ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №2, 2008 Механика

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ “СЛЕДЯЩЕЙ” НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ НА СВОБОДНОЙ КРОМКЕ

Белубекян В.М., Белубекян М.В.

Ключевые слова: пластинка, устойчивость, упругость, неконсервативность, критическая нагрузка.
Keywords: plate, stability, elasticity, nonconservative, critical load.

Վ.Մ Բելուբեկյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան

Ուղղանկյուն սալի կայունությունը երբ ազատ եզրում կիրառված է "հետևող" ուժ

Դիտարկված է ուղղանկյուն սալ որի երկու հանդիպակաց կողմերը ազատ հենվածեն,իսկ մյուս երկու ազատ կողմերի վրա ազդում են հետևող բեռերը: Կրիտիկական բեռերի արժեքները որոշվում են ինչպես ստատիկ դրվածքով, այնպես էլ դինամիկ Բոլոտինի կողմից առաջարկված եղակակով: Բավականաչափ նեղ սալերի համար ցույց է տրված որ դինամիկ դրվածքով որոշված կրիտիկական բեռը էապես փոքր է ստատիկից:

V.M. Belubekyan, M.V. Belubekyan

The stability of the rectangular plate under the “follow” load action.

In the present paper a rectangular plate is considered, such that two opposite edges are hinged, and two others are free, loaded with follower forces. The problem is split into determination of symmetric and anti-symmetric shape of loss of stability. For symmetric shape critical loads are determined using both static problem statement and dynamic problem statement, based on model suggested by V. Bolotin. It is shown, that if the plate is narrow enough in the direction of loading forced, the critical loads of dynamic problems are significantly smaller than critical loads of static problems.

Рассматривается прямоугольная пластинка с двумя противоположными шарнирно закрепленными краями и двумя свободными. Сжимающая нагрузка приложена на свободных краях. Определяются критические нагрузки в статической постановке для случаев “мертвой” и “следящей” нагрузок. В случае “следящей” нагрузки задача рассматривается также на основе динамического подхода по модели В.В. Болотина. Показывается, что для достаточно узких по направлению приложенных нагрузок пластин, критические нагрузки динамической задачи (флаттер) существенно меньше статической (дивергенция).

Многочисленные публикации посвящены задаче устойчивости стержня со следящей нагрузкой. Обзор этих исследований приводится в [1,2]. Имеются лишь несколько статей, посвященных устойчивости прямоугольных пластин при действии следящих сил. В [3] рассмотрена задача для полностью свободной прямоугольной пластинки.

Задача устойчивости прямоугольной пластинки, шарнирно закрепленной по трем сторонам и сжатой следящей нагрузкой на свободной стороне, решена в [4] на основе статического подхода. Показана возможность потери устойчивости и приведены значения критических нагрузок в зависимости от коэффициента Пуассона и отношения сторон пластинки.

Статья [5] посвящена динамической устойчивости консольной пластинки при действии равномерно распределенной нагрузки, приложенной на свободной кромке противоположной закрепленной.

В [6] показанно, что консольная пластинка имеет также дивергентную форму потери устойчивости в зависимости от отношения сторон пластинки. При этом критическая нагрузка дивергентной неустойчивости оказывается меньше флаттерной критической нагрузки. Всесторонне сжатая полубесконечная пластинка рассмотрена в [7], где показывается, что при действии следящей нагрузки локализованная неустойчивость не имеет места как при статическом, так и динамическом подходе.

1. Прямоугольная пластинка постоянной толщины $2h$ в прямоугольной декартовой координатной системе занимает область $-\dfrac{a}{2} \le x \le \dfrac{a}{2}, \quad 0 \le y \le b, \quad -h \le z \le h$. Пластинка равномерно сжата постоянной нагрузкой P по кромкам $x = \pm 0,5a$. Уравнение устойчивости пластинки на основе теории Кирхгофа имеет вид [8]

$$D\Delta^2 w + P\partial^2 w / \partial x^2 = 0, \tag{1.1}$$

где w – функция прогиба пластинки, D – жесткость пластинки на изгиб

$$D = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}, \tag{1.2}$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Стороны пластинки $y = 0, b$ шарнирно закреплены

$$w = 0, \ \partial^2 w / \partial y^2 = 0. \tag{1.3}$$

Решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.3), представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right) \sin \lambda_n y, \quad \lambda n = n\pi / b. \tag{1.4}$$

Подстановка (1.4) в (1.1) приводит к следующей системе последовательных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$f_n^{IV} - 2\lambda_n^2 \left(1 - 0,5\eta_n^2\right) f_n'' + \lambda_n^4 f_n = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\eta_n^2 = \left(\lambda_n^2 D\right)^{-1} P. \tag{1.6}$$

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид

$$f_n = A_1 e^{\lambda_n p_1 x} + A_2 e^{-\lambda_n p_1 x} + A_3 e^{\lambda_n p_2 x} + A_4 e^{-\lambda_n p_2 x}, \tag{1.7}$$

где

$$p_{1,2} = \left(1 - 0,5\eta_n^2 \pm 0,5\eta_n \sqrt{\eta_n^2 - 4}\right)^{1/2}. \tag{1.8}$$

При $\eta_n^2 \ge 4$ корни p_1, p_2 характеристического уравнения – мнимые, а при $\eta_n^2 \le 4$ они комплексные и их удобно представить следующим образом:

$$p_{1,2} = \sqrt{1 - \frac{\eta_n^2}{4}} \pm i\frac{\eta_n}{2}. \tag{1.9}$$

В дальнейшем рассматриваются задачи с одинаковыми граничными условиями на сторонах $x = \pm 0,5a$. Поэтому форма пластинки после потери устойчивости может быть либо симметричной, либо антисимметричной.

Симметричное решение получается из (1.7) после удовлетворения условию симметрии

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=0 \text{ при } x=0 \quad (1.10)$$

и учета (1.4) в виде

$$f_n = A_n \operatorname{ch}\lambda_n p_1 x + B_n \operatorname{ch}\lambda_n p_2 x . \quad (1.11)$$

Соответственно, антисимметричное решение удовлетворяет условиям

$$w=0,\ \ \partial^2 w/\partial x^2 = 0 \text{ при } x=0 \quad (1.12)$$

и имеет вид

$$f_n = C_n \operatorname{sh}\lambda_n p_1 x + D_n \operatorname{sh}\lambda_n p_2 x . \quad (1.13)$$

2.Пусть на свободных кромках пластинки $x=\pm 0,5$ действует равномерно распределенная сжимающая нагрузка, которая при изгибе пластинки не меняет направление. В этом случае граничные условия имеют вид [8]

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\ D\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]+P\frac{\partial w}{\partial x}=0 \text{ при } x=\pm 0,5a \quad (2.1)$$

или с учетом (1.4)

$$f_n'' - \nu\lambda_n^2 f_n = 0,\ f_n''' - \left(2-\nu-\eta_n^2\right) f_n' = 0 \text{ при } x=\pm 0,5a . \quad (2.2)$$

Подстановка симметричного решения (1.11) в граничные условия (2.2) при $x=0,5a$ приводит к следующей алгебраической системе уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n:

$$\begin{aligned}&\left(p_1^2-\nu\right)\operatorname{ch} p_1\zeta_n A_n + \left(p_2^2-\nu\right)\operatorname{ch} p_2\zeta_n B_n = 0,\\ &p_1\left[p_1^2-\left(2-\nu-\eta_n^2\right)\right]A_n \operatorname{sh} p_1\zeta_n + p_2\left[p_2^2-\left(2-\nu-\eta_n^2\right)\right]B_n \operatorname{sh} p_2\zeta_n = 0,\end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\zeta_n = \lambda_n a/2 . \quad (2.4)$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.3) приводит к уравнению, определяющему критические нагрузки

$$p_2\left(p_1^2-\nu\right)\left[p_2^2-\left(2-\nu-\eta_n^2\right)\right]\operatorname{th} p_2\zeta_n = p_1\left(p_2^2-\nu\right)\left[p_1^2-\left(2-\nu-\eta_n^2\right)\right]\operatorname{th} p_1\zeta_n . \quad (2.5)$$

Очевидно, если уравнение (2.5) имеет корень, удовлетворяющий условию

$$\eta_n^2 < 4 , \quad (2.6)$$

то этот корень будет минимальным и, следовательно, задача определения минимальной критической нагрузки будет решена. При условии (2.6) рассмотрим достаточно длинную в направлении оси Ox пластинку

$$\zeta_n 1 >> 1 \text{ или } \pi ab^{-1} >> 1 . \quad (2.7)$$

Учитывая (1.9) и (2.6) и принимая во внимание, что

$$\lim_{\zeta_n\to\infty} \operatorname{th} p_{1,2}\zeta_n = \lim\frac{\operatorname{th}\sqrt{1-0,25\eta_n^2}\,\zeta_n \pm i\operatorname{tg}\left(0,5\eta_n\zeta_n\right)}{1+i\operatorname{th}\sqrt{1-0,25\eta_n^2}\,\zeta_n\operatorname{tg}\left(0,5\eta_n\zeta_n\right)} = 1 , \quad (2.8)$$

уравнение (2.5) приводится к виду

$$K\left(\eta_n\right) \equiv \left(p_2-p_1\right)K_1\left(\eta_n\right) = 0 , \quad (2.9)$$

где

$$K_1\left(\eta_n\right) = p_1^2 p_2^2 + 2\left(1-\nu-0,5\eta_n^2\right) p_1 p_2 - \nu\left(p_1^2 + p_2^2 - 2 + \nu + \eta_n^2\right). \quad (2.10)$$

Нетрудно проверить, что при $p_2 = p_1$ получается корень $\eta_n = 0$, которому соответствует тривиальное решение $w = 0$. Из уравнения $K_1\left(\eta_n\right) = 0$ с учетом (1.9) получается решение в виде

$$\eta_n^2 = \left(3+\nu\right)\left(1-\nu\right). \quad (2.11)$$

Из (1.6) и (2.11) минимальная критическая нагрузка $\left(n=1\right)$ для достаточно длинных пластин определяется следующим образом:

$$p_{\text{кр}} = \left(3+\nu\right)\left(1-\nu\right)\pi^2 D b^{-2}. \quad (2.12)$$

Следует отметить, что решение (2.11) удовлетворяет условию (2.6).

Критическая нагрузка существенно зависит от коэффициента Пуассона ν. Согласно (2.12) максимальное значение получается при $\nu = 0$, а минимальное – при $\nu = 0,5$, их отношение равно $3:1,75 \approx 1,7$.

Значение $\eta_n^2 = 4$ является корнем уравнения (2.5), что можно проверить подстановкой $p_{i,2} = \pm i$ из (1.9) в (2.5). Однако, в этом случае, определяя B_n через A_n из (2.3) и подставляя в (1.11), можно получить, что корню $\eta_n^2 = 4$ соответствует тривиальное решение $w = 0\left(f_n = 0\right)$. Критическое значение нагрузки, соответствующее этому корню в [8] (с.328-330), принимается как решение рассматриваемой задачи, принимая, что «граничные условия по коротким краям в данном случае являются несущественными».

На самом деле, критическое значение удлиненной пластинки со свободными короткими сторонами должно определяться по формуле (2.12), а критическое значение, соответствующее корню $\eta_n^2 = 4$,

$$p_{\text{кр}} = 4\pi^2 D b^{-2} \quad (2.13)$$

будет соответствовать аналогичной задаче с короткими шарнирно-закрепленными краями.

Для критической нагрузки (2.11) в случае удлиненных пластин $\left(\zeta_n >> 1\right)$ можно определить постоянные B_n через A_n из первого уравнения системы (2.3) следующим образом:

$$B_n = 0,5\left\{\left(1+\nu\right)\cos\eta_*\zeta_n + \eta_*\sin\eta_*\zeta_n + i\left[\eta_*\cos\eta_*\zeta_n + \left(1+\nu\right)\sin\eta_*\zeta_n\right]\right\} A_n. \quad (2.14)$$

С учетом (1.9), (2.11) и (2.14) в выражении (1.11) получится форма потери устойчивости пластинки.

Естественно, что для определения минимальной критической нагрузки в случае, когда ширина пластинки $\left(b\right)$ существенно больше по сравнению с продольным размером $\left(a\right)$, необходимо принять $n = 1$. Тогда из уравнения (2.5) при условии $\zeta_1 << 1$ получается

$$M\left(\eta_1\right) \equiv \left(p_2^2 - p_1^2\right) M_1\left(\eta_1\right) = 0, \quad (2.15)$$

где

$$M_1\left(\eta_1\right) = p_1^2 p_2^2 - \left(p_1^2 + p_2^2\right) + \nu\left(2 - \nu - \eta_1^2\right). \quad (2.16)$$

С учетом

$$p_1 p_2 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 = 2 - \eta_1^2 \tag{2.17}$$

критическое значение параметра нагрузки из уравнения $M_1(\eta_1) = 0$ получается в виде

$$\eta_1^2 = 1 - \nu . \tag{2.18}$$

Для антисимметричной задачи подстановка (1.13) в граничные условия (2.1) при $x = 0,5a$ приводит к системе уравнений относительно произвольных постоянных C_n, D_n

$$\begin{aligned} &\left(p_1^2 - \nu\right)\mathrm{sh}p_1\zeta_n C_n + \left(p_2^2 - \nu\right)\mathrm{sh}p_2\zeta_n D_n = 0, \\ &p_1\left[p_1^2 - \left(2 - \nu - \eta_n^2\right)\right]\mathrm{ch}p_1\zeta_n C_n + p_2\left[p_2^2 - \left(2 - \nu - \eta_n^2\right)\right]\mathrm{ch}p_2\zeta_n D_n = 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Из равенства нулю детерминанта системы (2.19) получается следующее уравнение, определяющее критические нагрузки:

$$p_2\left(p_1^2 - \nu\right)\left[p_2^2 - \left(2 - \nu - \eta_n^2\right)\right]\mathrm{th}p_1\zeta_n = p_1\left(p_2^2 - \nu\right)\left[p_1^2 - \left(2 - \nu - \eta_n^2\right)\right]\mathrm{th}p_2\zeta_n . \tag{2.20}$$

В приближении удлиненной пластинки (2.7) нетрудно заметить, что с учетом (2.8) уравнение, определяющее критическую нагрузку, совпадает с уравнением (2.9) симметричной задачи. Следовательно, и здесь критическая нагрузка для достаточно длинной (по x) пластинки определяется по формуле (2.11).

Для узкой пластинки, принимая как и для симметричной задачи $n = 1,\ \xi_1 << 1$ из (2.20), получается следующее уравнение:

$$\left(p_1^2 - \nu\right)\left[p_2^2 - \left(2 - \nu - \eta_1^2\right)\right] = \left(p_2^2 - \nu\right)\left[p_1^2 - \left(2 - \nu - \eta_1^2\right)\right]. \tag{2.21}$$

Используя равенства (2.17), нетрудно получить решение уравнения (2.21) в виде

$$\eta_1^2 = 2\left(1 - \nu\right). \tag{2.22}$$

Сравнение с формулой (2.18) показывает, что критическая нагрузка для узкой пластинки при симметричной форме потери устойчивости вдвое меньше критической нагрузки несимметричной формы потери устойчивости.

Формулы (2.18), (2.22), определяющие критические нагрузки узких пластин $\left(\zeta_1 < 1\right)$, для симметричной и антисимметричной задач, соответственно, уточняются следующим образом:

$$\eta_1^2 = 1 - \nu + \frac{2\nu\left(1 - 2\nu\right)}{3\left(1 - \nu\right)}\zeta_1^2, \qquad \eta_1^2 \approx 2\left(1 - \nu\right)\left(1 + \frac{5 - 3\nu}{3}\xi_1^2\right). \tag{2.23}$$

3. Пусть стороны пластинки $x = \pm 0,5a$ сжаты следящей нагрузкой. В этом случае граничные условия (2.1) заменяются условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(2 - \nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \text{ при } x = \pm 0,5a . \tag{3.1}$$

Подстановка симметричного решения (1.4), (1.11) в граничные условия (3.1) при $x = 0,5a$ приводит к следующей алгебраической системе уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n:

$$\begin{aligned}&\left(p_1^2-\nu\right)\operatorname{ch} p_1\zeta_n \;\; A_n-\left(p_2^2-\nu\right)\operatorname{ch} p_2\zeta_n\, B_n=0,\\&p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)\operatorname{sh} p_1\zeta_n A_n+p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)\operatorname{sh} p_2\zeta_n B_n=0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы (3.2) получается уравнение, определяющее критические нагрузки

$$L\left(\eta_n\right)\equiv p_2\left(p_1^2-\nu\right)\left(p_2^2-2+\nu\right)\operatorname{th} p_2\zeta_n-p_1\left(p_2^2-\nu\right)\left(p_1^2-2+\nu\right)\operatorname{th} p_1\zeta_n=0. \tag{3.3}$$

В случае удлиненных пластин, при условиях (2.6), (2.7) уравнение (3.3) с учетом (2.8) приводится к виду

$$L\left(\eta_n\right)\approx\left(p_2-p_1\right)L_1\left(\eta_n\right)=0, \tag{3.4}$$

где

$$L_1\left(\eta_n\right)=p_1^2p_2^2+2\left(1-\nu\right)p_1p_2-\nu\left(p_1^2+p_2^2\right)+\nu\left(2-\nu\right). \tag{3.5}$$

Уравнение $L_1\left(\eta_n\right)=0$ с использованием равенств (2.17) приводится к виду

$$\left(3+\nu\right)\left(1-\nu\right)+\nu\eta_n^2=0. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что удлиненная пластинка при действии следящей (в отличие от консервативной) нагрузки не имеет симметричной формы потери устойчивости для сжимающих нагрузок, удовлетворяющих условию (2.6) (или условию $0<\eta_n^2<4$). Однако, из (3.6) следует, что возможна потеря устойчивости для растягивающих нагрузок $\left(\eta_n^2<0\right)$. В этом случае растягивающая критическая нагрузка будет существенно больше сжимающей консервативной нагрузки (2.11). Наименьшая разница будет для коэффициента Пуассона $\nu=0,5$ – критическая растягивающая нагрузка (3.6) в два раза больше сжимающей (2.11)

В приближении узкой пластинки, при условиях $n=1,\ \zeta_1<<1$, уравнение (3.3) приводится к виду

$$N\left(\eta_1\right)=\left(p_2^2-p_1^2\right)\,N_1\left(\eta_1\right)=0, \tag{3.7}$$

где

$$N_1\left(\eta_1\right)=p_1^2p_2^2-\nu\left(p_1^2+p_2^2\right)+\nu\left(2-\nu\right). \tag{3.8}$$

Уравнение $N_1\left(\eta_1\right)=0$ с учетом (2.17) преобразуется к следующему уравнению:

$$1-\nu^2+\nu\eta_1^2=0. \tag{3.9}$$

Как и в случае удлиненной пластинки, уравнение (3.9) не имеет решения, удовлетворяющего условию $\eta_1^2>0$, но имеет решение для отрицательных η_1^2. Т.е. наличие следящей растягивающей нагрузки может привести к потере симметричной формы устойчивости узкой пластинки.

Если в уравнении (3.3) при условиях $n=1,\,\zeta_1<1$ удержать следующее приближение, т.е. допустить

$$\operatorname{th} p_i\,\zeta_n\approx p_i\,\zeta_n-p_i^3\,\zeta_n^3/3, \tag{3.10}$$

то уравнение (3.7) заменяется следующим уравнением:

$$N\left(\eta_1\right)\equiv\left(p_2^2-p_1^2\right)\left[N_1\left(\eta_1\right)-\frac{\zeta_1^2}{2}N_2\left(\eta_1\right)\right]=0, \tag{3.11}$$

где

$$N_2(\eta_1) = 2\nu(1-\nu) - (1-\nu)^2\,\eta_1^2 + \nu\,\eta_1^4. \qquad (3.12)$$

Т.к. $p_2 \neq p_1$, из (3.11) получается уравнение, определяющее критическую нагрузку

$$\nu\zeta_1^2\eta_1^4 - \left[3\nu + (1-\nu)^2\,\xi_1^2\right]\eta_1^2 - 3\left(1-\nu^2\right) + 2\nu(1-\nu)\zeta_1^2 = 0. \qquad (3.13)$$

В табл.1 приводится сравнение критических нагрузок симметричной формы потери устойчивости узкой пластинки для случаев консервативной нагрузки согласно (2.23) и следящей нагрузки, согласно (3.13). Вычисления приведены для отношения стороны пластинки $\zeta_1^2 = 0{,}1$ $\left(b = \sqrt{10}\pi a/2\right)$.

Таблица 1

η_1^2 \ ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(2.23)	1	0,9	0,81	0,71	0,61	0,5
(3.13)	∞	44,7	37,04	34,27	32,79	31,91
(3.3)	104,61	101,05	100,88	100,82	100,79	100,77

В табл. 2 то же самое сравнение приводится для случая $\zeta_1^2 = 0{,}5$ $\left(b = \pi a/\sqrt{2}\right)$

Таблица 2

η_1^2 \ ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
(2.23)	1	0,93	0,85	0,76	0,64	0,5
(3.13)	∞	17,41	11,15	9,42	8,28	8,00
(3.3)	84,83	81,39	81,18	81,11	81,07	81,04

В третьих строках табл. 1 и 2 приведены значения критического параметра нагрузки η_1, вычисленные по точному уравнению (3.3). Сравнение с приближенным решением по формуле (3.13) дает существенное отличие, что показывает неприменимость приближения $\zeta_1^2 << 1$ ввиду $|p_1|\zeta_1 > 1$. Тем не менее, приближение (3.13), как и расчеты на основе точного уравнения, показывает возможность потери статической устойчивости пластинки при действии сжимающей следящей нагрузки.

Для задачи потери устойчивости по антисимметричной форме (1.13) уравнение, определяющее критические нагрузки, получается в виде

$$p_2\left(p_1^2 - \nu\right)\left(p_2^2 - 2 + \nu\right)\operatorname{th} p_1\zeta_n = p_1\left(p_2^2 - \nu\right)\left(p_1^2 - 2 + \nu\right)\operatorname{th} p_2\zeta_n. \qquad (3.14)$$

Как и в предыдущей задаче, из уравнения (3.14) следует, что в приближении $\zeta_n^2 >> 1$ и при условии $\eta_n^2 < 4$ неустойчивость невозможна.

В статье [4] приводятся численные результаты решения уравнения (3.14).

Задача устойчивости прямоугольной пластинки с двумя противоположными шарнирно закрепленными краями, с одним закрепленным и с четвертым свободным при действии следящей нагрузки исследована в [9, 10].

4. Решение задач устойчивости со следящей нагрузкой (неконсервативных задач) на основе статического метода Эйлера, в общем случае, может привести к ошибочным результатам [11-13].

Для применения динамического подхода, обычно, в уравнении учитывают инерционные члены. Учет в уравнении устойчивости инерции массы пластинки $2\rho h\partial^2 w/\partial t^2$ приводит к большим сложностям вычислительного характера. С целью преодолевания аналогичных трудностей в задаче устойчивости консольной балки со следящей нагрузкой (задача Бекка), В.В. Болотиным предложена модель, когда на свободном конце балки имеется сосредоточенная инерционная масса и пренебрегается инерция массы балки [11].

Следуя идее В.В Болотина, граничные условия (3.1) на свободном крае пластинки, в случае следящей нагрузки, заменяются следующими условиями:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(2-\nu\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}=\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{ при } x=\pm 0,5a, \tag{4.1}$$

где $\beta=m/D$, m – сосредоточенная на краях $x=\pm 0,5a$ инерционная масса.

Учитывая динамическую постановку задачи, решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$w=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)e^{i\omega_n t}\sin\lambda_n y. \tag{4.2}$$

После подстановки (4.2) в (1.1), нахождения общего решения (1.7), удовлетворения граничным условиям (1.10), (1.12), определяются симметричные и антисимметричные формы колебания, которые совпадают с представлением функций $f_n\left(x\right)$ в виде (1.11) и (1.13), соответственно. Подстановка симметричного решения (1.11), с учетом (4.2), в граничные условия (4.1) при $x=0,5a$ приводит к следующей системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_n, B_n:

$$\left(p_1^2-\nu\right)\operatorname{ch} p_1\zeta_n A_n+\left(p_2^2-\nu\right)\operatorname{ch} p_2\zeta_n\, B_n=0, \tag{4.3}$$

$$\left[p_1\left(p_1^2-2+\nu\right)\operatorname{sh} p_1\zeta_n+\beta\omega_n^2\operatorname{ch} p_1\zeta_n\right]A_n+$$
$$+\left[p_2\left(p_2^2-2+\nu\right)\operatorname{sh} p_2\zeta_n+\beta\omega_n^2\operatorname{ch} p_2\zeta_n\right]B_n=0.$$

Из условия равенства нулю детерминанта системы (4.3) определяются частоты колебаний ω_n.

При условии

$$\eta_n^2>4 \tag{4.4}$$

и при новых обозначениях

$$p_{1,2}=i\,q_{1,2},\quad q_{1,2}=\sqrt{0,25\eta_n^2-1}\pm 0,5\eta_n \tag{4.5}$$

выражение для частот колебаний принимает вид

$$\omega_n^2=\frac{q_2\left(q_1^2+\nu\right)\left(q_2^2+2-\nu\right)\cos q_1\zeta_n\sin q_2\zeta_n-q_1\left(q_2^2+\nu\right)\left(q_1^2+2-\nu\right)\sin q_1\zeta_n\cos q_2\zeta_n}{\beta\left(q_1^2-q_2^2\right)\cos q_1\zeta_n\cos q_2\zeta_n}. \tag{4.6}$$

Условие равенства нулю числителя выражения (4.6) определяет критическую нагрузку при статическом подходе (дивергентную форму потери устойчивости). Условие же равенства нулю знаменателя (4.6) определяет критическую нагрузку при динамическом подходе (флаттерную форму потери устойчивости) [11].

При значении $\eta_n=0$ и $\eta_n=2$ числитель и знаменатель выражения (4.6) обращаются в нуль.

В этих случаях необходимо найти предельные значения для частот ω_n или же провести решения задачи заново. В случае $\eta_n = 0$ получаются следующие выражения для собственных частот колебаний пластинки с сосредоточенными инерционными массами на краях $x = \pm 0,5\,a$

$$\omega_n^2 = \frac{(1-\nu)\lambda_n^3}{2\beta}\left[(3+\nu)\,\mathrm{th}\,\zeta_n - \frac{(1-\nu)\zeta_n}{\mathrm{ch}^2\zeta_n}\right]. \tag{4.7}$$

Частоты колебаний для случая $\eta_n = 2$ определяются следующим образом:

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_n^3}{2\beta}\frac{(3-\nu)(1+\nu)\zeta_n - 0,5(1-6\nu+\nu^2)\sin 2\zeta_n}{\cos^2\zeta_n}. \tag{4.8}$$

Нетрудно проверить, что числитель и знаменатель выражения всегда положительные, т.е. не меняют знак в зависимости от ζ_n.

Следовательно, как и в статическом случае, пластинка при $\eta_n = 2$ устойчива.

Здесь флаттерная устойчивость могла бы иметь место, если знаменатель меняет знак в зависимости от ζ_n [11]. Однако, в окрестности изменения $\zeta_n = \pi/2$ возможны колебания резонансного типа.

Имея в виду, что для узких пластин минимальная критическая нагрузка будет при $n = 1$, согласно (4.6), флаттерная неустойчивость появляется при условии

$$\cos q_1\zeta_1 = 0. \tag{4.9}$$

Из (4.9) для параметра критической нагрузки с учетом (4.5) получается

$$\eta_{1k} = \frac{(2k-1)\pi}{2\zeta_1} + \frac{2\zeta_1}{(2k-1)\pi}, \tag{4.10}$$

откуда

$$\min_k \eta_{1k} = \frac{\pi}{2\zeta_1} + \frac{2\zeta_1}{\pi}. \tag{4.11}$$

Из (4.11), в частности, следует, что при $\zeta_1^2 = 0,1$ получается $\eta_1^2 \approx 26,73$, а при $\zeta_1^2 = 0,5$ получается $\eta_1^2 \approx 7,1342$. Сравнение этих значений критических нагрузок с соответствующими значениями из табл. 1 и 2 позволяет делать вывод, что для узких пластин флаттерные критические нагрузки значительно меньше дивергентных.

Одновременно флаттерные критические нагрузки, которые получаются в задаче со следящими нагрузками, существенно больше критических нагрузок в случае консервативных нагрузок.

Работа выполнена при содействии гранта INTAS 8886.

ЛИТЕРАТУРА

1. Langthjem M.A., Sugiyama Y. Dynamic Stability of Columns Subjected to Follow Loads: A Survey.// Journal of Sound and Vibration. 2000. 238 (5). P. 809-851.
2. Elishakoff I. Controversy Associated with the so-called “Follower Forces”. Critical Overview. //Applied Mechanics Reviews. 2005. 58. P. 117-142.
3. Higuchi K, Dowell E.H. Effect of structural Damping on Flatter of Plates with a Follower Force. //AIAA Journal 1992. 30. P. 820-825.
4. Арутюнян И.Р., Белубекян М.В. Две задачи устойчивости прямоугольной пластинки. /В сб.: “Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем” Ереван: 1997. С. 86-88.
5. Kim J.H., Kim H.S. A Study on the Dynamic Stability of Plates under a Follower Force. //Computers and Structures. 2000. 74. P. 351-363.
6. Belubekyan V.M., Belubekyan M.V. Nonconservative Stability problems for axially compressed rectangular plate. “Physics and Control” Intern. Conf. Saint Peterburg, Russia, 2003. P. 1070-1073.
7. Белубекян В.М. Локализованная неустойчивость равномерно сжатой пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 1. С. 33-37.
8. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
9. Gulkowski P.M., Reisman H. Plate buckling due to follower force edges. //Trans. ASME. Ser E. Journ. Appl. Mech. 1977. 44. P.768-769.
10. Adali S. Stability of a rectangular plate under nonconservative and conservative forces // Inter. Journ of Solids and Structures. 1982. V 18. № 12. P. 1044-1052.
11. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госизд. физ-мат лит. 1961. 340 с.
12. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
13. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1979. 384 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.08.2007