ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

Саргсян А. М.

Ключевые слова: упругий клин, сингулярность напряжений типа r^{-1}, окрестность угловой точки, трансцендентное уравнение.

Keywords: elastic wedge, stress singularities in form r^{-1}, neighborhood of angular point, transcendental equation.

Ա.Մ.Սարգսյան
Առաձգականության տեսության մի խնդրում լարումների եզակիության մասին

Հետազոտված է լարումների վարքը կամայական α բացվածքի անկյունով $\left(0<\alpha\leq 2\pi\right)$ առաձգական սեպի անկյունային կետի շրջակայքում, երբ սեպի շառավիղային կողերի վրա տրված են ողորկ կոնտակտով եզրային պայմաններ:

Լարումների եզակիության կարգը որոշող տրանսցենդենտ հավասարման արմատների հետազոտությանը, որը դեռևս 1969 թ., կատարել էր Ա.Ի. Կալանդիան $\alpha<\pi$ անկյունների դեպքում, լրացված է $\pi\leq\alpha\leq 2\pi$ միջակայքի համար:

$\alpha=\pi$ և $\alpha=2\pi$ դեպքերում մեկնաբանված է լարումների տիպի եզակիության մեխանիկական իմաստը:

A.M.Sargsyan
On Stresses Singularity in one Problem of Elasticity Theory for the Wedge

The behavior of the stresses in the angular point neighborhood of the elastic wedge with arbitrary opening angle α $\left(0<\alpha\leq 2\pi\right)$ is considered. On the radial bounds of the wedge the boundary conditions of the smooth contact are given.

The investigation of the transcendental equation roots at $\alpha<\pi$, determining the order of the stresses singularity , which was carried out by A.I.Kalandia in 1969, is completed for the interval $\pi\leq\alpha\leq 2\pi$.

The mechanical sense of the stresses singularity of r^{-1} type in case of $\alpha=\pi$ and $\alpha=2\pi$ is interpreted.

Исследуется поведение напряжений в окрестности угловой точки упругого клина с произвольным углом раствора α $\left(0<\alpha\leq 2\pi\right)$, когда на радиальных гранях заданы граничные условия гладкого контакта.

Исследование корней трансцендентного уравнения, определяющих порядок сингулярности напряжений, которое еще в 1969 г. проводил А.И. Каландия при $\alpha<\pi$, дополняется для интервала $\pi\leq\alpha\leq 2\pi$.

Интерпретирован механический смысл особенности напряжений типа r^{-1} в случаях $\alpha=\pi$, $\alpha=2\pi$.

Сингулярности напряжений, возникающие в основных граничных задачах плоской теории упругости для упругого клина с произвольным углом раствора α в его вершине, когда на гранях заданы внешние усилия (случай I-I) или смещения (случай II-II), либо когда на одной грани заданы усилия, а на другой – смещения (случай I-II), впервые, по-видимому, исследованы в работе М.Л.Вильямса [1].

Представляя функцию напряжений Эри в виде

$$\Phi(r,\varphi)=r^{\lambda+1}\sum_{j=1}^{2}[A_j\cos(\lambda-(-1)^j)\varphi+B_j\sin(\lambda-(-1)^j)\varphi]$$

где A_j, B_j, λ – произвольные комплексные параметры, и удовлетворяя на гранях клина однородным граничным условиям, задачи о сингулярности сведены к исследованию корней соответствующих трансцендентных уравнений относительно λ. Кроме выявления зависимости порядка сингулярности напряжений от угла раствора α, а в третьем случае и от коэффициента Пуассона ν материала клина, получены также условия отсутствия сингулярности напряжений.

В работе [2] А.И.Каландии, используя известный метод Колосова–Мусхелишвили, наряду с основными задачами теории упругости (случай I-I, II-II и I-II) исследован также случай III-III, когда на гранях клина осуществляется условие соприкасания с жестким штампом без трения

$$u_\varphi=f(r),\quad \tau_{r\varphi}=0.$$

Для этого случая трансцендентное уравнение

$$\sin\lambda\alpha\pm\sin\alpha=0$$

имеет только вещественные корни. Отметим, что уравнение (1) возникает также при граничных условиях

$$u_r=f(r),\quad \sigma_\varphi=0$$

на гранях клина. Такие граничные задачи связаны с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к массивным упругим телам [3].

Рассмотрены и другие возможные виды граничных условий – случаи I-III и II-III (обозначения здесь очевидны). Найдены корни трансцендентных уравнений с минимальными положительными действительными частями при $\nu=0{,}3$ и при различных значениях α из интервала $0<\alpha\le 2\pi$. Для всех шести случаев построены графики функции $\min\operatorname{Re}\lambda$. При $\operatorname{Re}\lambda<1$ напряжения у вершины клина имеют сингулярность порядка $1-\min\operatorname{Re}\lambda$.

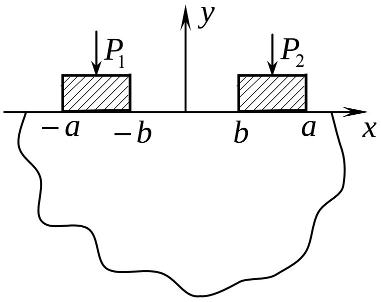
Далее, по поводу случая III-III, А.И.Каландия пишет: «В случае III-III график показан лишь в интервале $(0,\pi)$. Корень $\lambda=0$, соответствующий $\alpha=\pi$, тривиален и его следует исключить».

В связи с этим замечанием А.И.Каландии возникают следующие вопросы:

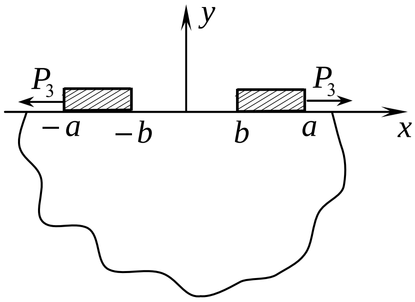
1. ***Каково поведение напряжений вблизи вершины клина при*** $\alpha=\pi$ **?**

Ведь в случае $\alpha=\pi$ уравнение (1) имеет корни $\lambda=k\ \ (k=0,1,2,\ldots)$, и при исключении корня $\lambda=0$ получается, что напряжения в вершине клина принимают конечные значения. Этого не может быть из соображения непрерывности: в интервале $0<\alpha\le\pi$ из решения (1) имеем $\lambda_{\min}=\pi/\alpha-1$ и при $\alpha=\pi-\varepsilon$ (ε – сколь угодно малое положительное число) порядок сингулярности напряжений равен $1-\varepsilon/(\pi-\varepsilon)$. При $\varepsilon\to 0$ напряжения в окрестности вершины клина стремятся к бесконечности как $1/r$.

Как заметил профессор д.ф.-м.н. С.М.Мхитарян во время обсуждения этого вопроса, подобного рода сингулярности напряжений возникают в контактных задачах о взаимодействии с упругой полуплоскостью двух неодинакого нагруженных абсолютно жестких штампов или нагруженных горизонтальными силами абсолютно жестких к растяжению и абсолютно гибких к изгибу двух накладок [4, 5]. Приведем соответствующие формулы:



Фиг. 1



Фиг. 2

$$p(x)=\frac{[(P_1+P_2)x-c_0]\operatorname{sgn}x}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \qquad (2)$$

$p(x)$ – давление под штампами,

$$c_0=\frac{\pi a}{2K(k')}(P_1-P_2) \qquad (3)$$

c_0 – жесткое вертикальное смещение штампов при кососимметричном нагружении,

$K(k')$ – полный эллиптический интеграл первого рода,

$k'=\sqrt{1-b^2/a^2}, \quad b<|x|<a$

$$\tau(x)=\frac{aP_3\operatorname{sgn}x}{K(k')\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \qquad (2')$$

$\tau(x)$ – касательное напряжение под накладками

$$\delta=\frac{2P_3}{E}\frac{K(k)}{K(k')} \qquad (3')$$

δ – жесткое горизонтальное смещение накладок,

$k=b/a, \quad b<|x|<a$

$$K(k')=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

Когда расстояние между штампами (накладками) стремится к нулю $(b\to 0)$, давление $p(x)$ под штампами (касательное напряжение $\tau(x)$ под накладками) в начале координат стремится к бесконечнсти как $1/r$ (фиг. 1 и 2).

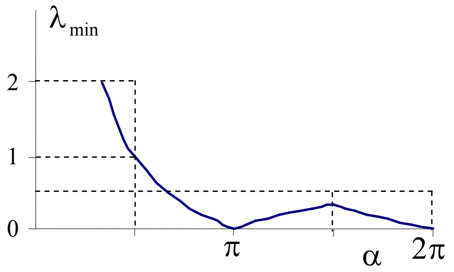
Причем, если задаются внешние силы $P_j\,(j=1,2,3)$, то коэффициенты при этих особенностях, а также δ и c_0 становятся равными нулю ($K(k')$ имеет логарифмическую особенность при $b\to 0$).

Если задать c_0 и δ, то, как следует из (3) и (3'), внешние силы P_j возрастают логарифмически. В этом случае коэффициенты при особенностях типа r^{-1} становятся конечными.

Формулы (2') и (3') заимствованы с согласия С.М. Мхитаряна из его еще неопубликованной работы.

2. ***Почему в рамках обычной теории упругости задача III–III не исследована в интервале*** $\pi\le\alpha\le 2\pi$***, и каков порядок сингулярности напряжений при*** $\alpha>\pi$ ***и, в частности, в вершине трещины?***

Из решения уравнения (1) имеем

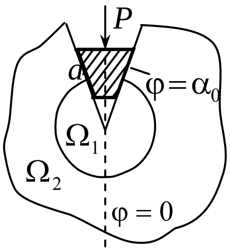


Фиг.3

$$\lambda_{\min} = \begin{cases} \pi/\alpha - 1, & 0 < \alpha \le \pi \\ 1 - \pi/\alpha, & \pi \le \alpha \le 3\pi/2 \\ 2\pi/\alpha - 1, & 3\pi/2 \le \alpha \le 2\pi \end{cases}$$

Зависимость $\lambda_{\min}$ от α представлена в виде графика на фиг.3. И в случае $\alpha = 2\pi$ $\lambda_{\min} = 0$, т.е. в вершине трещины ($r \to 0$) напряжение имеет сингулярность r^{-1}.

Заметим здесь, что и в монографиях [6, 7] несколько иным путем получены те же трансцендентные уравнения, соответствующие описанным выше шести случаям граничных условий, однако кривые зависимости $\min \operatorname{Re} \lambda$ от угла раствора клина при различных граничных условиях заимствованы из работы [2] без каких-либо комментариев.



Фиг. 4

То, что задача III-III имеет реальный физический смысл и в случае $\pi \le \alpha \le 2\pi$ сомнений не вызывает хотя бы потому, что в более поздних исследованиях других авторов эта задача рассматривалась для любого угла раствора клина, в том числе и для $\alpha = 2\pi$.

Так, в работе [8] при рассмотрении задач для составленной из двух однородных областей $\Omega_1\{0 \le r \le a, -\alpha_0 \le \varphi \le \alpha_0, 2\alpha > \pi\}$ и $\Omega_2\{a \le r < \infty, -\alpha_0 \le \varphi \le \alpha_0\}$ упругой плоскости с бесконечным клиновидным вырезом (фиг. 4), к краям которого без трения прижат жесткий штамп в виде клина, возникла необходимость исследовать краевую задачу о плоской деформации бесконечного упругого клина с общим основным условием $\tau_{r\varphi} = 0$ при $\varphi = \pm\alpha_0$ $(\alpha = 2\alpha_0)$ и со смешанными условиями:

а) $u_\varphi(r, \pm\alpha_0) = \pm g_1(r)$ $\quad (1 \le r < \infty)$,

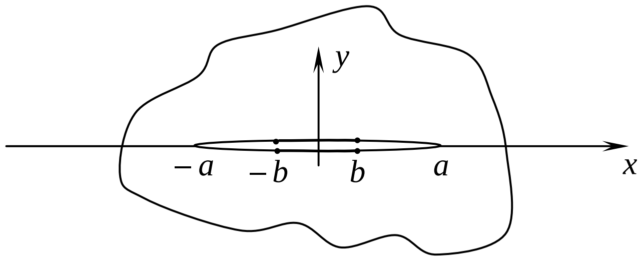
б) $\sigma_\varphi(r, \pm\alpha_0) = f_2(r)$ $\quad (1 \le r < \infty)$, $u_\varphi(r, \pm\alpha_0) = \pm g_2(r)$ $\quad (0 \le r \le 1)$

Представляя решение задачи в виде интеграла Меллина и удовлетворяя неоднородным граничным условиям а) и б), с учетом симметрии граничных условий получены соответствующие трансцендентные уравнения для случаев I-I и III-III, что и следовало ожидать.

Граничная задача для упругого кругового сектора, на окружной части которого заданы нормальные нагрузки в виде двух симметричных сосредоточенных сил, а на радиальных сторонах–нулевые касательные напряжения и нормальные перемещения, исследована в работе [9]. Более подробно рассмотрен случай, когда

$u_\varphi(r,\pm\alpha_0)=a_0 r$. Приведены асимптотические представления напряжений у вершины сектора. Причем, полученный в этой задаче порядок особенности напряжений, естественно, содержится в решении уравнения (1). В случае $\alpha_0=\pi$, т.е. в вершине трещины все три напряжения стремятся к бесконечности как r^{-1}, однако коэффициенты при этих особенностях становятся равными нулю и, как пишут авторы, «в разложениях по тригонометрическим функциям «неинтегрируемые» особенности исчезают».

Работа [10] посвящена исследованию смешанной граничной задачи для упругого пространства со сквозной прямолинейной трещиной конечной длины, когда на одинаковых участках верхнего и нижнего берегов трещины ($|x|<b$) задаются компоненты смещений, а остальные части берегов трещины свободны от напряжений (фиг. 5). При этом упругое пространство находится в условиях антиплоской или плоской деформации.



Фиг. 5

Для случая антиплоской деформации задаются следующие граничные условия:

$$u_z^\pm(x,0)=\pm f(x)\quad(|x|<b),\quad \tau_{yz}^\pm(x,0)=0\quad(b<|x|<a),$$

а в случае плоской деформации –

$$u_y^\pm(x,0)=\pm f(x)\quad(|x|<b),\quad \tau_{yz}^\pm(x,0)=0\quad |x|<a,$$

$$\sigma_y^\pm(x,0)=0\quad(|x|<b).$$

Решение одной задачи получается из другой путем соответствующих замен.

В случае антиплоской деформации получено явное выражение для касательного напряжения $\tau_{yz}(x,0)$ как при $|x|<b$, так и при $|x|>a$, а в случае плоской деформации – $\sigma_y(x,0)$ при $|x|<b$ и $|x|>a$. И здесь получены формулы, аналогичные (3) и (3'). В пределе, когда $b\to a$, соответствующие напряжения в вершинах трещин стремятся к бесконечности как r^{-1}.

Таким образом, появление неинтегрируемой особенности напряжений типа r^{-1} в различных задачах теории упругости не случайно, но, к сожалению, какого-либо объяснения по поводу его возникновения и физического смысла не было дано.

По интерпретации С.М. Мхитаряна появление сингулярности напряжений типа r^{-1}, когда задается c_0 или δ, физически означает следующее: еще до того, как расстояние между штампами (накладками) становится равным нулю, в сечении $x=0$ упругой полуплоскости разрушающие напряжения σ_x, пропорциональные P_j, возрастая вместе с P_j, достигают предела хрупкого разрушения, вследствие чего образуется вертикальная трещина, берега которой расходятся. А в задаче, исследованной в работе [10], трещина начинает распространяться до того, как размер накладки $2b$ достигнет размера трещины ($b=a$), так как при этом коэффициент интенсивности напряжений становится сколь угодно большим.

Для нехрупких материалов при $b \to 0$ (фиг. 1, 2) или $b \to a$ (фиг. 5) соответственно в некоторой окрестности начала координат и в вершине трещины, естественно, возникают нелинейные эффекты и, как в задаче Фламана–Буссинеска, окрестность этих точек при определенных этапах исследований можно исключить из анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions. // J. Appl. Mech. 1952. Vol. 19. № 4. P. 526-528.
2. Каландия А. И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. // ПММ. 1969. Т.33. № 1. С. 132-135.
3. Melan E. Ein Beitrag zur Theoric geschweisster Verbindungen. // Ing.- Archiv. 1932. Bd. 3. Heft 2. p.123.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.– Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
5. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойкими. М.: Наука, 1983. 487с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312с.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
8. Лебедев Д. В. Хрупкое разрушение упругой составной плоскости с клиновидным вырезом. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т.43. № 2. С. 12-21.
9. Макарян В. С., Саркисян В. Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т.43. № 2. С. 3-11.
10. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On A Mixed Problem For An Elastic Space With A Crack Under Antiplane And Plane Deformations. Collection of Papers. Yerevan-2005. 282p.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.11.2006