ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

УЧЕТ НЕПРЕРЫВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Барсегян В. Р., Геворкян Г. А.

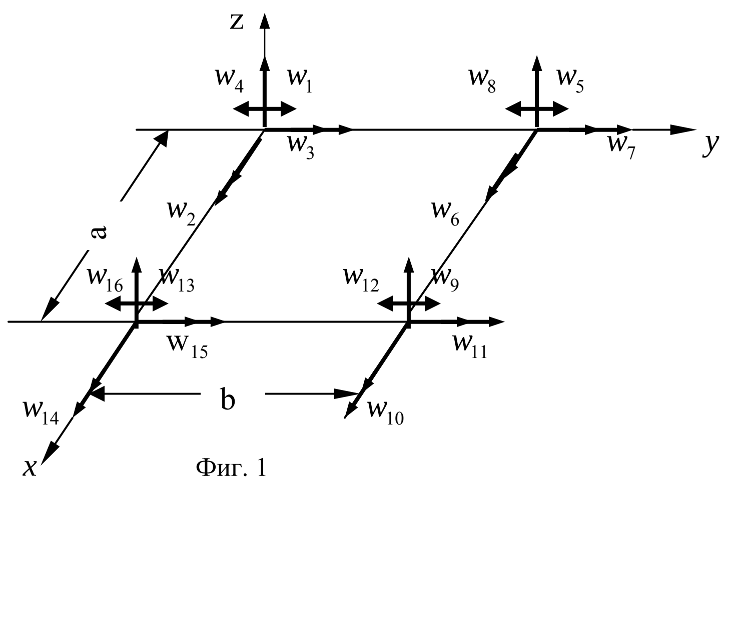
Ключевые слова: конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, пластина, изгиб.
Keywords: finite elements, junction transferences, quadratic programming, plate, bending.

Վ. Ռ. Բարսեղյան, Գ. Ա. Գևորգյան
Լարումների անընդհատության հաշվառումը վերջավոր տարրերի մեթոդով սալերի ծռման խնդիրների լուծման ժամանակ
Առաջարկվում է քառանկյունաձև վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ, որում լարումների անընդհատության հաշվառումով սալերի ծռման խնդիրների լուծումը հանգեցվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդրի:

V. R. Barseghyan, G. A. Gevorgyan
Consideration of Continuousness of Tensions in Solving the Tasks of Plate Bending by the Finite - Element Method
It is suggested a modification of tetragonal finite - element method, where the tasks of plate bending with taking into consideration continuousness of tensions are reduced to quadratic programming ones.

Предлагается модификация метода конечных элементов четырехугольной формы, при котором решения задач изгиба пластин с учетом непрерывности напряжений сводятся к задачам квадратичного программирования.

Срединную плоскость плиты представим в виде совокупности $s \in N = \{1, 2, ..., \overline{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Рассмотрим прямоугольный элемент плиты в плоскости xy, показанный на фиг.1. Обозначим через $w_s = (w_1^s, w_2^s, ..., w_{16}^s)^T$ вектор узловых перемещений. Нумерация и положительные направления компонентов этого вектора приведены на фиг.1. Здесь вектором с двумя стрелками указано положительное направление поворота, связанное с движением штопора в направлении вектора, а вектором с двухсторонними стрелками указан угол сдвига.



Фиг. 1

Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем следующим многочленом четвертого порядка, содержащим 16 неизвестных параметров:

$$w^s(x,y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \Phi_i(x,y), \tag{1}$$

тогда, при $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ для функции Эрмита $\Phi_i(x,y)$ имеем [4]:

$$\Phi_1^s(\xi,\eta) = 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3,$$

$$\Phi_2^s(\xi,\eta) = b(\eta - 2\eta^2 - 3\xi^2\eta + \eta^3 + 2\xi^3\eta + 6\xi^2\eta^2 -$$
$$- 3\xi^2\eta^3 - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta,$$

$$\Phi_3^s(\xi,\eta) = a(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3 + 3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 6\xi^2\eta^2 +$$
$$+4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_4^s(\xi,\eta) = ab(\xi\eta - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + \xi^3\eta + \xi\eta^3 + 4\xi^2\eta^2 -$$
$$-2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_5^s(\xi,\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3,$$

$$\Phi_6^s(\xi,\eta) = b(-\eta^2 + \eta^3 + 3\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_7^s(\xi,\eta) = a(-3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^2 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_8^s(\xi,\eta) = ab(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_9^s(\xi,\eta) = 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3, \tag{2}$$

$$\Phi_{10}^s(\xi,) = b(-3\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_{11}^s(\xi,\eta) = a(3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_{12}^s(\xi,\eta) = ab(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_{13}^s(\xi,\eta) = 3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3,$$

$$\Phi_{14}^s(\xi,\eta) = b(3\xi^2\eta - 2\xi^3\eta - 6\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_{15}^s(\xi,\eta) = a(\xi^2 - \xi^3 - 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),$$

$$\Phi_{16}^s(\xi,\eta) = ab(-\xi^2\eta + \xi^3\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3).$$

Компоненты вектора перемещения

$$f_s = (w^s, \frac{\partial w^s}{\partial y}, -\frac{\partial w^s}{\partial x}, \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y})^T = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$$

внутри s-го элемента соответственно определяются формулой (1) и формулами

$$\theta^s(x,y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x,y)}{\partial y},$$

$$\omega^s(x,y) = -\sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x,y)}{\partial x},$$

$$\gamma^s(x,y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i^2(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Потенциальная энергия изгиба s-го элемента определяется выражением [3]

$$\Omega_s = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{[\nabla^2 w(x,y)]^2 + 2(1-\nu)[(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}]\right\} dxdy, \qquad (3)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E – модуль упругости, h – толщина плиты, ν – коэффициент Пуассона.

Подставляя значения $w^s(x,y)$ из выражения (1) в выражение (3), с учетом связей (2) потенциальную энергию изгиба представим в виде

$$\overline{\Omega}_s = \frac{1}{2}(w_s)^T k_s w_s, \qquad (4)$$

где $k_s = \dfrac{D}{ab}\left\|\overline{k}_{ij}^s\right\|$ – матрица жесткости, компоненты которой при $m = \dfrac{a}{b}$ определяются формулами:

$$\overline{k}_{11}^s = \overline{k}_{55}^s = \overline{k}_{99}^s = \overline{k}_{13,13}^s = \frac{156}{35}(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{72}{25},$$

$$\overline{k}_{22}^s = \overline{k}_{66}^s = \overline{k}_{10,10}^s = \overline{k}_{14,14}^s = (\frac{4}{35m^2} + \frac{52}{35}m^2 + \frac{8}{25})b^2,$$

$$\overline{k}_{33}^s = \overline{k}_{77}^s = \overline{k}_{11,11}^s = \overline{k}_{15,15}^s = (\frac{52}{35m^2} + \frac{4}{35}m^2 + \frac{8}{25})a^2,$$

$$\overline{k}_{44}^s = \overline{k}_{88}^s = \overline{k}_{12,12}^s = \overline{k}_{16,16}^s = [\frac{4}{105}(\frac{1}{m^2} + m^2) + \frac{8}{225}]a^2b^2,$$

$$\overline{k}_{21}^s = \overline{k}_{14,13}^s = -\overline{k}_{65}^s = -\overline{k}_{10,9}^s = [\frac{22}{35m^2} + \frac{78}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]b,$$

$$\overline{k}_{11,9}^s = \overline{k}_{15,13}^s = -\overline{k}_{31}^s = -\overline{k}_{75}^s = [\frac{78}{35m^2} + \frac{22}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]a,$$

$$\overline{k}_{32}^s = -\overline{k}_{76}^s = \overline{k}_{11,10}^s = -\overline{k}_{15,14}^s = -[\frac{11}{35}(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{1}{50}(1+60\nu)]ab,$$

$$\overline{k}_{51}^s = \overline{k}_{13,9}^s = \frac{54}{35m^2} - \frac{156}{35}m^2 - \frac{72}{25},$$

$$\overline{k}_{52}^s = \overline{k}_{14,9}^s = -\overline{k}_{61}^s = -\overline{k}_{13,10}^s = (\frac{13}{35m^2} - \frac{78}{35}m^2 - \frac{6}{25})b,$$

$$\overline{k}_{62}^s = \overline{k}_{14,10}^s = (-\frac{3}{35m^2} + \frac{26}{35}m^2 - \frac{2}{25})b^2,$$

$$\overline{k}_{71}^s = \overline{k}_{53}^s = -\overline{k}_{13,11}^s = -\overline{k}_{15,9}^s = [-\frac{27}{35m^2} + \frac{22}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]a,$$

$$\overline{k}_{73}^s = \overline{k}_{15,11}^s = (\frac{18}{35m^2} - \frac{4}{35}m^2 - \frac{8}{25})a^2,$$

$$\overline{k}_{91}^s = \overline{k}_{13,5}^s = -\frac{54}{35}(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{72}{25},$$

$$\overline{k}_{92}^s = \overline{k}_{14,5}^s = -\overline{k}_{10,1}^s = -\overline{k}_{13,6}^s = (-\frac{13}{35m^2} - \frac{27}{35}m^2 + \frac{6}{25})b,$$

$$\bar{k}^s_{93} = \bar{k}^s_{13,7} = -\bar{k}^s_{11,1} = -\bar{k}^s_{15,5} = (\frac{27}{35m^2} + \frac{13}{35}m^2 - \frac{6}{25})a\,,$$

$$\bar{k}^s_{13,1} = \bar{k}^s_{95} = -\frac{156}{35m^2} + \frac{54}{35}m^2 - \frac{72}{25}\,,$$

$$\bar{k}^s_{96} = \bar{k}^s_{10,5} = -\bar{k}^s_{14,1} = -\bar{k}^s_{13,2} = [\frac{22}{35m^2} - \frac{27}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]b\,,$$

$$\bar{k}^s_{97} = \bar{k}^s_{13,3} = -\bar{k}^s_{15,1} = -\bar{k}^s_{11,5} = (\frac{78}{35m^2} - \frac{13}{35}m^2 + \frac{6}{25})a\,,$$

$$\bar{k}^s_{10,2} = \bar{k}^s_{14,6} = (\frac{3}{35m^2} + \frac{9}{35}m^2 + \frac{2}{25})b^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{14,2} = \bar{k}^s_{10,6} = (-\frac{4}{35m^2} + \frac{18}{35}m^2 - \frac{8}{25})b^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{11,3} = \bar{k}^s_{15,7} = (\frac{9}{35m^2} + \frac{3}{35}m^2 + \frac{2}{25})a^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{15,3} = \bar{k}^s_{11,7} = (\frac{26}{35m^2} - \frac{3}{35}m^2 - \frac{2}{25})a^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{63} = \bar{k}^s_{14,11} = -\bar{k}^s_{72} = -\bar{k}^s_{15,10} = [\frac{13}{70m^2} - \frac{11}{35}m^2 - \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab\,,$$

$$\bar{k}^s_{14,7} = \bar{k}^s_{15,6} = -\bar{k}^s_{10,3} = -\bar{k}^s_{11,2} = [\frac{13}{70}(m^2 + \frac{1}{m^2}) - \frac{1}{50}]ab\,,$$

$$\bar{k}^s_{10,7} = \bar{k}^s_{15,2} = -\bar{k}^s_{11,6} = -\bar{k}^s_{14,3} = [-\frac{11}{35m^2} + \frac{13}{70}m^2 - \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab\,,$$

$$\bar{k}^s_{41} = \bar{k}^s_{12,9} = -\bar{k}^s_{85} = -\bar{k}^s_{16,13} = [\frac{11}{35}(\frac{1}{m^2} + m^2) + \frac{1}{50}(1+10\upsilon)]ab\,,$$

$$\bar{k}^s_{81} = \bar{k}^s_{16,9} = -\bar{k}^s_{54} = -\bar{k}^s_{13,12} = [-\frac{13}{70m^2} + \frac{11}{35}m^2 + \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab\,,$$

$$\bar{k}^s_{13,8} = \bar{k}^s_{16,5} = -\bar{k}^s_{94} = -\bar{k}^s_{12,1} = [\frac{13}{70}(\frac{1}{m^2} + m^2) - \frac{1}{50}]ab\,,$$

$$\bar{k}^s_{9,8} = \bar{k}^s_{16,1} = -\bar{k}^s_{12,5} = -\bar{k}^s_{13,4} = [\frac{11}{35m^2} - \frac{13}{70}m^2 + \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab\,,$$

$$\bar{k}^s_{42} = \bar{k}^s_{86} = -\bar{k}^s_{12,10} = -\bar{k}^s_{16,14} = [\frac{2}{35m^2} + \frac{22}{105}m^2 + \frac{2}{75}(1+5\upsilon)]ab^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{64} = \bar{k}^s_{82} = -\bar{k}^s_{14,12} = -\bar{k}^s_{16,10} = [-\frac{3}{70m^2} + \frac{11}{105}m^2 - \frac{1}{150}(1+5\upsilon)]ab^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{10,4} = \bar{k}^s_{14,8} = -\bar{k}^s_{12,2} = -\bar{k}^s_{16,6} = (\frac{3}{70m^2} + \frac{13}{210}m^2 + \frac{1}{150})ab^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{14,4} = \bar{k}^s_{10,8} = -\bar{k}^s_{12,6} = -\bar{k}^s_{16,2} = (-\frac{2}{35m^2} + \frac{13}{105}m^2 - \frac{2}{75})ab^2\,,$$

$$\overline{k}^s_{8,7} = \overline{k}^s_{12,11} = -\overline{k}^s_{43} = -\overline{k}^s_{16,15} = [\frac{22}{105m^2} + \frac{2}{35}m^2 + \frac{2}{75}(1+5\upsilon)]a^2 b\,,$$

$$\overline{k}^s_{8,11} = \overline{k}^s_{12,7} = -\overline{k}^s_{15,4} = -\overline{k}^s_{16,3} = [\frac{11}{105m^2} - \frac{3}{70}m^2 - \frac{1}{150}(1+5\upsilon)]a^2 b\,,$$

$$\overline{k}^s_{8,15} = \overline{k}^s_{12,3} = -\overline{k}^s_{11,4} = -\overline{k}^s_{16,7} = (\frac{13}{210m^2} + \frac{3}{70}m^2 + \frac{1}{150})a^2 b\,,$$

$$\overline{k}^s_{8,3} = \overline{k}^s_{15,12} = -\overline{k}^s_{74} = -\overline{k}^s_{16,11} = (\frac{13}{105m^2} - \frac{2}{35}m^2 - \frac{2}{75})a^2 b\,,$$

$$\overline{k}^s_{8,4} = \overline{k}^s_{12,16} = (-\frac{1}{35m^2} + \frac{2}{105}m^2 - \frac{2}{225})a^2 b^2\,,$$

$$\overline{k}^s_{12,4} = \overline{k}^s_{16,8} = [-\frac{1}{70}(\frac{1}{m^2} + m^2) + \frac{1}{450}]a^2 b^2\,,$$

$$\overline{k}^s_{12,8} = \overline{k}^s_{16,4} = (\frac{2}{105m^2} - \frac{1}{35}m^2 - \frac{2}{225})a^2 b^2\,.$$

Обозначим через $P_s = (P_1^s, P_2^s, ..., P_{16}^s)^T$ вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке.

В случае равномерно распределенной нагрузки q имеем [3]

$$P_s = \frac{qab}{4}(1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, \frac{ab}{36}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, -\frac{ab}{36}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, \frac{ab}{36}, 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, -\frac{ab}{36})^T\,.$$

Работа узловых нагрузок элемента задается формулой [3]

$$\tilde{\Omega}^s = w_s^T P_s\,. \qquad (5)$$

Принимая во внимание формулы (4) и (5), находим общую потенциальную энергию s -го конечного элемента

$$\Omega^s = \overline{\Omega}^s - \tilde{\Omega} = \frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s\,.$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы, для определения искомых векторов $w_s, s \in \{1, 2, ..., \overline{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования [1,2]:

$$\min \left\{ \sum_{s=1}^{\overline{n}} (\frac{1}{2} w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s) \,|\, \text{условие совместности деформации,} \right.$$

$$\left. \text{кинематические краевые условия} \right\} \qquad (6)$$

Обозначим через $w = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_1^4, ..., w_n^1, w_n^2, w_n^3, w_n^4)^T$ вектор узловых перемещений, $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_1^4, ..., P_n^1, P_n^2, P_n^3, P_n^4)^T$ – вектор узловых нагрузок, $K = \frac{D}{ab}\left\| K_{ij} \right\|$ – матрица жесткости для всей пластины, n – общее число узлов пластины.

Далее, вводя обозначения

$$w_1^1 + K_{12}^{(0)} w_1^2 + K_{13}^{(0)} w_1^3 + K_{14}^{(0)} w_1^4 + ... + K_{1(4n-1)}^{(0)} w_n^3 + K_{1(4n)}^{(0)} w_n^4 = -r_1\,,$$

$$w_1^2 + K_{23}^{(1)} w_1^3 + K_{24}^{(1)} w_2^1 + + K_{24}^{(0)} w_1^4 ... + K_{2(4n-1)}^{(1)} w_n^3 + K_{2(4n)}^{(1)} w_n^4 = -r_2\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (7)$$

$$w_n^3 + K_{(4n-1)(4n)}^{(4n-3)} w_n^4 = -r_{4n-1},$$

в котором

$$K_{ii}^{(0)} = -K_{ii}, i \in M = \{1,2,...,4n\}; \quad K_{1j}^{(0)} = -K_{1j}, j \in \{2,3,...,4n\},$$

$$K_{ij}^{(r)} = -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \bar{M} = \{1,2,...,4n-1\},$$

$$i \in \{r,...,4n\}, j \in \{r+1,...,4n\}$$

$$q_{ii} = K_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (K_{si}^{(s)})^2 - 1, i \in \bar{M}; \quad q_{(4n)4n} = K_{(4n)4n}^{(0)} - \sum_{i=1}^{4n-1} (K_{i(4n)}^{(4n)})^2,$$

целевую функцию задачи (6) представим в виде

$$\Omega = \frac{1}{2}(w^T Q w + \frac{D}{ab} r^T I r) - w^T P.$$

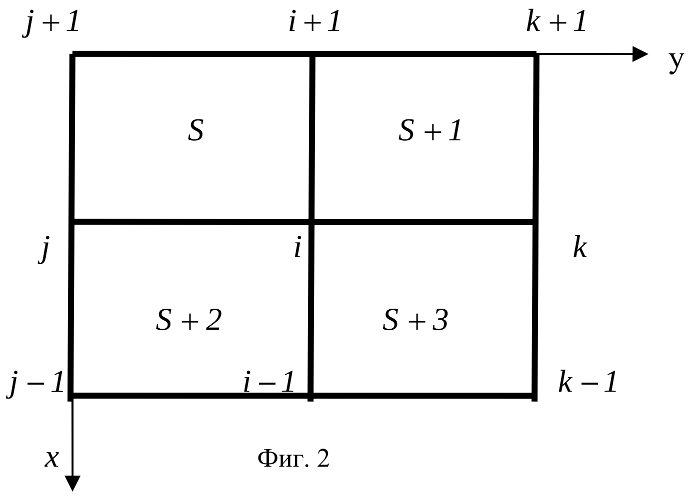
Здесь $Q = \frac{D}{ab}\|q_{ij}\|$ – диагональная матрица порядка $4n$; I – единичная матрица порядка $4n-1$; $r = (r_1, r_2, ..., r_{4n-1})^T$.

Пусть $C = -P$ – вектор-столбец порядка $4n$, $A = (A_1, A_2, ..., A_{4n})$ – матрица коэффициентов обозначений (7), где

$$A_J = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{4n-1,j})^T, j \in \{1,2,...,4n\}$$

Тогда, принимая во внимание, что r является вектором дополнительных переменных, взамен задачи (6) получим

$$\min\{\frac{1}{2} w^T Q w + C^T w \mid Aw < 0, \text{ условия совместности деформации, кинематические краевые условия } \} \quad (8)$$



Фиг. 2

Функция w^s, задаваемая формулой (1), обеспечивает совместность перемещения $f_s = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$, но не обеспечивает непрерывности напряжений. Как известно, напряжения от изгиба в элементе пластины определяются формулами [3]

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{9}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{10}$$

где z – расстояние до срединной поверхности по толщине.

Условия непрерывности напряжений в i- ом узле, соответствующие фиг. 2, задаются соотношениями:

$$\sigma_x^s = \sigma_x^{s+1}, \quad \sigma_x^{s+2} = \sigma_x^{s+3}, \quad \sigma_x^s = \sigma_x^{s+2},$$

$$\sigma_y^s = \sigma_y^{s+1}, \quad \sigma_y^{s+2} = \sigma_y^{s+3}, \quad \sigma_y^s = \sigma_y^{s+2},$$

откуда, принимая во внимание формулы (9), (10), а также

$$\frac{\partial^2 w^s(x,y)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{16} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x,y)}{\partial x^2}\ ; \quad \frac{\partial^2 w^s(x,y)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{16} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x,y)}{\partial y^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 w^s(x,y)}{\partial x \partial y} = \sum_{j=1}^{16} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x,y)}{\partial x \partial y}, \tag{12}$$

находим

$$3w_1^{i+1} - aw_3^{i+1} - 4aw_3^i - 3w_1^{i-1} - aw_3^{i-1} = 0\ , \ i \in N\ , \tag{13}$$

$$3w_1^j + bw_2^j + 4bw_2^i - 3w_1^k + bw_2^k = 0\ , \ i \in N\ . \tag{14}$$

Заметим, что нормальные напряжения σ_x и σ_y вдоль сторон опорного контура конечного элемента изменяются по закону кубической параболы, а касательные напряжения τ_{xy}– по закону квадратичной параболы. Для обеспечения непрерывности касательных напряжений на границах разделов элементов введем дополнительные точки, на которых будет задано условие непрерывности касательных напряжений. Возьмем эти точки в центре сторон конечных элементов. Тогда условия непрерывности касательных напряжений в смежном сечении вдоль границы разделов s-го и $(s+1)$-го, а также s-го и $(s+2)$-го конечных элементов задаются соотношениями

$$\tau_{xy}^s(a/2, b) = \tau_{xy}^{s+1}(a/2, 0); \quad \tau_{xy}^s(a, b/2) = \tau_{xy}^{s+2}(0, b/2)\ ,$$

откуда, используя формулу (12) для смежных сечений $i+1, i$ и j, i, параллельных осям x и y (фиг.2), получим, что они тождественно удовлетворяются.

Условия непрерывности напряжений σ_x и σ_y вдоль границы разделов смежных сечений $i+1, i$ и j, i параллельных осям x и y (фиг.2), зададим соотношениями

$$\sigma_x(\xi, b) = \sigma_x\ (\xi, 0)\ , \quad \sigma_y(a, \eta) = \sigma_y(0, \eta)\ ,$$

$$\sigma_y(\xi, b) = \sigma_y(\xi, 0)\ , \quad \sigma_x(a, \eta) = \sigma_x(0, \eta)\ ,$$

откуда, с учетом связей (13) и (14), получаем

$$-3w_3^j + bw_4^j + 4bw_4^i + 3w_3^k + bw_4^k = 0\ , \qquad i \in N\ ,$$

$$3w_2^{i+1} + aw_4^{i+1} + 4aw_4^i - 3w_2^{i-1} + aw_4^{i-1} = 0\ , \ i \in N\ .$$

Исключая из этих уравнений переменную w_4^i, имеем

$$-3aw_3^j + abw_4^j + 3aw_3^k + abw_4^k - 3bw_2^{i+1} -$$
$$- abw_4^{i+1} + 3bw_2^{i-1} - abw_4^{i-1} = 0\,,\ i \in N\,. \qquad (15)$$

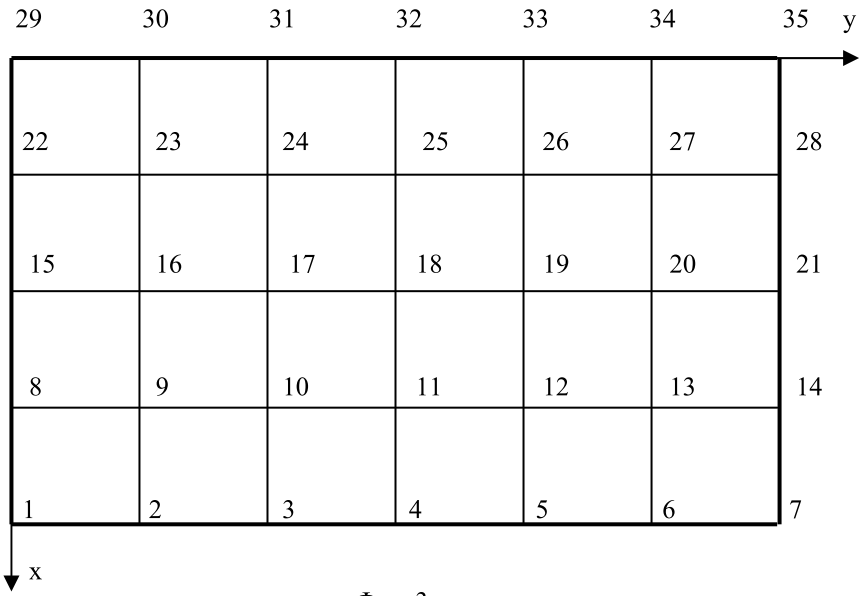
Перепишем условия (13), (14) и (15) в виде системы уравнений. Имеем

$$Hw = 0\,, \qquad (16)$$

где H – матрица порядка $3n \times 4n$.

Принимая во внимание соотношения (16), задачу (8) перепишем в виде

$$\min\{\frac{1}{2}w^T Qw + C^T w \mid Aw < 0\,,\ Hw = 0\,,$$
$$\text{кинематические краевые условия}\} \qquad (17)$$



Фиг. 3

Пример. Рассмотрим прямоугольную пластину, жестко защемленную по всем сторонам (фиг.3), которая загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Для решения задачи использована сетка 4×6 (фиг.3). Некоторые результаты расчета, полученные по программе, написанной на языке C++ для $m = a/b = 1$ и $\nu = 0{,}3$ с учетом следующих граничных условий:

$$w_i^1 = 0,\ w_i^2 = 0,\ w_i^3 = 0,\ i \in \{1, 2, ..., 8, 14, 15, 21, 22, 28, ..., 35\}\,,$$
$$w_j^4 = 0,\ j \in \{1, 7, 29, 35\}\,,$$

приведены в таблице.

Как следует из таблицы, разница в значениях между обобщенными перемещениями при расчете изгиба пластин без учета непрерывности напряжений и с учетом непрерывности напряжений в узлах 16,17,18 составляют от 27% до 45%.

Для квадратной пластины значение перемещения в точке 18 (максимальный прогиб), вычисленное без учета непрерывности напряжений, получается $1{,}10601qa^2b^2/D$, а с учетом непрерывности напряжений – $0{,}697672\,qa^2b^2/D$. Принимая во внимание, что сторона квадрата представлена в виде $c = 4a$ и $c = 6b$, соответственно получаем, что значение максимального прогиба без учета непрерывности напряжений равно $0{,}00192\,qc^4/D$, а с учетом непрерывности напряжений — $0{,}00121qc^4/D$. Так как точное значение максимального прогиба квадратной пластины равно [3] $0{,}00127qc^4/D$, то легко увидеть, что учет непрерывности напряжений существенно увеличивает точность решения задачи.

Таблица значений компонентов вектора узловых перемещений

Узел	без учета непрерывности напряжений				с учетом непрерывности напряжений			
	w	$\partial w/\partial y$	$-\partial w/\partial x$	$\partial^2 w/\partial x\partial y$	w	$\partial w/\partial y$	$-\partial w/\partial x$	$\partial^2 w/\partial x\partial y$
2	0	0	0	-0.066225	0	0	0	0.209203
3	0	0	0	-0.056558	0	0	0	-0.14058
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0.056558	0	0	0	0.140581
6	0	0	0	0.066225	0	0	0	-0.20920
8	0	0	0	-0.047549	0	0	0	0.209206
9	0.136944	0.1783	0.169595	-0.241188	0.055186	0.04867	0.09552	-0.28658
10	0.277428	0.09336	0.35523	-0.137562	0.098549	0.10090	0.22583	-0.09354
11	0.323108	0	0.41836	0	0.205944	0	0.26886	0
12	0.277428	-0.09336	0.35523	0.137562	0.098549	-0.10090	0.22583	-0.09354
13	0.136944	-0.1783	0.169595	0.241188	0.055186	-0.04867	0.09552	0.28658
14	0	0	0	0.047549	0	0	0	-0.20921
15	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0.232113	0.30816	0	0	0.12738	0.19466	0	0
17	0.480406	0.16778	0	0	0.301119	0.12467	0	0
18	0.563445	0	0	0	0.358501	0	0	0
19	0.480406	-0.16778	0	0	0.301119	-0.12467	0	0
20	0.232113	-0.30816	0	0	0.12738	-0.19466	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0
Множитель	qa^2b^2/D	qab^2/D	qa^2b/D	qab/D	qa^2b^2/D	qab^2/D	qab^2/D	qab/D

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян А. В., Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба плит. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 26-34.
2. Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба пластин. // Тезисы докладов XXI Международной конференции. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Санкт-Петербург: 4-7 октября 2005 г. С. 67-68.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974. 384 с.
4. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A., The Generation of Interelement – Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.

Ереванский Государственный Университет
Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
18.10.2006