

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ
С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Багдасарян Յ.Ր.

Ключевые слова: изгиб пластины, прогиб, система дифференциальных уравнений, перерезывающие усилия.

Keywords: a bending of a plate, deflection, differential equations, shear stress resultant.

Ջ.Ռ.Բաղդասարյան

Շրջանակաձև սահբերի հաշվառմամբ ուղղանկյուն սալի ծոման մի խնդրի մասին

Ներկայացվող աշխատանքում, Կիրխոֆի դասական տեսության և Համբարձումյանի ճշգրտված տեսության հիման վրա դիտարկված են ուղղանկյուն սալի ծոման խնդիրներ:

Ցույց է տրված, որ երկու եզրերում հողակապորեն ամրակցված, իսկ մյուս երկուսում ազատ հենված սալի պարագայում՝ Կիրխոֆի վարկածի ճշտությունը սալի հարաբերական հաստության առհամարիումն է մեկի նկատմամբ:

Ստացված են բանաձևեր ձկվածքի, կտրող և ընդհանրացված կտրող ուժերի համար:

Տարբեր մասնավոր դեպքերի համար ստացված են մաքսիմալ ձկվածքի և կտրող ուժերի տեսքերը:

Z.R.Baghdasaryan

The Problem of Bending of Rectangular Plate Taking into Account the Transversal Shear

In this work the problems on the bending of rectangular plate on the basis of classical theory by Kirchhoff and Ambartsumyan's theory is observed. It is shown, that when the plate is leaned free on two opposite sides, and on two others is hinge joint, the exactness of Kirchhoff's hypothesis is the neglecting of a related thickness in comparison with unit. Formulas for a deflection and also for shear stress resultant and generalized shear stress resultant are received. In different private cases expressions of maximal deflection and shear stress resultant are received.

В настоящей работе на основе классической теории Кирхгофа и уточненной теории Амбарцумяна рассмотрены задачи изгиба прямоугольной пластинки.

Показано, что в случае, когда пластинка по двум противоположным сторонам опирается свободно, а по двум другим закреплена шарнирно, точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной по сравнению с единицей.

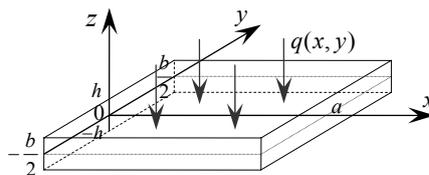
Получены формулы для прогиба, а также для перерезывающих и обобщенно перерезывающих усилий.

В разных частных случаях получены выражения максимального прогиба и перерезывающих усилий.

1. На основе классической теории пластин [1] рассматривается шарнирно закрепленная по всему контуру тонкая прямоугольная пластинка с размерами a , b и толщиной $2h$.

Прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ выбрана так (фиг.1), что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью Oxy , а ось Oz нормальна к этой плоскости ($0 \leq x \leq a$; $-0,5b \leq y \leq 0,5b$; $-h \leq z \leq h$).

Предполагается, что пластинка изгибается под действием произвольной, симметрично распределенной относительно оси Ox , нормальной нагрузки $q(x, y)$.



Фиг.1

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки и граничные условия в рассматриваемом случае соответственно имеют вид [1]:

$$\Delta\Delta W(x, y) = -\frac{q(x, y)}{D}, \quad (1.1)$$

$$W(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a, \quad (1.2)$$

$$W(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm 0,5b, \quad (1.3)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} = \frac{4Gh^3}{3(1-\nu)},$$

$W(x, y)$ – прогиб пластинки, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, G – модуль сдвига.

Следуя М.Леви, решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \lambda_n x, \quad (1.4)$$

где $f_n(y)$ – неизвестные функции, а $\lambda_n = \pi n / a$ ($n = 1, 2, \dots$).

Далее, разлагая функцию $q(x, y)$ в ряд Фурье

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(y) \sin \lambda_n x \quad (1.5)$$

и удовлетворяя граничным условиям (1.2) и (1.3), получим:

$$\begin{aligned} W(x, y) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \operatorname{ch} \alpha_n} \{ & [(1 + \alpha_n \operatorname{th} \alpha_n) \operatorname{ch} \lambda_n y - \\ & - \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n y] \int_0^{\frac{b}{2}} \operatorname{sh} \lambda_n (t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt - \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n y \int_0^{\frac{b}{2}} (t - \frac{b}{2}) \operatorname{ch} \lambda_n (t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt + \\ & + \operatorname{ch} \alpha_n \int_0^y [\lambda_n (t - y) \operatorname{ch} \lambda_n (t - y) - \operatorname{sh} \lambda_n (t - y)] q_n(t) dt \} \sin \lambda_n x, \quad (1.6) \end{aligned}$$

где $\alpha_n = \frac{b}{2} \lambda_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Из формулы (1.6) для максимального прогиба имеем

$$\begin{aligned} W(a/2, 0) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \operatorname{ch} \alpha_n} \int_0^{\frac{b}{2}} & [(1 + \alpha_n \operatorname{th} \alpha_n) \operatorname{sh} \lambda_n (t - b/2) - \\ & - \lambda_n (t - b/2) \operatorname{ch} \lambda_n (t - b/2)] q_n(t) dt. \quad (1.6') \end{aligned}$$

В рассмотренном случае перерезывающие усилия $N_x(x, y)$, $N_y(x, y)$ и обобщенные перерезывающие усилия $\tilde{N}_x(x, y)$, $\tilde{N}_y(x, y)$ выражаются следующими формулами:

$$N_x(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\text{sh}\lambda_n y}{\text{ch}\alpha_n} \int_0^{\frac{b}{2}} \text{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) q_n(t) dt + \int_0^y \text{ch}\lambda_n(t-y) q_n(t) dt \right] \sin \lambda_n x \quad (1.7)$$

$$N_y(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\text{ch}\lambda_n y}{\text{ch}\alpha_n} \int_0^{\frac{b}{2}} \text{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) q_n(t) dt - \int_0^y \text{sh}\lambda_n(t-y) q_n(t) dt \right] \cos \lambda_n x, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_x(x, y) = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{ch}\alpha_n} \left\{ (1-\nu) \text{sh}\lambda_n y \int_0^{\frac{b}{2}} \left[\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) \text{ch}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. -(1 + \alpha_n \text{th}\alpha_n) \text{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) \right] q_n(t) dt + [(1-\nu) \lambda_n y \text{ch}\lambda_n y - \right. \\ & \left. -(1+\nu) \text{sh}\lambda_n y \right] \int_0^{\frac{b}{2}} \text{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) q_n(t) dt + \text{ch}\alpha_n \int_0^y [(1-\nu) \lambda_n (t-y) \text{sh}\lambda_n(t-y) - \\ & \left. - 2 \text{ch}\lambda_n(t-y)] q_n(t) dt \right\} \sin \lambda_n x, \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_y(x, y) = & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{ch}\alpha_n} \left\{ (1-\nu) \text{ch}\lambda_n y \int_0^{\frac{b}{2}} \left[\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) \text{ch}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. -(1 + \alpha_n \text{th}\alpha_n) \text{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) \right] q_n(t) dt + [(1-\nu) \lambda_n y \text{sh}\lambda_n y + \right. \\ & \left. + 2(2-\nu) \text{ch}\lambda_n y \right] \int_0^{\frac{b}{2}} \text{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) q_n(t) dt - \text{ch}\alpha_n \int_0^y [(3-\nu) \text{sh}\lambda_n(t-y) + \\ & \left. + (1-\nu) \lambda_n (t-y) \text{ch}\lambda_n(t-y)] q_n(t) dt \right\} \cos \lambda_n x. \quad (1.10) \end{aligned}$$

Отметим, что сосредоточенные реакции в угловых точках пластинки по абсолютной величине равны, причем

$$R\left(0, \frac{b}{2}\right) = (1-\nu) \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{b}{2}} \left[1 + t - \frac{b}{2} - \text{th}^2 \alpha_n + \left(t - \frac{b}{2}\right) \text{th}\alpha_n \text{cth}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) \right] \text{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) q_n(t) dt$$

2. На основе уточненной теории С.А.Амбарцумяна [2] система дифференциальных уравнений изгиба рассмотренной пластинки и граничные условия шарнирного закрепления соответственно имеют вид [3]:

$$\begin{cases} \Delta \Phi = \frac{3}{4h} q(x, y), \\ \Delta W - \frac{8\gamma h^3}{3(1-\nu)D} \Delta \Phi + \frac{4h}{3D} \Phi = 0, \\ \Delta \Psi - \frac{1}{\gamma h^2} \Psi = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{2\gamma}{G} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

при $x = 0, x = a$;

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{2\gamma}{G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

при $y = \pm 0,5b$,

где $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ – искомые функции, $\gamma = 2/5$ по теории Амбарцумяна и $\gamma = 1/3$ по теории Рейснера-Генки-Миндлина, по варианту Васильева [4].

Решение системы дифференциальных уравнений (2.1) ищем в виде

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin \lambda_n x, \quad \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y) \sin \lambda_n x, \\ \Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(y) \cos \lambda_n y, \quad (2.4)$$

где $f_n(y)$, $g_n(y)$ и $p_n(y)$ ($n = 1, 2, \dots$) – неизвестные функции.

Подставляя функции (2.4) в систему (2.1), решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f_n(y)$, $g_n(y)$ и $p_n(y)$ ($n = 1, 2, \dots$) и представляя $q(x, y)$ в виде ряда (1.5), получим

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n e^{-\lambda_n y} + B_n e^{\lambda_n y} + \frac{2hy}{3\lambda_n D} (C_n e^{-\lambda_n y} - D_n e^{\lambda_n y}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2\lambda_n^3 D} \int_0^y [\lambda_n (t-y) \operatorname{ch} \lambda_n (t-y) - (1 + \frac{4\xi^2}{1-\nu}) \operatorname{sh} \lambda_n (t-y)] q_n(t) dt \right\} \sin \lambda_n x, \quad (2.5)$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n e^{-\lambda_n y} + D_n e^{\lambda_n y} - \frac{3}{4\lambda_n h} \int_0^y \operatorname{sh} \lambda_n (t-y) q_n(t) dt \right] \sin \lambda_n x \quad (2.6)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n e^{-\lambda_n \mu_n y} + F_n e^{\lambda_n \mu_n y}) \cos \lambda_n x. \quad (2.7)$$

где

$$\mu_n = \frac{\sqrt{1 + \xi_n^2}}{\xi_n}, \quad \xi_n = \sqrt{\gamma} \lambda_n h, \quad (2.8)$$

а произвольные постоянные A_n , B_n , C_n , D_n , E_n и F_n подлежат определению.

Учитывая, что нагрузка симметрично распределена относительно оси Ox , заменяя граничные условия при $y = -0,5b$ условиями симметрии,

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial y^3} = 0, \quad \Psi(x, y) = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (2.9)$$

и подставляя (2.5) и (2.7) в (2.9), получим

$$A_n = B_n, \quad C_n = D_n, \quad E_n = -F_n. \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) для функций $W(x, y)$, $\Phi(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ имеем

$$W(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2A_n \operatorname{ch} \lambda_n y - \frac{4hy}{3\lambda_n D} C_n \operatorname{sh} \lambda_n y + \frac{1}{2\lambda_n^3 D} \int_0^y [\lambda_n(t-y) \operatorname{ch} \lambda_n(t-y) - (1 + \frac{4\xi^2}{1-\nu}) \operatorname{sh} \lambda_n(t-y)] q_n(t) dt \right\} \sin \lambda_n x, \quad (2.5')$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [2C_n \operatorname{ch} \lambda_n y - \frac{3}{4\lambda_n h} \int_0^y \operatorname{sh} \lambda_n(t-y) q_n(t) dt] \sin \lambda_n x, \quad (2.6')$$

$$\Psi(x, y) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sh} \lambda_n \mu_n y \cos \lambda_n x. \quad (2.7')$$

Используя также граничные условия (2.3) при $y = 0,5b$, получим

$$W(x, y) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \operatorname{ch} \alpha_n} \left\{ \left[(1 + \alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + \frac{4\xi_n^2}{1-\nu}) \operatorname{ch} \lambda_n y - \lambda_n y \operatorname{sh} \lambda_n y \right] \int_0^{\frac{b}{2}} \operatorname{sh} \lambda_n(t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt - \lambda_n \operatorname{ch} \lambda_n y \int_0^{\frac{b}{2}} (t - \frac{b}{2}) \operatorname{ch} \lambda_n(t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt + \operatorname{ch} \alpha_n \int_0^y [\lambda_n(t-y) \operatorname{ch} \lambda_n(t-y) - (1 + \frac{4\xi_n^2}{1-\nu}) \operatorname{sh} \lambda_n(t-y)] q_n(t) dt \right\} \sin \lambda_n x, \quad (2.11)$$

$$\Phi(x, y) = \frac{3}{4h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \alpha_n} \int_0^{\frac{b}{2}} \operatorname{sh} \lambda_n(t - \frac{b}{2}) q_n(t) dt - \int_0^y \operatorname{sh} \lambda_n(t-y) q_n(t) dt \right] \sin \lambda_n x, \quad (2.12)$$

$$\Psi(x, y) = 0 \quad (2.13)$$

Из формулы (2.11) для максимального прогиба имеем

$$W(\frac{a}{2}, 0) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \operatorname{ch} \alpha_n} \int_0^{\frac{b}{2}} \left[(1 + \alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + \frac{4\xi_n^2}{1-\nu}) \operatorname{sh} \lambda_n(t - \frac{b}{2}) - \lambda_n(t - \frac{b}{2}) \operatorname{ch} \lambda_n(t - \frac{b}{2}) \right] q_n(t) dt. \quad (2.14)$$

Далее, вычисляя перерезывающие усилия $N_x(x, y)$, $N_y(x, y)$, убеждаемся, что выражения этих величин совпадают с соответствующими выражениями (1.7) и (1.8), полученные на основе классической теории пластин.

3. Предположим, что рассмотренная выше пластинка шарнирно закреплена по краям $x = 0$, $x = a$ и свободно оперта по краям $y = \pm 0,5b$.

Подставляя (2.5')–(2.8') в граничные условия

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{\gamma}{G} \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{2\gamma}{G} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] = 0 \quad \text{при } y = \frac{b}{2}$$

для коэффициентов A_n , B_n , C_n , D_n , E_n и F_n ($n = 1, 2, \dots$) получим

$$A_n = B_n = \frac{1}{4\lambda_n^3 D \operatorname{ch}\alpha_n} \left\{ \frac{\alpha_n \operatorname{sh}\alpha_n}{\eta_n} \left((1-\nu)\lambda_n \xi_n \sqrt{1+\xi_n^2} (G_n \operatorname{sh}\alpha_n + Q_n \operatorname{ch}\alpha_n) + \right. \right. \\ \left. \left. + [4\xi_n^3 \sqrt{1+\xi_n^2} \operatorname{sh}\alpha_n - (1+2\xi_n^2)^2 \operatorname{ch}\alpha_n \operatorname{th}\alpha_n \mu_n] F_n \right) + \frac{4\xi_n^2}{1-\nu} F_n + \lambda_n G_n \right\}, \quad (3.2)$$

$$C_n = D_n = \frac{3}{8\lambda_n h} \cdot \frac{1}{\eta_n} \left((1-\nu)\lambda_n \xi_n \sqrt{1+\xi_n^2} (G_n \operatorname{sh}\alpha_n + Q_n \operatorname{ch}\alpha_n) + \right. \\ \left. + [4\xi_n^3 \sqrt{1+\xi_n^2} \operatorname{sh}\alpha_n - (1+2\xi_n^2)^2 \operatorname{ch}\alpha_n \operatorname{th}\alpha_n \mu_n] F_n \right), \quad (3.3)$$

$$E_n = -F_n = \frac{3(1-\nu)(1+2\xi_n^2)}{16\lambda_n h \operatorname{ch}\alpha_n \mu_n} \cdot \frac{\lambda_n (G_n \operatorname{sh}\alpha_n + Q_n \operatorname{ch}\alpha_n) \operatorname{ch}\alpha_n - (\alpha_n + \operatorname{sh}\alpha_n \operatorname{ch}\alpha_n) F_n}{\eta_n}, \quad (3.4)$$

где

$$\eta_n = [(1-\nu)\alpha_n + (1-\nu + 4\xi_n^2) \operatorname{sh}\alpha_n \operatorname{ch}\alpha_n] \xi_n \sqrt{1+\xi_n^2} - (1+2\xi_n^2)^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_n \operatorname{th}\alpha_n \mu_n,$$

$$F_n = \int_0^{b/2} \operatorname{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) q_n(t) dt,$$

$$G_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^{b/2} [\operatorname{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) - \lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) \operatorname{ch}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right)] q_n(t) dt,$$

$$Q_n = - \int_0^{b/2} \left(t - \frac{b}{2}\right) \operatorname{sh}\lambda_n \left(t - \frac{b}{2}\right) q_n(t) dt.$$

В рассмотренном случае для максимального прогиба имеем

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3 \operatorname{ch}\alpha_n} \left\{ \frac{\alpha_n \operatorname{sh}\alpha_n}{\eta_n} \left((1-\nu)\lambda_n \xi_n \sqrt{1+\xi_n^2} (G_n \operatorname{sh}\alpha_n + Q_n \operatorname{ch}\alpha_n) + \right. \right. \\ \left. \left. + [4\xi_n^3 \sqrt{1+\xi_n^2} \operatorname{sh}\alpha_n - (1+2\xi_n^2)^2 \operatorname{ch}\alpha_n \operatorname{th}\alpha_n \mu_n] F_n \right) + \frac{4\xi_n^2}{1-\nu} F_n + \lambda_n G_n \right\}. \quad (3.5)$$

В большинстве задач результаты теории Кирхгофа получаются из уточненной теории пренебрежением членами, содержащими квадрат относительной толщины (например, когда все четыре стороны пластинки шарнирно закреплены). В рассматриваемой задаче результаты теории Кирхгофа получаются пренебрежением членами, содержащими относительную толщину.

Следовательно, в рассматриваемой задаче, как и в задаче [2,5], точность гипотезы Кирхгофа есть пренебрежение относительной толщиной.

Для перерезывающих усилий $N_x(x, y)$, $N_y(x, y)$ получим

$$N_x(x, y) = \frac{4h}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{4h} \int_0^y \operatorname{ch}\lambda_n(t-y) q_n(t) dt + 2\lambda_n C_n \operatorname{sh}\lambda_n y - 2\lambda_n E_n \operatorname{sh}\lambda_n \mu_n y \right] \sin \lambda_n x, \quad (3.6)$$

$$N_y(x, y) = \frac{4h}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{4h} \int_0^y \operatorname{sh}\lambda_n(t-y) q_n(t) dt - 2\lambda_n C_n \operatorname{ch}\lambda_n y + \right. \\ \left. + 2\lambda_n \mu_n E_n \operatorname{ch}\lambda_n \mu_n y \right] \cos \lambda_n x. \quad (3.7)$$

Из полученных формул видно, что выражения перерезывающих усилий существенно отличаются от соответствующих выражений этих усилий, полученных на основе классической теории.

4. В частности, принимая, что нагрузка задана в виде

$$q(x, y) = q_1(y) \sin \lambda_1 x \quad (4.1)$$

т.е. в представлении нагрузки (1.5), оставляя только первый член, для выражений максимального прогиба (1.6'), (2.14') и (3.5) и перерезывающих усилий, соответственно, получим

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{1}{2D} \frac{1}{\lambda_1^3 \operatorname{ch} \alpha_1} \int_0^{b/2} \left[\lambda_1 \left(t - \frac{b}{2}\right) \operatorname{ch} \lambda_1 \left(t - \frac{b}{2}\right) - (1 + \alpha_1 \operatorname{th} \alpha_1) \operatorname{sh} \lambda_1 \left(t - \frac{b}{2}\right) \right] q_1(t) dt, \quad (4.2)$$

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = \frac{1}{2D} \frac{1}{\lambda_1^3 \operatorname{ch} \alpha_1} \int_0^{b/2} \left[\left(1 + \alpha_1 \operatorname{th} \alpha_1 + \frac{4\xi_1^2}{1-\nu}\right) \operatorname{sh} \lambda_1 \left(t - \frac{b}{2}\right) - \lambda_1 \left(t - \frac{b}{2}\right) \operatorname{ch} \lambda_1 \left(t - \frac{b}{2}\right) \right] q_1(t) dt, \quad (4.3)$$

$$W(a/2, 0) = \frac{1}{2D} \frac{1}{\lambda_1^3 \operatorname{ch} \alpha_1} \left\{ \frac{\alpha_1 \operatorname{sh} \alpha_1}{\eta_1} \left((1-\nu) \lambda_1 \xi_1 \sqrt{1 + \xi_1^2} (G_1 \operatorname{sh} \alpha_1 + Q_1 \operatorname{ch} \alpha_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + [4\xi_1^3 \sqrt{1 + \xi_1^2} \operatorname{sh} \alpha_1 - (1 + 2\xi_1^2)^2 \operatorname{ch} \alpha_1 \operatorname{th} \alpha_1 \mu_1] F_1 \right) + \frac{4\xi_1^2}{1-\nu} F_1 + \lambda_1 G_1 \right\}, \quad (4.4)$$

$$N_x(x, y) = \frac{4h}{3} \left[\frac{3}{4h} \int_0^y \operatorname{ch} \lambda_1(t-y) q_1(t) dt + 2\lambda_1 C_1 \operatorname{sh} \lambda_1 y - 2\lambda_1 E_1 \operatorname{sh} \lambda_1 \mu_1 y \right] \sin \lambda_1 x, \quad (4.5)$$

$$N_y(x, y) = \frac{4h}{3} \left[-\frac{3}{4h} \int_0^y \operatorname{sh} \lambda_1(t-y) q_1(t) dt - 2\lambda_1 C_1 \operatorname{ch} \lambda_1 y + 2\lambda_1 \mu_1 E_1 \operatorname{ch} \lambda_1 \mu_1 y \right] \cos \lambda_1 x. \quad (4.6)$$

Из формулы (4.6) видно, что усилие $N_y(x, y)$ возрастает при уменьшении относительной толщины.

В угловых точках для перерезывающих усилий получим

$$N_x(0, \pm b/2) = N_x(a, \pm b/2) = 0,$$

$$N_y(0, \pm b/2) = -N_y(a, \pm b/2) = \frac{4h}{3} \left[-2\lambda_1 C_1 \operatorname{ch} \alpha_1 + \frac{3}{4h} \int_0^{b/2} \operatorname{sh} \lambda_1 \left(t - \frac{b}{2}\right) q_1(t) dt + 2 \frac{\lambda_1}{\xi_1} E_1 \operatorname{ch} \frac{\alpha_1}{\xi_1} \right].$$

Далее рассматривая следующие частные случаи:

$$q(x, y) = q_0 \sin \lambda_1 x, \quad q(x, y) = P \delta(y) \sin \lambda_1 x,$$

$$q(x, y) = q_0 \cos \frac{\pi}{b} y \sin \lambda_1 x \quad (q_0 = \text{const}), \quad (4.7)$$

где $\delta(y)$ – функция Дирака, а P – интенсивность сосредоточенной силы, т.е. в выражениях максимального прогиба (4.2)–(4.4) и перерезывающего усилия $N_y(0, \pm b/2)$, поочередно принимая

$$q(t) = q_0, \quad q(t) = P \delta(t), \quad q(t) = q_0 \cos \frac{\pi}{b} t, \quad (4.8)$$

соответственно получим

$$\text{a)} \quad q(t) = q_0$$

$$W(a/2, 0) = \frac{q_0}{\lambda_1^4 D} \left(1 - \frac{2 + \alpha_1 \text{th} \alpha_1}{2 \text{ch} \alpha_1}\right), \quad (4.2')$$

$$W(a/2, 0) = \frac{q_0}{\lambda_1^4 D} \left[1 - \frac{2 + \alpha_1 \text{th} \alpha_1}{2 \text{ch} \alpha_1} + \frac{2 \xi_1^2}{1 - \nu} \left(1 - \frac{1}{\text{ch} \alpha_1}\right)\right], \quad (4.3')$$

$$W(a/2, 0) = \frac{q_0}{\lambda_1^4 D} \left[1 - \frac{1}{\text{ch} \alpha_1} - \frac{\alpha_1 \text{sh} \alpha_1}{2} \frac{2(1 - \nu) \xi_1 \text{th} \alpha_1 - \text{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}}{(1 - \nu) \xi_1 (\alpha_1 + \text{sh} \alpha_1 \text{ch} \alpha_1) - \text{ch}^2 \alpha_1 \text{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}}\right], \quad (4.4')$$

$$N_y(0, \pm b/2) = \frac{q_0(1 - \nu)}{2 \lambda_1 \xi_1} \cdot \frac{\text{sh} \alpha_1 \text{ch} \alpha_1 - \alpha_1}{(1 - \nu) \xi_1 (\alpha_1 + \text{sh} \alpha_1 \text{ch} \alpha_1) - \text{ch}^2 \alpha_1 \text{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}}, \quad (4.6')$$

$$\text{б)} \quad q(t) = P \delta(t)$$

$$W(a/2, 0) = \frac{P}{4 \lambda_1^3 D \text{ch}^2 \alpha_1} (\text{sh} \alpha_1 \text{ch} \alpha_1 - \alpha_1), \quad (4.2'')$$

$$W(a/2, 0) = \frac{P}{4 \lambda_1^3 D \text{ch}^2 \alpha_1} \left[\left(1 + \frac{4 \xi_1^2}{1 - \nu}\right) \text{sh} \alpha_1 \text{ch} \alpha_1 - \alpha_1 \right], \quad (4.3'')$$

$$W(a/2, 0) = \frac{P}{4 \lambda_1^3 D \text{ch} \alpha_1} \left\{ \text{sh} \alpha_1 - \alpha_1 \text{ch} \alpha_1 - \frac{\alpha_1 \text{sh}^2 \alpha_1 [\text{ch} \alpha_1 \text{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1} - (1 - \nu) \xi_1 \alpha_1 \text{sh} \alpha_1]}{(1 - \nu) \xi_1 (\alpha_1 + \text{sh} \alpha_1 \text{ch} \alpha_1) - \text{ch}^2 \alpha_1 \text{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}} \right\}, \quad (4.4'')$$

$$N_y(0, \pm b/2) = \frac{P(1 - \nu)}{4 \xi_1} \cdot \frac{\alpha_1 \text{sh} \alpha_1}{(1 - \nu) \xi_1 (\alpha_1 + \text{sh} \alpha_1 \text{ch} \alpha_1) - \text{ch}^2 \alpha_1 \text{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}}, \quad (4.6'')$$

$$\text{в)} \quad q(t) = q_0 \cos \frac{\pi}{b} t$$

$$W(a/2, 0) = \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2}, \quad (4.2''')$$

$$W(a/2, 0) = \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \left(1 + \frac{2 \xi_1^2}{1 - \nu} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2}\right), \quad (4.3''')$$

$$W(a/2, 0) = \frac{q_0}{\pi^4 D} \frac{a^4 b^4}{(a^2 + b^2)^2} \left[1 - \frac{(1-\nu)\xi_1 \pi \frac{a}{b} \operatorname{sh}\alpha_1}{(1-\nu)\xi_1(\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha_1 \operatorname{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}} \right], \quad (4.4''')$$

$$N_y(0, \pm b/2) = \frac{q_0 \lambda_1 (1-\nu)}{\xi_1} \frac{ab}{a^2 + b^2} \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_1}{(1-\nu)\xi_1(\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha_1 \operatorname{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}}. \quad (4.6''')$$

Выражения, приводимые в формулах (4.2')-(4.6'), (4.2''), (4.2''') и (4.3'''), совпадают с известными формулами [1,2,6,7].

В формуле (4.6'''), принимая $\alpha_n \gg 1$ и $\alpha_n \ll 1$, т.е. рассматривая приближения узкой и широкой пластинок (относительно краев $y = \pm b/2$), соответственно получим

$$N_y(0, \pm b/2) = q_0 \lambda_1 \frac{1-\nu}{\xi_1} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{(1-\nu)\xi_1 - 1},$$

$$N_y(0, \pm b/2) = q_0 \lambda_1 \frac{1-\nu}{\xi_1} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2(1-\nu)\xi_1 \alpha_1 - \operatorname{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}}.$$

Переходя к численным расчетам и снова предполагая, что нагрузка задана в виде

$$q(x, y) = q_0 \cos \frac{\pi}{b} y \sin \lambda_1 x,$$

представим таблицы, в которых приведены безразмерные значения максимального прогиба

$$W_1 = \frac{b^4}{(a^2 + b^2)^2}, \quad W_2 = \frac{b^4}{(a^2 + b^2)^2} \left(1 + \frac{2\xi_1^2}{1-\nu} \cdot \frac{a^2 + b^2}{b^2} \right),$$

$$W_3 = \frac{b^4}{(a^2 + b^2)^2} \left[1 - \frac{(1-\nu)\xi_1 \pi \frac{a}{b} \operatorname{sh}\alpha_1}{(1-\nu)\xi_1(\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha_1 \operatorname{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}} \right],$$

и безразмерные значения перерезывающих усилий в угловых точках

$$N_y^0(0, \pm b/2) = \frac{1-\nu}{\xi_1} \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2} \cdot \frac{\operatorname{ch}^2 \alpha_1}{(1-\nu)\xi_1(\alpha_1 + \operatorname{sh}\alpha_1 \operatorname{ch}\alpha_1) - \operatorname{ch}^2 \alpha_1 \operatorname{th} \frac{\alpha_1}{\xi_1}}$$

при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$ для различных значений параметра ξ_1 и отношения a/b .

Таблица 1

$a/b \backslash \xi_1$		0	0.05	0.1	0.2
		$\frac{1}{\pi}$	$W_1 \max$	0.8244	-
$W_2 \max$	0.8244		0.8309	0.8504	0.9282
$W_3 \max$	0.8244		0.8305	0.8424	0.8571
1	$W_1 \max$	0.2500	-	-	-
	$W_2 \max$	0.2500	0.2536	0.2643	0.3071
	$W_3 \max$	0.2500	0.2586	0.2735	0.3172
π	$W_1 \max$	0.0085	-	-	-
	$W_2 \max$	0.0085	0.0091	0.0110	0.0190
	$W_3 \max$	0.0085	0.0093	0.0114	0.0196

Таблица 2

$a/b \backslash \xi_1$	0.1	0.2	0.3
$1/\pi$	2.1756	1.1764	0.8539
1	3.8112	2.0916	1.5454
π	2.1522	1.1669	0.8974

Как видно из табл.1, значения W_2 и W_3 монотонно возрастают по ξ_1 и убывают по отношению к a/b . По отношению к a/b монотонно убывают также значения W_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский–Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. /В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел.» Ереван: Изд. «Гитутюн» НАН РА. 2002. С.67-88.
4. Васильев В.В. Классическая теория пластин, история и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
5. Хачатрян А.А. Об изгибе полубесконечной пластинки нагрузкой, распределенной по краю // Изв. АН Арм. ССР. Сер.физ.-мат. наук. 1965. Т.12. №2. С.39-47.
6. Багдасарян З.Р. Изгиб прямоугольной пластинки, равномерно распределенной нормальной нагрузкой. /Уч.записки ЕГУ. Естеств.науки. 2007. №3. С.52-61.
7. Калманок А.С. Строительная механика пластинок. М.: Машстройиздат, 1950. 303с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.10.2007