/2},$$

$$\lambda = \frac{\pi b}{a} \ , \quad \delta = \frac{P}{P_{кр}^{(2)}} \ , \quad 1 \le \delta \le \frac{1}{1-\nu^2} \ .$$

Форма потери устойчивости будет

$$w(x,y) = \left(\operatorname{ch} s_2 y - \frac{s_2^2 - \nu\lambda^2}{s_1^2 - \nu\lambda^2}\,\frac{\operatorname{ch}\,0.5 s_2}{\operatorname{ch}\,0.5 s_1}\operatorname{ch} s_1 y\right)\cos\frac{\pi x}{a}, \tag{5}$$

$$-0,5 \le x, y \le 0.5.$$

Вычисление первого корня (4) производилось для различных ν и λ:

$$\nu = 0; \quad 0,3\,; \quad 0,5.$$

$$\lambda = \frac{1}{50}\,,\ \frac{1}{20}\,,\frac{1}{10}\,,\ 1\,,\ 5\,,\ 10\,,\ 20\,,\ 50 \tag{6}$$

В табл. 1 приведены значения критических $\delta_{кр}$.

Таблица 1

ν \ λ	0.02	0.05	0.1	1	5	10	20	50
0.3	1	1	1	1.01	1.063	1.079	1.088	1.092
0.5	1	1	1	1.025	1.182	1.239	1.267	1.276

Заметим, что независимо от ширины пластинки всегда есть $\delta_{кр}$ меньше, чем определяемые из (1).

В табл. 2 приведена форма изменения по y центральной линии $-\, w(0,y)$ по (5).

Как и следовало ожидать, при $\nu = 0$ для всех значений λ $\delta_{кр} = 1$. Не изменяется также $w(0,y)$ при изменении y — везде $w(0,y) = 1$.

Таблица 2

λ \ y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.02	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
	1.268	1.268	1.268	1.268	1268	1.268
0.05	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
	1.268	1.268	1.268	1.268	1.268	1.268
0.1	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153	1.153
	1.267	1.267	1.267	1.268	1.268	1.268
1	1.125	1.126	1.131	1.138	1.148	1.162
	1.223	1.226	1.234	1.248	1.268	1.293
5	1.010	1.015	1.031	1.062	1.121	1.229
	1.022	1.035	1.077	1.158	1.300	1.552
10	1.000	1.005	1.021	1.052	1.119	1.306
	1.000	1.020	1.080	1.196	1.419	1.958
20	1.000	1.001	1.040	1.091	1.176	1.478
	1.001	1.050	1.208	1.490	1.966	3.560
50	1.000	1.032	1.131	1.304	1.562	2.257
	1.000	1.284	2.298	4.617	9.565	26.381

Что интересно в приведенных таблицах, так это то, что вплоть до $\frac{b}{a}=\frac{1}{\pi}$ пластинка (независимо от ν) работает как стержень. Даже для достаточно широких пластин прогиб на краях не намного больше, чем в центре, к тому же для широких пластин прогиб в центре такой же, как при стержне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В. Задачи локализованной неустойчивости пластинки. //В сб. научн.тр.конференции: «Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем». Ереван. 1997. С.95-99.
2. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Госфизматлит, 1963. 879 с.
3. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Госфизматлит, 1963. 635 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
15.01.2007