

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С
ТРЕЩИНОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ

Макарян В.С., Члингярян Г.С.

Ключевые слова: плоскость, трещина, включение, напряжение, точное решение, преобразование.

Key words: plane, crack, inclusion, stress, exact solution, transformation.

Վ.Ս.Մակարյան, Գ.Ս. Չլինգարյան

Բաղադրյալ առաձգական հարթության լարվածային վիճակը, բաժանման եզրին ուղղահայաց ճաքի առկայությամբ

Դիտարկվում է միմյանց կռշտ միացված և տարբեր նյութերից կազմված երկու կիսահարթությունների հարթ խնդիրը: Կիսահարթությունների միացման գծին ուղղահայաց կա ճաք, որը կարող է շարունակվել մի կիսահարթությունից մյուսը: Ենթադրվում է, որ ճաքի ավերին տրված են կամայական նորմալ տեղափոխություններ: Այլ կերպ ասած ճաքը իր մեջ պարունակում է կռշտ ներդրակ: Խնդրի լուծումը հանգեցվում է փաթեթի ինտեգրալ հավասարումներին, որոնք թույլ են տալիս բացահայտ տեսքի ճշգրիտ լուծումներ: Ցույց է տրված, որ ճաքի ծայրակետերի մոտ լարումները ունեն լոգարիթմական եզակիություններ:

V.S.Makaryan, G.S. Chlingaryan

Planar deformation of compound elastic body with crack perpendicular to the attaching line

Consider a planar deformation of two half-surfaces of different medium, hardly attached to each other. There is a crack perpendicular to the attaching line and continued to the second half-surface. There are given some displacements and tangent stresses on the crack faces, in other word, there is a rigid inclusion. The task result in a integral equations of furl. The solutions of that equations, give the stresses and displacement near the crack. It is shown that stresses around the crack have a logarithmic singularity.

Рассматривается плоская задача для двух полуплоскостей из различных материалов, жестко прикрепленных друг к другу. Перпендикулярно к линии раздела материалов есть трещина, которая может продолжаться от одной полуплоскости в другую. Предполагается, что на берегах трещины заданы нормальные перемещения и касательные напряжения, иными словами: трещина содержит жесткое включение с трением. Задача сводится к интегральным уравнениям свертки, которые допускают точные решения в явном виде. Показано, что вблизи граничных точек трещины напряжения имеют логарифмические особенности.

Постановка и граничные условия задачи: пусть две полуплоскости из различных материалов жестко прикреплены друг к другу. В каждой полуплоскости есть трещины, которые перпендикулярны к линии раздела материалов (фиг.1). Внутри трещин расположены абсолютно жесткие включения. Между берегами трещин и жесткими включениями действуют заданные касательные усилия, которые, в частности, могут быть равными нулю. Отнесем индексы «1» к верхней полуплоскости, а индексы «2» – к нижней.

Сначала рассмотрим верхнюю полуплоскость, предположив, что на ее поверхности действуют сосредоточенные нормальная и касательная силы P и Q , соответственно, в точках t и z и симметричные относительно оси Oy (фиг. 2).

Граничные условия задачи запишем в следующем виде:

$$\tau_{xy}^{(1)}[x, y] = q_1(y) \vartheta(a - y) \quad x = 0 \quad 0 < y < \infty, \quad (1)$$

$$u^{(1)}[x, y] = \varphi_1(y) \vartheta(a - y) \quad x = 0 \quad 0 < y < \infty, \quad (2)$$

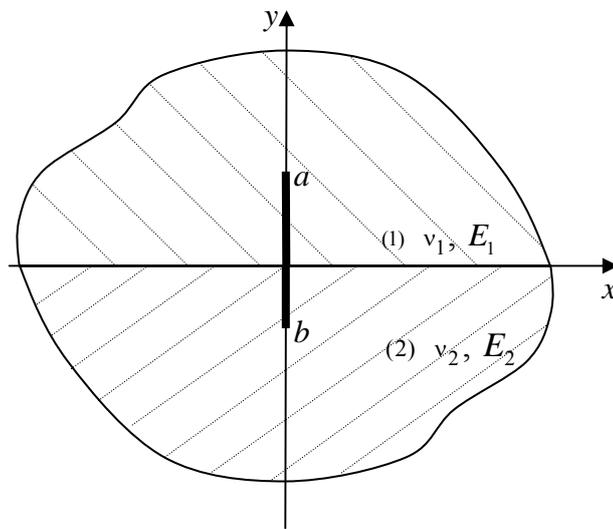
где

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

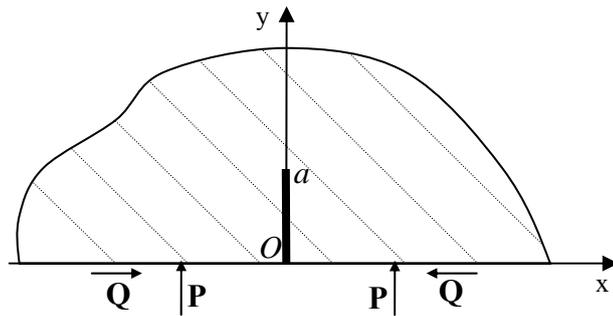
$$\sigma_y^{(1)}[x, y] = P \delta(x-t) \quad 0 < x < \infty \quad y=0, \quad (4)$$

$$\tau_{xy}^{(1)}[x, y] = Q \delta(x-z) \quad 0 < x < \infty \quad y=0, \quad (5)$$

где $\varphi(y)$ – заданная функция, а $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.



Фиг. 1



Фиг. 2

Построение общего решения задачи: решение задачи будем строить при помощи бигармонической функции напряжений Эйри, которую представим в виде суммы следующих двух интегралов Фурье:

$$\Phi_1[x, y] = \int_0^{\infty} [A(\lambda) + \lambda x B(\lambda)] e^{-\lambda x} \cos(\lambda y) d\lambda + \int_0^{\infty} [C(\beta) + \beta y D(\beta)] e^{-\beta y} \cos(\beta x) d\beta \quad 0 < x < \infty \quad 0 < y < \infty. \quad (6)$$

Здесь $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\beta)$ и $D(\beta)$ – неизвестные функции интегрирования, которые должны определиться из граничных условий (1–5). Как известно [1,2], компоненты напряжений и перемещений в плоской задаче теории упругости выражаются через бигармоническую функцию Эйри (6) при помощи следующих соотношений:

$$\Delta^2 \Phi[x, y] = 0 \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{– оператор Лапласа,}$$

$$\sigma_x^{(1)}[x, y] = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \quad \sigma_y^{(1)}[x, y] = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \quad \tau_{xy}^{(1)}[x, y] = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

$$u^{(1)}[x, y] = \frac{1}{E_1} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} dx - \nu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right\} + u_0,$$

$$v^{(1)}[x, y] = \frac{1}{E_1} \left\{ \int \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} dy - \nu_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right\} + v_0. \quad (8)$$

Здесь E_1 и ν_1 – соответственно, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Выразив при помощи соотношений (7–8) компоненты напряжений и перемещений через бигармоническую функцию (6), удовлетворив далее граничным условиям (1–5), на основании интегрального преобразования Фурье получим следующие выражения для неизвестных функций интегрирования:

$$A(\lambda) = -\frac{E_1}{\pi \lambda^2} \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds - \frac{1 - \nu_1}{\pi \lambda^2} \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds,$$

$$B(\lambda) = -\frac{E_1}{\pi \lambda^2} \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds + \frac{1 + \nu_1}{\pi \lambda^2} \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds,$$

$$C(\beta) = -\frac{2P \cos(\beta t)}{\pi \beta^2} + \frac{E_1}{\pi \beta} \int_0^a s \phi_1(s) e^{-\beta s} ds - \frac{1}{\pi \beta^2} \int_0^a q_1(s) e^{-\beta s} [2 + (1 + \nu_1) \beta s] ds,$$

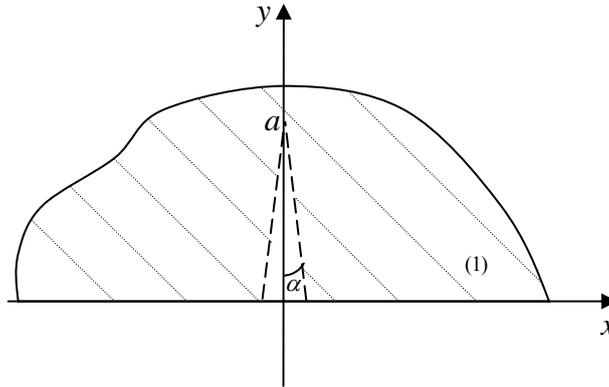
$$D(\beta) = -\frac{2}{\pi \beta^2} P \cos(\beta t) + \frac{2}{\pi \beta^2} Q \sin(\beta z) + \frac{E_1}{\pi \beta} \int_0^a s \phi_1(s) e^{-\beta s} ds -$$

$$-\frac{1}{\pi\beta^2} \int_0^a q_1(s) e^{-\beta s} [2 + (1 + \nu_1)\beta s] ds \quad \phi_{1,2}(y) = d\phi_{1,2}(y)/dy. \quad (9)$$

Напряжение $\sigma_x^{(1)}[x, y]$ на линии $x = 0$ будет определяться при помощи следующей формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}[x, y] = & \frac{4P}{\pi} \frac{t^2 y}{(t^2 + y^2)^2} - \frac{4Q}{\pi} \frac{z^3}{(y^2 + z^2)^2} + \\ & + \frac{4E_1}{\pi} \int_0^a \frac{s^2 y}{(s-y)(s+y)^3} \phi_1(s) ds + \frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{s^2 (s - \nu_1 y)}{(s-y)(s+y)^3} q_1(s) ds, \\ & x = 0, \quad 0 < y < \infty. \end{aligned} \quad (10)$$

Остановимся конкретно на частном случае клиновидного включения, представляющего, на наш взгляд, отдельный интерес (фиг. 3).



Фиг. 3

Положив $q_1(y) \equiv 0$, $\phi_1(y) = -y \operatorname{tg} \alpha + c$, $\phi_1(y) = -\operatorname{tg} \alpha$, из формулы (10) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}[x, y] = & \frac{4}{\pi} P \frac{t^2 y}{(t^2 + y^2)^2} - \frac{4}{\pi} Q \frac{z^3}{(y^2 + z^2)^2} - \\ & - \frac{E_1 \operatorname{tg} \alpha}{2\pi} \left(\ln \left| \frac{a-y}{a+y} \right| + 2 \frac{a(2a+y)}{(a+y)^2} \right), \quad x = 0, \quad 0 < y < \infty, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда следует, что нормальные напряжения $\sigma_x[x, y]$, действующие на линии $x = 0$, имеют логарифмическую особенность в точке $x = 0, y = a$, а в точке $x = 0, y = 0$ ограничены [3]. Рассмотрим теперь случай, когда

$$q_1(y) = (a - y)q_0, \quad \varphi_1(y) = 0, \quad (12)$$

т.е. трение между включением и берегами трещины задано в виде линейной функции. В этом случае формула (10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)}[x, y] = & \frac{4P}{\pi} \frac{t^2 y}{(t^2 + y^2)^2} - \frac{4Q}{\pi} \frac{z^3}{(y^2 + z^2)^2} - \frac{4q_0 a}{\pi} \ln y + \\ & + \frac{q_0}{4\pi} \left(-\frac{4a(3(3 + \nu_1)y + 2a(4 + \nu_1))}{a + y} + (1 - \nu_1)(a - y) \ln(a - y)^2 - \right. \\ & \left. - 16(2 + \nu_1)y \ln y + 2((7 + \nu_1)a + (17 + 7\nu_1)y) \ln(a + y) \right). \quad (13) \end{aligned}$$

Из формулы (13) легко заметить, что нормальные напряжения имеют логарифмические особенности в точке $x = 0, y = 0$, а в точке $x = 0, y = a$ ограничены.

Производные перемещений $u^{(1)}[x, y]$ и $v^{(1)}[x, y]$ по x на линии $y = 0$ равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(1)}[x, y]}{\partial x} = & \frac{(1 - \nu_1)P}{E_1} (\delta(x + t) + \delta(x - t)) - \frac{2Q}{\pi E_1} \left(\frac{1}{z + x} + \frac{1}{z - x} \right) + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{s x^2}{(s^2 + x^2)^2} \phi_1(s) ds - \frac{4}{\pi E_1} \int_0^a \frac{s (s^2 - \nu_1 x^2)}{(s^2 + x^2)^2} q_1(s) ds, \\ & y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(1)}[x, y]}{\partial x} = & \frac{2P}{\pi E_1} \left(\frac{1}{x + t} + \frac{1}{x - t} \right) + \frac{(1 - \nu_1)Q}{E_1} [\delta(x + z) - \delta(x - z)] - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^a \frac{s^2 x}{(s^2 + x^2)^2} \phi_1(s) ds + \frac{4}{\pi E_1} \int_0^a \frac{x (x^2 + (2 + \nu_1)s^2)}{(x^2 + s^2)^2} q_1(s) ds, \\ & y = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (15) \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь нижнюю полуплоскость. Обозначив коэффициенты упругости через E_2 и ν_2 , граничные условия запишем в следующем виде:

$$\tau_{xy}^{(2)}[x, y] = q_2(y) \vartheta(y - b) \quad u^{(2)}[x, y] = \varphi_2(y) \vartheta(y - b) \quad x = 0, \quad -\infty < y < 0, \quad (16)$$

$$\sigma_y^{(2)}[x, y] = P \delta(x - t) \quad \tau_{xy}^{(2)}[x, y] = Q \delta(x - z) \quad 0 < x < \infty, \quad y = 0. \quad (17)$$

В этом случае для производных компонент перемещений получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(2)}[x, y]}{\partial x} &= \frac{(1-\nu_2)P}{E_2} (\delta(x+t) + \delta(x-t)) + \frac{2Q}{\pi E_2} \left(\frac{1}{x+z} - \frac{1}{x-z} \right) + \\ &+ \frac{4}{\pi} \int_b^0 \frac{s x^2}{(s^2 + x^2)^2} \phi_2(s) ds + \frac{4}{\pi E_2} \int_b^0 \frac{s (s^2 - \nu_2 x^2)}{(s^2 + x^2)^2} q_2(s) ds, \\ &y = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{(2)}[x, y]}{\partial x} &= -\frac{2P}{\pi E_2} \left(\frac{1}{x+t} + \frac{1}{x-t} \right) - \frac{(1-\nu_2)Q}{E_2} [\delta(x-z) - \delta(x+z)] - \\ &- \frac{4}{\pi} \int_b^0 \frac{s^2 x}{(s^2 + x^2)^2} \phi_2(s) ds + \frac{4}{\pi E_2} \int_b^0 \frac{x (x^2 + (2 + \nu_2) s^2)}{(x^2 + s^2)^2} q_2(s) ds, \\ &y = 0, \quad 0 < x < \infty. \end{aligned} \quad (18)$$

Удовлетворим условиям контакта на границе раздела материалов $y = 0$

$$u^{(1)}[x, 0] = u^{(2)}[x, 0], \quad v^{(1)}[x, 0] = v^{(2)}[x, 0] \quad 0 \leq x < \infty \quad (19)$$

Продифференцировав равенства (19) по x и подставив сюда значения из (14), (15) и (18), получим следующие сингулярные интегральные уравнения для определения контактных нормального и касательного напряжений, действующих на контактной линии $y = 0$:

$$\frac{\pi}{2} \mu P(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(t)}{x-t} dt + \kappa f_1(x) = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad (20)$$

$$\frac{\pi}{2} \mu Q(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{x-t} dt + \kappa f_2(x) = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad (21)$$

где введены следующие обозначения:

$$\sigma_y(x, y) \Big|_{y=0} \equiv P(x) \quad \tau_{xy}(x, y) \Big|_{y=0} \equiv Q(x), \quad (22)$$

$$\mu \equiv \frac{E_2(1-\nu_1) - E_1(1-\nu_2)}{E_1 + E_2} \quad \kappa \equiv \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &\equiv \int_0^a \frac{s x^2}{(s^2 + x^2)^2} \phi_1(s) ds - \frac{1}{E_1} \int_0^a \frac{s (s^2 - \nu_1 x^2)}{(s^2 + x^2)^2} q_1(s) ds - \\ &- \int_b^0 \frac{s x^2}{(s^2 + x^2)^2} \phi_2(s) ds - \frac{1}{E_2} \int_b^0 \frac{s (s^2 - \nu_2 x^2)}{(s^2 + x^2)^2} q_2(s) ds, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
f_2(x) \equiv & -\int_0^a \frac{s^2 x}{(s^2 + x^2)^2} \phi_1(s) ds + \frac{1}{E_1} \int_0^a \frac{x(x^2 + (2 + \nu_1)s^2)}{(x^2 + s^2)^2} q_1(s) ds + \\
& + \int_b^0 \frac{s^2 x}{(s^2 + x^2)^2} \phi_2(s) ds - \frac{1}{E_2} \int_b^0 \frac{x(x^2 + (2 + \nu_2)s^2)}{(x^2 + s^2)^2} q_2(s) ds. \quad (25)
\end{aligned}$$

Функции (22) на отрицательные значения аргумента продолжены следующим образом:

$$P(t) = P(-t), \quad Q(t) = -Q(-t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (26)$$

Применив к этим уравнениям преобразование Фурье [4, 5], получим:

$$\frac{\pi}{2} \mu \bar{P}(\omega) + i \pi \bar{Q}(\omega) \operatorname{sign}(\omega) + \kappa \bar{f}_1(\omega) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (27)$$

$$\frac{\pi}{2} \mu \bar{Q}(\omega) + i \pi \bar{P}(\omega) \operatorname{sign}(\omega) + \kappa \bar{f}_2(\omega) = 0, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (28)$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$\bar{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} F(x) dx, \quad (29)$$

а также учтено, что имеет место следующее известное соотношение [6]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} dx \int_0^{\infty} \frac{F(t)}{x-t} dt = -i \pi \bar{F}(\omega) \operatorname{sign}(\omega).$$

Решая систему уравнений (27–28) относительно $\bar{P}(\omega)$ и $\bar{Q}(\omega)$, получим:

$$\bar{P}(\omega) = -\frac{2}{\pi(\mu^2 + 4)} (\kappa \mu \bar{f}_1(\omega) - 2 \kappa i \bar{f}_2(\omega) \operatorname{sign} \omega), \quad -\infty < \omega < \infty, \quad (30)$$

$$\bar{Q}(\omega) = -\frac{2}{\pi(\mu^2 + 4)} (\kappa \mu \bar{f}_2(\omega) - 2 \kappa i \bar{f}_1(\omega) \operatorname{sign} \omega), \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (31)$$

Подставив сюда значения из (29) и применив обратное преобразование Фурье, после некоторых несложных преобразований окончательно получим следующие формулы для определения контактных напряжений, действующих на линии раздела материалов $y = 0$

$$P(x) \equiv \sigma_y(x, 0) = \frac{2\kappa}{\pi(\mu^2 + 4)} \left[\int_0^a \frac{s(s^2 - (1 + \mu)x^2)}{(s^2 + x^2)^2} \phi_1(s) ds + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_b^0 \frac{s(s^2 - x^2(1-\mu))}{(s^2 + x^2)^2} \phi_2(s) ds - \int_0^a \frac{s[(3-\mu+v_1)s^2 + (1-(1-\mu)v_1)x^2]}{E_1(s^2 + x^2)^2} q_1(s) ds - \\
& \left. - \int_b^0 \frac{s[(3-\mu+v_2)s^2 + (1-(1-\mu)v_2)x^2]}{E_2(s^2 + x^2)^2} q_2(s) ds \right], \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(x) \equiv \tau_{xy}(x, 0) &= \frac{2\kappa}{\pi(\mu^2 + 4)} \left[\int_0^a \frac{x(x^2 - (1-\mu)s^2)}{(s^2 + x^2)^2} \phi_1(s) ds + \right. \\
& + \int_b^0 \frac{x(x^2 - (1+\mu)s^2)}{(s^2 + x^2)^2} \phi_2(s) ds - \int_0^a \frac{x[(1+\mu-v_1)x^2 + (3+v_1+(2+v_1)\mu)s^2]}{E_1(s^2 + x^2)^2} q_1(s) ds + \\
& \left. + \int_b^0 \frac{x[(1+\mu-v_2)x^2 + (3+v_2+(2+v_2)\mu)s^2]}{E_1(s^2 + x^2)^2} q_2(s) ds \right]. \quad (33)
\end{aligned}$$

Остановимся конкретно на частном случае клиновидного включения (фиг.3), положив:

$$q_1(y) = q_2(y) \equiv 0, \quad \phi_1(y) = -y \operatorname{tg} \alpha + c, \quad \phi_2(y) = y \operatorname{tg} \beta + c, \quad (34)$$

$$\phi_1(y) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \phi_2(y) = \operatorname{tg} \beta, \quad c = a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} \beta. \quad (35)$$

В этом случае формулы (32) и (33) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, y) &= \frac{\kappa \operatorname{tg}(\alpha)}{\pi(\mu^2 + 4)} \left(\frac{(2+\mu)a^2}{a^2 + x^2} + \ln \left(\frac{x^2}{a^2 + x^2} \right) \right) + \\
& + \frac{\kappa \operatorname{tg} \beta}{\pi(\mu^2 + 4)} \left(\frac{(2-\mu)b^2}{b^2 + x^2} + \ln \left(\frac{x^2}{b^2 + x^2} \right) \right), \quad y=0, \quad 0 < x < \infty, \quad (36)
\end{aligned}$$

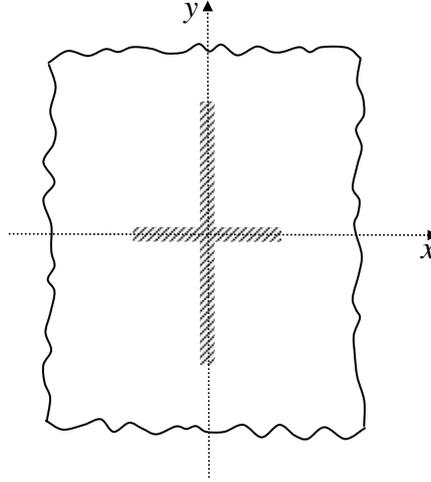
$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(x, y) &= -\frac{\kappa}{\pi(\mu^2 + 4)} \left(\operatorname{tg} \alpha \left[\frac{(2-\mu)ax}{a^2 + x^2} + \mu \operatorname{arctg}(a/x) \right] + \right. \\
& \left. + \operatorname{tg} \beta \left[\frac{(2+\mu)bx}{b^2 + x^2} - \mu \operatorname{arctg}(b/x) \right] \right), \quad y=0, \quad 0 < x < \infty. \quad (37)
\end{aligned}$$

Как видно из формул (36–37), контактные нормальные напряжения, действующие на линии $y = 0$ (линия раздела материалов), имеют логарифмические особенности. Что касается контактных тангенциальных напряжений, то они всюду ограничены.

При рассмотрении случая, когда:

$$q_1(y) = (a-y)q_1, \quad q_2(y) = (y-b)q_2, \quad \varphi_1(y) = \varphi_2(y) = 0, \quad (38)$$

легко выясняется, что как нормальные, так и тангенциальные контактные



Фиг. 4

напряжения сохраняют логарифмические особенности в точке $x = 0, y = 0$.

В дополнение к данной задаче, рассмотрим случай крестообразного включения (фиг. 4). В силу симметрии относительно осей Ox и Oy , будем рассматривать только четверть-плоскость $0 < x < \infty$ и $0 < y < \infty$. Тогда бигармоническую функцию напряжений можно представить в виде (6).

Граничные условия будут иметь следующий вид:

$$\tau_{xy}[x, y] = q_1(y) \vartheta(a-y) \quad x = 0, \quad 0 < y < \infty, \quad (39)$$

$$\tau_{xy}[x, y] = q_2(y) \vartheta(b-y) \quad y = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (40)$$

$$u[x, y] = \varphi_1(y) \vartheta(a-y) \quad x = 0, \quad 0 < y < \infty, \quad (41)$$

$$u[x, y] = \varphi_2(y) \vartheta(b-y) \quad y = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (42)$$

Удовлетворив граничным условиям (39–42), при помощи соотношений (6–8) находим неизвестные функции интегрирования в следующем виде:

$$A(\lambda) = -\frac{1}{\pi\lambda^2} \left((1-\nu) \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds \right),$$

$$B(\lambda) = -\frac{1}{\pi\lambda^2} \left(-(1+\nu) \int_0^a q_1(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^a \phi_1(s) \sin(\lambda s) ds \right),$$

$$C(\beta) = -\frac{1}{\pi\beta^2} \left((1-\nu) \int_0^b q_2(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^b \phi_2(s) \sin(\lambda s) ds \right),$$

$$D(\beta) = -\frac{1}{\pi\beta^2} \left(-(1+\nu) \int_0^b q_2(s) \sin(\lambda s) ds + E \int_0^b \phi_2(s) \sin(\lambda s) ds \right).$$

Напряжение $\sigma_x[x, y]$ на линии $x = 0$ будет определяться при помощи следующей формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_x[x, y] = & \frac{1-\nu}{2\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{s-y} + \frac{1}{s+y} \right) q_1(s) ds + \frac{E}{2\pi} \int_0^a \left(\frac{1}{s-y} + \frac{1}{s+y} \right) \phi_1(s) ds - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^b \frac{s((1-\nu)y^2 + (3+\nu)s^2)}{(s^2+y^2)^2} q_2(s) ds - \frac{E}{\pi} \int_0^b \frac{s(y^2-s^2)}{(s^2+y^2)^2} \phi_2(s) ds \end{aligned}$$

$$x = 0, \quad 0 < y < \infty. \quad (43)$$

Анализ формулы (43) вполне аналогичен приведенному выше анализу. В заключение заметим, что во всех рассмотренных выше случаях, включения могут быть расположены произвольным образом по какому-либо контуру Γ . В этом случае интегралы, распространенные на отрезках $[0; a]$, $[0; b]$, должны быть заменены на интегралы, распространенные по контуру Γ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз. М.: 1958. 370с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
3. Макарян В. С., Саркисян В.Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1990. Т.43. №2. С.3–11.
4. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир, 1962. 279с.
5. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295с.
6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды в 3-х т. М.: Физматлит, 2003.
7. Макарян В.С. Поведение трещины под сжимающей нагрузкой.// Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №2. С.144-152.
8. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спец.курс. М.: Наука, 1965. 327с.
9. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1984.
10. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255с.
11. Григорян Э.Х. Об одном подходе к решению задач для упругой полуплоскости, содержащей упругое конечное включение, выходящее на границу полуплоскости. / Межвуз. сб. науч. тр. Механика. Ереван: Изд. ЕГУ, 1987. №6.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
19.11.2007