ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ «АНИЗОТРОПНЫХ» СТЕРЖНЕЙ

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: анизотропия, неоднородность, стержень, устойчивость, изгиб, кручение.
Keywords: anisotropic, nonhomogeneous, bar, stability, bending, torsion.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Անիզոտրոպ ձողերի կայունության մասին

Գլանային անիզոտրոպիա ունեցող նյութը, երբ դիտարկվում է դեկարտային կորդինատներով ստացվում է անհամասեռություն: Ընդհանրացվում է ուղիղների վարկածը տարբեր դեպքերի համար: Ուսումնասիրվել են կայունության խնդիրներ ոլորող մոմենտների և առանցքային սեղման դեպքերի համար:

L.F. Movsisyan
On the Stability of Anisotropic Beam

On consideration of cylindrical anisotropic materials in cartesian sistem of coordinates the material behaves is as nonhomogenusus one. The three problems of stability of bar of circular cross section under action of torsion moment and two problems for bar of rectangular cross section under axial compression are considered. In all cases one must generalise of rectilinear hypotheses.

Почему термин анизотропия в кавычках? Дело в том, что, если имеется анизотропия материала в одной системе координат, то в другой системе он уже будет анизотропным и неоднородным, т.е. имеется своего рода координатная неоднородность. В частности, если, например, деревянный брусок ([1] с.69) в цилиндрической системе ортотропен, то уже в декартовой он будет неоднородным.

Изучаются три типа задач устойчивости для такого типа материалов. Основное внимание уделено особенности постановки этих задач, так как приходится обобщить гипотезу прямых.

Различные задачи для кручения и изгиба стержней в постановке Сен-Венана методом физического малого параметра рассмотрены в [2].

1.Если материал ортотропен в цилиндрической системе координат, то в декартовой системе, когда одна из осей (z) совпадает с осью анизотропии, законы упругости запишутся в виде [1, с. 67-69].

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = b_{11}\sigma_x + b_{12}\sigma_y + b_{13}\sigma_z + b_{16}\sigma_{xy} \\ \text{------------------} \\ \varepsilon_{xz} = b_{45}\sigma_{yz} + b_{55}\sigma_{xz}\end{gathered} \tag{1.1}$$

причем

$$\begin{gathered}b_{11} = a_{11}\cos^4\varphi + \left(2a_{12} + a_{66}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + a_{22}\sin^4\varphi \\ \text{------------------} \\ b_{45} = \left(a_{45} - a_{55}\right)\sin\varphi\cos\varphi\end{gathered} \tag{1.2}$$

где a_{ij} – постоянные в цилиндрической системе.

Здесь помимо того, что уже имеется общая анизотропия, надо учесть еще, что при рассмотрении задач в декартовой системе координат от r и φ должны перейти к x и y по

$$x = r\cos\varphi\ ,\quad y = r\sin\varphi\ ,\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \qquad (1.3)$$

Будут рассмотрены три задачи устойчивости.

2. Стержень кругового сечения подвергается кручению – на концах действуют крутящие моменты M . Оси стержня и анизотропии совпадают с осью z . Так как потеря устойчивости происходит пространственным образом [3], примем, что изгиб происходит в плоскостях xz и yz. Примем гипотезу прямых в следующем виде (здесь гипотеза не нуждается в обобщении):

$$\begin{gathered} u_x = u(z)\ ;\qquad u_y = v(z), \\ u_z = f(z)\frac{x}{R}\ ;\ u_z = \psi(z)\frac{y}{R}. \end{gathered} \qquad (2.1)$$

Известно [1], если ось анизотропии проходит по телу, то между упругими постоянными имеется связь. При составлении уравнений устойчивости учитывалось это обстоятельство, и они имеют вид:

$$\begin{gathered} D\frac{d^2 f}{d\xi^2} = l^2 C\left(f + \varepsilon\frac{du}{d\xi}\right), \\ C\left(\frac{df}{d\xi} + \varepsilon\frac{d^2u}{d\xi^2}\right) + \frac{M}{l}\varepsilon\frac{d^3v}{d\xi^3} = 0, \\ D\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = l^2 C\left(\psi + \varepsilon\frac{d\nu}{d\xi}\right), \\ C\left(\frac{d\psi}{d\xi} + \varepsilon\frac{d^2v}{d\xi^2}\right) - \frac{M}{l}\varepsilon\frac{d^3u}{d\xi^3} = 0. \end{gathered} \qquad (2.2)$$

Здесь $\xi = z/l$ – безразмерная координата, l – длина стержня, R – радиус сечения

$$D = \frac{\pi R^4}{4}B_{33}\ ,\quad C = \pi R^2 B_{44}\ ,\quad \varepsilon = \frac{R}{l}. \qquad (2.3)$$

Решением системы (2.2) будет:

$$\begin{gathered} u = c_1\cos s_1\xi + c_2\sin s_1\xi + c_3\cos s_2\xi + c_4\sin s_2\xi + A_1\xi + A_2\ , \\ \nu = z_1\left(c_2\cos s_1\xi - c_1\sin s_1\xi\right) + z_2\left(c_4\cos s_2\xi - c_3\sin s_2\xi\right) + D_1\xi + D_2\,, \\ f = \varepsilon z_1\left(c_1\sin s_1\xi - c_2\cos s_1\xi\right) + \varepsilon z_2\left(c_3\sin s_1\xi - c_4\cos s_2\xi\right) - \varepsilon A_1\,, \\ \psi = \lambda\varepsilon\left(c_1\cos s_1\xi + c_2\sin s_1\xi + c_3\cos s_2\xi + c_4\sin s_2\xi\right) - \varepsilon D_1\,, \end{gathered} \qquad (2.4)$$

где

$$\begin{gathered} z_i = \frac{s_i}{1+\alpha s_i^2}\ \left(i = 1,2\right),\qquad s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4\alpha\lambda^2}}{2\alpha\lambda}, \\ \lambda = \frac{Ml}{D}\ ,\qquad \alpha = \frac{1}{4}\varepsilon^2\frac{B_{33}}{B_{44}}. \end{gathered} \qquad (2.5)$$

Удовлетворяя условиям свободного опирания –

$$u = \nu = f = \psi = 0 \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \xi = 1, \qquad (2.6)$$

получим

$$2\left(1 - \cos s_1\cos s_2\right)z_1 z_2 = \left(z_1^2 + z_2^2\right)\sin s_1\sin s_2\,, \qquad (2.7)$$

но так как $z_1 = z_2$, то уравнение превратится в

$$\cos(s_1 - s_2) = 1, \qquad (2.8)$$

отсюда для минимального критического момента получим

$$M_{\text{кр}} = \frac{\pi R^3}{4}\sqrt{B_{33}B_{44}}.$$

3. Рассмотрим задачу устойчивости стержня прямоугольного сечения $(b \times h)$ с центром, не совпадающим с осью анизотропии цилиндрической системы. Ось стержня направлена по z и изгиб происходит в плоскости xz. Тогда геометрическая часть гипотезы прямых должна быть обобщена.

Непротиворечивая система относительно перемещений выглядит так:

$$u_x = u(z) + y\theta(z)\ , \quad u_y = \nu + x\theta\ , \quad u_z = w + xf(z), \qquad (3.1)$$

а из закона Гука необходимые уравнения –

$$\begin{aligned} \sigma_z &= B_{33}e_z + B_{36}e_{xy}\ , \quad \sigma_{xz} = B_{45}e_{yz} + B_{55}e_{xx}, \\ \sigma_{xy} &= B_{36}e_z + B_{66}e_{xx}\ , \quad \sigma_{yz} = B_{44}e_{yz} + B_{45}e_{xz}. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

При изотропном материале вопрос, в какой плоскости происходит потеря устойчивости, решается однозначно. Однако, для анизотропных материалов геометрическое условие уже недостаточно. Например, если $h < b$, но $\frac{B_{44}}{B_{55}}\frac{h^2}{b^2} < 1$, потеря устойчивости может происходить в плоскости yz.

Надо учесть, что по (1.2) и (1.3) B_{ij} – функции от x и y.

Систему уравнений при осевом сжатии силой P получим на основе [4-6]

$$\frac{dM_1}{dz} = N_1, \quad \frac{dN_1}{dz} = P\frac{d^2u}{dz^2}\ , \quad \frac{dN_2}{dz} = -P\frac{d^2\nu}{dz^2},$$

$$\frac{dT_1}{dz} = P\frac{d^2w}{dz^2}\ , \quad \frac{dH}{dz} + P(1+\alpha)\frac{h^2}{12}\frac{d^2\theta}{dz^2} = N_2, \qquad (3.3)$$

здесь

$$M_1 = \int_F \sigma_z x dF\ ...., \quad H = \int_F \left(\sigma_{yz}\cdot x + \sigma_{xz}Y\right)dF. \qquad (3.4)$$

Учитывая, что B_{ij} из (3.2) – функции от x и y, интегралы (3.4) в замкнутом виде не вычисляются. Под D_{ij}, C_{ij} примем некоторые приведенные значения.

К тому же надо учесть, что для декартовой анизотропии, где уже B_{ij} – постоянные, качественная картина задачи устойчивости получается совершенно аналогичной. Поэтому основное внимание обратим на появление новых членов.

Уравнения в перемещениях распадаются на две системы:

$$D_{33}\frac{d^2 f}{dz^2} == C_{55}\left(f + \frac{du}{dz}\right) + C_{45}\frac{d\nu}{dz},$$

$$C_{55}\left(\frac{df}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + C_{45}\frac{d^2\nu}{dz^2} - P\frac{d^2u}{dz^2} = 0, \qquad (3.5)$$

$$C_{44}\frac{d^2u}{dz^2}+C_{45}\left(\frac{df}{dz}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)-P\frac{d^2\nu}{dz^2}=0,$$

$$C_{33}\frac{d^2w}{dz^2}+2C_{36}\frac{d\theta}{dz}-P\frac{d^2w}{dz^2}=0,$$

$$\left(D_{44}+\alpha D_{55}\right)\frac{d^2\theta}{dz^2}-2C_{66}\theta-C_{36}\frac{dw}{dz}-P\frac{h^2}{12}\left(1+\alpha\right)\frac{d^2\theta}{dz^2}=0, \qquad (3.6)$$

$$D_{ij}=B_{ij}\frac{h^3b}{12}, \quad C_{ij}=B_{ij}\cdot hb, \quad \alpha=b^2/h^2=\frac{J_x}{J_y}.$$

При граничных условиях

$$u=\nu=\frac{df}{dz}=w=\frac{d\theta}{dz}=0 \text{ при } z=0,\ z=l \qquad (3.7)$$

системы для минимальных значений критических сил дают, соответственно:

$$P^{(1)}_{\text{кр}}=D_{33}\lambda^2\left(1-\frac{c_{44}+c_{55}}{c_{44}c_{55}-c_{45}^2}D_{33}\lambda^2\right),$$

$$P^{(2)}_{\text{кр}}=\frac{c_{33}D\lambda^2+2\left(c_{33}c_{66}-c_{36}^2\right)}{D\lambda^2+2c_{66}}, \qquad (3.8)$$

$$D=D_{44}+\alpha D_{55}, \quad \lambda=\pi/l.$$

При получении (3.8) удерживались по порядку главные члены. Легко видеть, что $P^{(1)}_{\text{кр}}<P^{(2)}_{\text{кр}}$.

4. Если брать стержень по оси x, то неоднородность будет и по этой оси, и при приведении трехмерной задачи к одномерной, только при интегрировании по y возникают сложности. Если предположить, что оно как-нибудь совершенно, полученная система будет с переменными по x коэффициентами. Поэтому, как и в предыдущем примере, примем, что это все верно для некоторых осредненных значений, а, скорее всего, для декартовой анизотропии, тем более опять качественная картина одинаковая.

Необходимые уравнения из закона Гука

$$\sigma_x=B_{11}\varepsilon_x+B_{16}e_{xy}, \quad \sigma_{yz}=B_{44}e_{yz}+B_{45}e_{xz},$$
$$\sigma_{xy}=B_{16}\varepsilon_x+B_{66}e_{xy}, \quad \sigma_{xz}=B_{45}e_{yz}+B_{55}e_{xz}. \qquad (4.1)$$

При такой анизотропии [6] изгиб сопровождается кручением, поэтому аналог гипотезы прямых в этом случае должен быть сформулирован –

$$u_x=z\varphi\left(x\right), \quad u_y=z\theta\left(x\right), \quad u_z=w\left(x\right)+y\theta\left(x\right). \qquad (4.2)$$

Изгиб происходит в плоскости xz и θ – угол закручивания.

Уравнения устойчивости при осевой сжимающей силе будет иметь вид:

$$\frac{dN}{dx}=P\frac{d^2w}{dx^2}, \quad \frac{dM}{dx}=N,$$
$$\frac{dH}{dx}-P\frac{h^2}{12}\left(1+\alpha\right)\frac{d^2\theta}{dx^2}=N_1 \quad \alpha=\frac{J_z}{J_y}=\frac{b^2}{h^2}. \qquad (4.3)$$

Здесь крутящий момент H определяется как

$$H = \int_F \left(\sigma_{xy} z + \sigma_{x\alpha} y \right) dF. \tag{4.4}$$

В перемещениях уравнения устойчивости будут

$$D_{11} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + D_{16} \frac{d^2\theta}{dx^2} = C_{45}\theta + C_{55} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right),$$

$$C_{45} \frac{d\theta}{dx} + C_{55} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

$$D_{16} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(D_{66} + D_{55}\alpha \right) \frac{d^2\theta}{dx^2} - P \frac{h^2}{12} (1 + \alpha) \frac{d^2\theta}{dx^2} =$$

$$= C_{44}\theta + C_{45} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right). \tag{4.5}$$

Как видно из (4.5) , для ортотропного материала изгиб не сопровождается кручением.

Ищем решение (4.5) для условий свободного опирания:

$$w = \varphi' = \theta' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l, \tag{4.6}$$

$$w = \bar{w} \sin\lambda_m x, \quad \varphi = \bar{\varphi} \cos\lambda_m x, \quad \theta = \bar{\theta} \cos\lambda_m x, \ \lambda_m = \frac{m\pi}{l}. \tag{4.7}$$

Тогда для определения безразмерной критической силы $\bar{P} = \dfrac{Pl^2}{D_{11}}$ получается уравнение

$$\bar{P}^2 (1+\alpha) m^2 \left(m^2 + \delta\beta_{55} \right) - \bar{P}\delta \Big\{ \left(m^2 + \delta\beta_{55} \right) \left[\left(\beta_{66} + \beta_{55} \right) m^2 + \delta\beta_{44} \right] -$$

$$- \left(\beta_{16} m^2 + \delta\beta_{45} \right)^2 + (1+\alpha) m^4 \beta_{55} \Big\} +$$

$$+ \delta^2 \Big\{ m^2 \left(\beta_{16} m^2 + \delta\beta_{45} \right) \left(\beta_{45} + \beta_{16}\beta_{55} \right) - \beta_{16}\beta_{45} m^2 \left(m^2 + \delta\beta_{55} \right) \Big] -$$

$$- \beta_{55} m^2 \left[\left(\beta_{66} + \alpha\beta_{55} \right) m^2 + \delta\beta_{44} \right] \Big\} = 0, \tag{4.8}$$

здесь $\beta_{ij} = \dfrac{B_{ij}}{B_{11}}, \qquad \delta = \dfrac{12 l^2}{h^2}.$

Корни уравнения (4.8) определялись для материала однонаправленного углепластика [7, с.290] с данными

$$B_{11} = 182.2 \text{ ГП}a, \quad B_{12} = 2.897 \text{ ГП}a,$$
$$B_{22} = 10.34 \text{ ГП}a \ , \quad B_{66} = 6.9 \text{ ГП}a \ ,$$

перевернутый на угол $\pi/4$.

Так как данных для коэффициента сдвига в плоскостях xz и zy нет, то в качестве такового брались

$$\beta_{16} = 0,7604 \ ; \ \beta_{66} = 0,8267 \ ; \quad \beta_{44} = \beta_{55} = 3\beta, \ \beta_{45} = \beta.$$

Вычисления проводились для различных α, β и $\delta' = \delta\pi^{-2}$. В таблице приведены значения минимальных корней $\bar{P}\pi^2$. Вторые значения корней, которые возникают вследствие кручения, во много больше, чем приведенные.

Таблица

β / δ',α		0,1	0,04	0,02
100	1	0,8537	0,8012	0,7190
	4	0,8562	0,8029	0,7202
	25	0,8705	0,8131	0,7267
200	1	0,8709	0,8447	0,8010
	4	0,8722	0,8457	0,8021
	25	08820	0,8534	0,8078
300	1	0,8757	0,8591	0,8298
	4	0,8783	0,8599	0,8307
	25	0,8846	0,8661	0,8355

Критическая сила достигается при $m=1$, т.е. потеря устойчивости происходит по одной полуволне.

Как видно из таблицы, это и естественно, при увеличении β критическая сила уменьшается, а ее увеличение с увеличением δ' не противоречит разумному соображению. Дело в том, что, если $\delta' \sim \frac{l^2}{h^2}$, ведь $\overline{P} \sim l^2$.

Пожалуй, самый интересный вывод в том, что учет кручения уменьшает значение критической силы, и в приведенных примерах разница между ними составляет порядка 10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. ЕГУ, 1997. 241 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Изд. ФМЛ, 1963. 879 с.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
5. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1973. Т.26. №6. С.18-29.
6. Мовсисян Л.А. К учету поперечного обжатия в тонких пластинах. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1999. Т.52. №2. С.30–35.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.05.2006