ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, КОТОРЫЕ УСИЛЕНЫ ЧАСТИЧНО СКЛЕЕННЫМИ РАЗНОРОДНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Керопян А. В.

Ключевые слова: контактная задача, упругая полуплоскость, упругая бесконечная пластина, частично склеенный разнородный стрингер, обобщенное интегральное преобразование Фурье, система интегро-дифференциальных уравнений, бесконечная система.
Key words: contact problem, elastic half-plane, infinite elastic plate, partially glued, heterogeneous stringer, system of singular integro-differential equations, infinite system.

Ա. Վ. Քերոբյան
Առաձգական կիսահարթության և անվերջ սալի համար կոնտակտային խնդիրների լուծումը, որոնք ուժեղացված են մասնակիորեն սոսնձված տարբեր համասեռությամբ ստրինգերներով

Դիտարկված են խնդիրներ առաձգական կիսահարթության և անվերջ սալի համար, որոնն $y = 0$ գծի երկարությամբ XOY հարթության մեջ (XOY սալի միջին հարթությունն է) ուժեղացված են տարբեր առաձգական բնութագրեր ունեցող ստրինգերներով՝ առաձգական վերադիրների տեսքով: Ստրինգերները բաղկացած են սիմետրիկ դասավորված միևնույն առաձգական հատկություններ ունեցող երկու կիսաանվերջ կտորներից և մեկ առանձնացված վերջավոր կտորից այլ առաձգական հատկությունով: Ենթադրվում է, որ վերջավոր տեղամասում կոնտակտային փոխազդեցությունը իրագործվում է այլ ֆիզիկամեխանիկական հատկություններ ունեցող սոսնձի շերտի միջոցով, իսկ կիսաանվերջ տեղամասերում իրագործված է իդեալական մեխանիկական կոնտակտի վիճակ: Անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը Ֆուրյեի ընդհանրացված ձևափոխության օգնությամբ բերված է վերջավոր հատվածներում սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցյալ հավասարումների համակարգի լուծման, որոշակի եզրային պայմաններով: Այնուհետև, Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի կիրառմամբ այդ համակարգի լուծումը հանգեցված է քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման, որից հետո որոշված են կոնտակտային լարումները կիսաանվերջ տեղամասերում և պարզաբանված են նրանց վարքը և եզակիությունների բնույթը:

A. V. Kerobyan
The solution of the contact problems for the elastic half-plane and the infinite plate which are strengthened by partially glued heterogeneous stringers

This work observes contact problems for the elastic half-plane and the infinite plate which in the line of $y = 0$ (for the plate XOY its average plane) is strengthened by the heterogeneous elastic stringers (overlays) which consist of two semi-infinite pieces and one separated finite piece another is one elastic characteristic. It is supposed that contact interaction in finite part is realized into a thin layer of glue (another physico-mechanical characteristic) and stringers are deformed under the action of horizontal forces. Using generalized Fourier transformation the determinational problem of unknown contact stresses is reduced to the system of singular integro-differential equations within the finite intervals.

The solution is constructed using Chebishev polynomials. The particular cases are considered and the character of the change contact stresses is illustrated in the different contact parts.

В работе рассматриваются контактные задачи для упругих тел, моделированных в виде упругой полуплоскости и бесконечной пластины, которые вдоль линии $y = 0$ в плоскости XOY (XOY –средняя плоскость пластины) усилены разнородными стрингерами в виде тонких упругих накладок, состоящих из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска с разными упругими характеристиками, когда контакт между стрингерами и деформируемыми основаниями в конечном участке осуществляется через слой клея (с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками), а в полубесконечных частях имеет место жесткое сцепление (в смысле идеального механического контакта) и деформируются под действием горизонтальных сил, приложенных к

стрингерам. Задача определения неизвестных контактных напряжений при помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье сведена к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на конечных интервалах при определенных граничных условиях. Далее, решение этой системы с помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева сведено к системе квазивполне регулярных бесконечных систем алгебраических уравнений, после чего определены и контактные напряжения в полубесконечных интервалах в замкнутом виде. Рассмотрены частные случаи и выяснен характер поведения контактных напряжений в конечном и полубесконечных участках, а также характер их особенностей.

Перед рассмотрением поставленных задач отметим, что для краткого изложения работы за основу постановки и формулировки задач в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость, а для упругой бесконечной пластины результаты приводятся параллельно, при котором по мере возможности, для них придерживаются одинаковые обозначения.

§1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих функциональных уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν) усилена на своей границе $y=0$ разнородными стрингерами с модулями упругости E_1 при $|x|>b$ и E_2 при $|x|<a$ и малыми толщинами h, соответственно, когда контакт между стрингерами и деформируемыми основаниями при $|x|<a$ осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k, коэффициент Пуассона ν_k и толшина h_k), а при $|x|>b$ они находятся в идеальном механическом контакте. Задача заключается в определении контактных напряжений, когда на краях стрингеров т. е. в точках $x=\pm b,\ x=\pm a$ приложены горизонтальные силы P , а в точках $x=\pm c$ – горизонтальные силы $Q\left(Q>P,\ c>b>a\right)$.

Аналогичная задача при отсутствии слоя клея была рассмотрена в работе [1]. Рассматриваемые задачи, когда стрингеры имеют одинаковые упругие характеристики, рассмотрены в работе [2]. В работах [3-7] разными подходами рассмотрены задачи для упругих бесконечных тел, усиленных через слой клея конечными стрингерами, обладающими разными физико-механическими характеристиками.

Здесь относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, а для слоя клея – условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингерами действуют только касательные контактные напряжения [2-7].

Согласно вышепринятой модели, из условия равновесия элемента стрингеров и закона Гука уравнения равновесия стрингеров с помощью обобщенных функций представим в виде двух уравнений [2]:

$$\frac{dU_1^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1h}+\frac{Q[\delta(x+c)-\delta(x-c)]}{E_1h}-\frac{P[\delta(x+b)-\delta(x-b)]}{E_1h}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dU_0^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_0(x)}{E_2h}+\frac{P[\delta(x+a)-\delta(x-a)]}{E_2h},\quad -\infty<x<\infty. \tag{1.2}$$

Здесь

$$U_1^{(1)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(1)}/dx,$$

$$U_0^{(1)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(1)}/dx,$$

$$\tau_1(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]\tau(x),\quad \tau_0(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\tau(x),$$

$$\tau(x) = \tau_0(x) + \tau_1(x), \tag{1.3}$$

$u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров, $\tau(x)$ – интенсивность неизвестных касательных контактных напряжений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная.

В дальнейшем, для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями:

$$\overline{f}(\sigma) = F\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\sigma x}dx, \quad f(x) = F^{-1}\left[\overline{f}(\sigma)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma.$$

Для части стрингера, находящегося на отрезке $\left[-a, a\right]$, полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условии чистого сдвига, будем иметь условие [2-7]:

$$u^{(1)}(x) - u^{(2)}(x,0) = k\tau(x), \quad -a \le x \le a, \tag{1.4}$$

которое в обобщенных функциях можно представить так:

$$U_0^{(1)}(x) = U_0^{(2)}(x) + k\tau_0^*(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.5}$$

где $\tau_0^*(x) = \left[\tau_0(x)\right]' + \tau(a)\left[\delta(x+a) + \delta(x-a)\right]$, $\tau(a)$ – значение $\tau(x)$ в точке $x = a$ при нечетности $\tau(x)$, штрих означает дифференцирование по x, $k = h_k / G_k$, $G_k = E_k / 2(1+\nu_k)$, $u^{(2)}(x,0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

С другой стороны, деформацию граничных точек упругой полуплоскости, когда на ее границе $y = 0$ действуют только касательные напряжения интенсивности $\tau(x)$, в обобщенных функциях представим так:

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx} = U^{(2)}(x) = \frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left[\tau_0(s) + \tau_1(s)\right]ds}{s-x}. \tag{1.6}$$

Здесь

$U^{(2)}(x) = U_1^{(2)}(x) + U_0^{(2)}(x) + G_u(x)$, $U_1^{(2)}(x) = \left[\theta(-x-b) + \theta(x-b)\right]du^{(2)}/dx$,

$U_0^{(2)}(x) = \left[\theta(x+a) - \theta(x-a)\right]du^{(2)}/dx$,

$G_u(x) = [\theta(x+b) - \theta(x+a) + \theta(x-a) - \theta(x-b)]g_u(x)$,

$$g_u(x) = du^{(2)}/dx, \ x \in (-b,-a) \cup (a,b), \ A = E/2(1-\nu^2). \tag{1.7}$$

В аналогичной задаче для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, в предположении, что стрингеры расположены по одной $y = 0$ линии (xoy – средняя плоскость пластины), в (1.6) A следует заменить на $A^* = 4Ed/b_1^*(1+\nu)(3-\nu)$, где d – толщина пластины, в (1.1) и (1.2) h следует заменить площадями поперечных сечений стрингеров F, а в (1.5) – k на $k^* = k/b_1^*$, b_1^* – ширина стрингеров в контактных участках.

Для частей стрингеров, находящихся при $|x| > b$, условие контакта в обобщенных функциях будет иметь вид:

$$U_1^{(1)}(x) = U_1^{(2)}(x). \tag{1.8}$$

Теперь применив к (1.1), (1.6) и (1.8) обобщенное преобразование Фурье, а затем поступив аналогичным образом с (1.2), (1.5) и (1.6), получим два функциональных уравнения на действительной оси $-\infty < \sigma < \infty$, которые приводятся к одному уравнению:

$$\begin{aligned}&\left(\lambda_1 + |\sigma|\right)\overline{\tau}_1(\sigma) + \left(\lambda_2 + |\sigma| + \kappa A\sigma^2\right)\overline{\tau}_0(\sigma) = Ai\sigma G_u(\sigma) + 2iQ\lambda_1 \sin c\sigma - \\ &-2i\lambda_1 P\sin b\sigma + 2i\lambda_2 P\sin a\sigma - 2i\sigma kA\tau(a)\cos a\sigma, \qquad -\infty < \sigma < \infty,\end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$\lambda_j = A/E_j h$ $(\mathrm{j} = 1,2)$, $\quad \overline{\tau}_i(\sigma) = F[\tau_i(x)]$ $\quad (i = 0,1)$.

Для бесконечной пластины в (1.9) λ_j следует заменить на $\overline{\lambda_j} = A^*/E_j F$ $(j = 1,2)$, k на k^*.

Таким образом, поставленные задачи сведены к решению функциональных уравнений типа (1.9).

§2. Решение функционального уравнения (1.9). Для этой цели представим его в следующем виде:

$$\overline{\tau}(\sigma) + \frac{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\overline{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma|} + \frac{kA\sigma^2\,\overline{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma|} = \frac{Ai\sigma G_u(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma|} + \overline{g}(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty, \tag{2.1}$$

которое после обратного преобразования Фурье представим так:

$$\tau(x) + \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\int_{-a}^{a} K(x-s)\tau_0(s)\,ds - kA\int_{-a}^{a} K'(x-s)\tau_0'(s)\,ds + A\int_{-\infty}^{\infty} K'(x-s)G_u(s)\,ds = g(x),$$

$$-\infty < x < \infty \tag{2.2}$$

Здесь

$$K(x) = F^{-1}\left[K(\sigma)\right],\ \tau(x) = F^{-1}\left[\overline{\tau}(\sigma)\right],\quad K(\sigma) = \frac{1}{\lambda_1 + |\sigma|},$$

$$K'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-i\sigma}{\lambda_1 + |\sigma|}e^{-i\sigma x}d\sigma,\quad \tau'(x) = \frac{d\,\tau(x)}{d\,x}, \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}&g(x) = Q\lambda_1[K(x-c) - K(x+c)] - P\lambda_1[K(x-b) - K(x+b)] + \\ &+P\lambda_2[K(x-a) - K(x+a)] + kA\tau(a)[K'(x-a) + K'(x+a)].\end{aligned}$$

Отметим, что $K(x) \sim \ln(1/|x|)$ при $x \to 0$, и $K(x) \sim |x|^{-2}$ при $x \to \infty$.

Теперь, поскольку $\tau(x) = \tau_0(x)$ при $x \in (-a,a)$, а также $\tau(x) = 0$ при $x \in (-b,-a) \cup (a,b)$, $G_u(x) = 0$ при $x \notin (-b,-a) \cup (a,b)$ и имеют место соотношения $\tau(-x) = -\tau(x)$, $g_u(-x) = g_u(x)$, то из (2.2) будем иметь:

$$\tau(x)+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\int_{-a}^{a}K(x-s)\tau(s)\,ds-kA\int_{-a}^{a}K'(x-s)\tau'(s)\,ds+$$

$$+A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds=g(x),\quad x\in(-a,a),$$

$$A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\int_{-a}^{a}K(x-s)\tau(s)\,ds-$$

$$-kA\int_{-a}^{a}K'(x-s)\tau'(s)\,ds=g(x),\qquad x\in(a,b) \tag{2.4}$$

при условиях

$$\int_{-a}^{a}\tau(s)\,ds=0\,,\quad \int_{b}^{\infty}\tau(s)\,ds=Q-P\,. \tag{2.5}$$

Таким образом, задачи сведены к решению системы интегро-дифференциальных уравнений типа (2.4) при условии (2.5).

После решения системы (2.4) значения $\tau(x)$ при $|x|>b$ будут определяться из уравнения (2.2) при требовании, чтобы $|x|>b$.

Теперь отметим некоторые возможные предельные случаи, которые непосредственно можно получить из уравнений (2.2) и (2.4) прямой подстановкой: т.е. а) при $k=0$ [1], б) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ [2], в) при $a\to 0$ (случай с двумя полубесконечными стрингерами), г) $k=0$ и $a\to b$ при учете P неизвестной ($P=X$), д) при $k=0$ $a\to b$ и $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, которые будут задавать основные разрешающие уравнения соответствующих задач при приложенных здесь силах.

Решение системы (2.4) при условиях (2.5) сведем к системе бесконечных систем алгебраических уравнений. Для этой цели заметим, что имеют место следующие представления:

$$K(x)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+R_1(x)\,, \tag{2.6}$$

$$K'(x-s)+K'(x+s)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)+\frac{\lambda_1}{2}[\operatorname{sgn}(x-s)+\operatorname{sgn}(x+s)]+\lambda_1\left[R_2(x-s)+R_2(x+s)\right],$$

где

$$R_1(x)=-\frac{C}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(\lambda_1 x)^{2k}}{\pi(2k)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k}-C\right)-\frac{|\lambda_1 x|^{2k-1}}{2(2k-1)!}\right],$$

$$R_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(\lambda_1 x)^{2k-1}}{\pi(2k-1)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+1+\cdots+\frac{1}{2k-1}-C\right)+\frac{|\lambda_1 x|^{2k}\operatorname{sgn}x}{2(2k)!}\right],$$

С – постоянная Эйлера.

Следовательно, систему (2.4) можно представить так:

$$\begin{gathered}(1-kA\lambda_1)\tau(x)+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)ds-\frac{kA}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}\tau'(s)ds+\\ +(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\tau(s)ds-kA\lambda_1\int_{-a}^{a}R_2(x-s)\tau'(s)ds+\frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x})g_u(s)ds+\\ +A\lambda_1\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]g_u(s)ds=g(x),\quad x\in(-a,a),\end{gathered}\tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{1}{s-x}g_u(s)ds-\frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{1}{s+x}g_u(s)ds+\frac{A\lambda_1}{2}\int_{a}^{b}[\mathrm{sgn}(x-s)+\mathrm{sgn}(x+s)]g_u(s)ds+\\ +A\lambda_1\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]g_u(s)ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)ds-\frac{kA}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}\tau'(s)ds+\\ +(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\tau(s)ds-kA\lambda_1\int_{-a}^{a}R_2(x-s)\tau'(s)ds=g^*(x),\quad x\in(a,b).\end{gathered}$$

Далее, из первого уравнения (2.7) легко обнаружить, что значения $\tau(x)$ в точках $x=\pm a$ ограничены [2–7]. Следовательно, решения системы (2.7) представим в виде:

$$\tau(x)=\tau(a)\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}U_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right),\quad x\in[-a,a],\tag{2.8}$$

$$g_u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-h^2(x)}}\sum_{n=0}^{\infty}Y_nT_n[h(x)],\quad |h(x)|<1,\quad x\in(a,b),\tag{2.9}$$

где $h(x)=(2x-a-b)/(b-a)$, $T_n(y)=\cos(n\arccos y)$ ($n=0,1,2,...$) – многочлены Чебышева первого рода $U_{n-1}(x)=\sin(n\arccos x)/\sin(\arccos x)$ ($n=1,2,...$) – многочлены Чебышева второго рода [10], $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Отметим, что из (1.4) и (1.6) легко получить, что $g_u(x)$ и $\tau'(x)$ в точках $x=\pm a$ имеют логарифмическую особенность.

Подставляя выражения $\tau(x)$, $g_u(x)$ в систему (2.7), пользуясь соотношениями [1, 7–14]:

$$\begin{gathered}\int_{a}^{b}\sqrt{1-h^2(x)}U_{n-1}[h(x)]U_{m-1}[h(x)]dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\pi(b-a)}{4}, & n=m=1,2,...\end{cases},\quad x\in(a,b),\\ \frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{T_n[h(s)]}{(s-x)\sqrt{1-h^2(s)}}ds=\begin{cases}0, & n=0\\ U_{n-1}[h(x)], & n=1,2,...\end{cases},\quad x\in(a,b),\\ \frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{T_n[h(s)]}{(s-x)\sqrt{1-h^2(s)}}ds=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{h^2(x)-1}}, & n=0\\ U_{n-1}[h(x)]-\dfrac{T_n[h(x)]}{\sqrt{h^2(x)-1}}, & n=1,2,...\end{cases},\quad x>b,\end{gathered}\tag{2.10}$$

а также первым условием из (2.5), получим

$$\frac{1-kA\lambda_1}{kAa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\sqrt{a^2-x^2}U_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{akA\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{T_{2n}\left(s/a\right)ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{kAa\pi}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds+$$

$$+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)ds-$$

$$-\frac{\lambda_1\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds-2\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(s/a\right)ds+ \tag{2.11}$$

$$+\frac{1}{k\pi}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_{a}^{b}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds+\frac{\lambda_1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds=$$

$$=-\frac{Y_0}{k\pi}\int_{a}^{b}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds-\frac{\lambda_1Y_0}{k}\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+g_1(x),\qquad x\in(-a,a),$$

$$A\sum_{n=1}^{\infty}Y_nU_{n-1}[h(x)]-\frac{A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}Y_n\int_{a}^{b}\frac{1}{(s+x)}\frac{T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}-\frac{A\lambda_1(b-a)}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{n}\sqrt{1-h^2(x)}U_{n-1}[h(x)]+$$

$$+A\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n\left[h(s)\right]ds+$$

$$+A\lambda_1Y_0\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+$$

$$+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+$$

$$+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{a\pi}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)ds+$$

$$+\frac{2kA}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{T_{2n}\left(s/a\right)ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}+2kA\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds- \tag{2.12}$$

$$-\frac{kA\lambda_1\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds=g_2(x),\qquad x\in(a,b),$$

где

$$g_1(x)=\frac{g(x)}{kA}-\frac{\tau(a)}{a}\left[\frac{(1-kA\lambda_1)}{kA}x-\frac{1}{\pi}\ln\frac{a-x}{a+x}\right],$$

$$g_2(x)=g^*(x)+\frac{kA\tau(a)}{\pi a}\ln\frac{x-a}{x+a},\qquad g^*(x)=g(x)+kA\lambda_1\tau(a)\ .$$

Теперь, умножив обе части (2.11) на $(1/a\pi)\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}(x/a)$, а (2.12) на $4\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]/\pi A(b-a)$ и интегрируя в соответствующих интервалах, известным способом получим следующую систему бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{m,n}^{(1)}+K_{m,n}^{(2)}+R_{m,n}^{(1)}+R_{m,n}^{(2)}\right)X_n+\left(K_{m,n}^{(3)}+R_{m,n}^{(3)}\right)Y_n\right]=\alpha_m^{(1)}Y_0+L_m^{(1)}+f_m^{(1)}\quad (m=1,2,..) \tag{2.13}$$

$$Y_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{m,n}^{(4)}+K_{m,n}^{(5)}+K_{m,n}^{(6)}\right)Y_n+\left(R_{m,n}^{(4)}+R_{m,n}^{(5)}+R_{m,n}^{(6)}+R_{m,n}^{(7)}\right)X_n\right]=\alpha_m^{(2)}Y_0+L_m^{(2)}+f_m^{(2)}\quad (m=1,2,..) \tag{2.14}$$

Здесь

$$L_m^{(1)}=K_m^{(1)}+R_m^{(1)}+R_m^{(2)},\qquad L_m^{(2)}=K_m^{(2)}+R_m^{(3)}+R_m^{(4)},$$

$$K_{m,n}^{(1)}=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{2k\pi A}\int_{-a}^{a}\left[\frac{T_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{n(2n-1)}-\frac{T_{2n+1}\left(\frac{x}{a}\right)}{n(2n+1)}\right]\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K_{m,n}^{(2)}=\frac{(kA\lambda_1-1)a}{kA}\frac{4(2m-1)}{\pi\left[(2n-1)^2-4(m-1)^2\right]\left[(2n-1)^2-4m^2\right]},\ (n,m=1,2,...),$$

$$R_{m,n}^{(1)}=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{Ak\pi a^2 n}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}\,U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R_{m,n}^{(2)}=\frac{2\lambda_1}{\pi a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K_{m,n}^{(3)}=\frac{1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\left\{U_{n-1}[h(x)]-U_{n-1}[h_*(x)]-\frac{T_n\left[h(x)\right]}{\sqrt{h^2(x)-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{T_n\left[h_*(x)\right]}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}\right\}\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R_{m,n}^{(3)}=\frac{\lambda_1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{T_n\left[h(s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$\alpha_m^{(1)}=-\frac{1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}+\lambda_1\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\right]\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K_m^{(1)}=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{kA\pi^2a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R_m^{(1)}=\frac{\lambda_1\tau(a)}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,\qquad h_*(x)=h(-x),$$

$$R_m^{(2)}=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{kA\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)ds\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$f_m^{(1)} = \frac{1}{\pi a}\int_{-a}^{a} g_1(x)\sqrt{a^2-x^2}\,U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx\,, \qquad f_m^{(2)} = \frac{4}{A\pi(b-a)}\int_{a}^{b} g_2(x)\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$K_{m,n}^{(4)} = \frac{4}{\pi(a-b)}\int_a^b \sqrt{\frac{1-h^2(x)}{h_*^2(x)-1}}\left[\sqrt{h_*^2(x)-1}-h_*(x)\right]^n U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$K_{m,n}^{(5)} = \frac{\lambda_1(b-a)}{\pi}\frac{2m\left[1+(-1)^{n-m}\right]}{\left[n^2-(m-1)^2\right]\left[n^2-(m+1)^2\right]}, \quad n \neq m \pm 1; \ K_{m,n}^{(5)} = 0, \ n = m \pm 1,$$

$$K_{m,n}^{(6)} = \frac{4\lambda_1}{\pi(b-a)}\int_a^b\int_a^b \frac{[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\,T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$R_{m,n}^{(4)} = \frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{\pi A(b-a)}\int_a^b\left[\frac{a^{2n}}{n(2n-1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n-1}} - \frac{a^{2n+2}}{n(2n+1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n+1}}\right]\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$R_{m,n}^{(5)} = \frac{4(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{A\pi a(b-a)n}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}\,U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}\left[h(x)\right]dx,$$

$$R_{m,n}^{(6)} = \frac{8k}{\pi(b-a)}\int_a^b \frac{a^{2n}\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}\left[h(x)\right]dx}{\sqrt{x^2-a^2}\,(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n}},$$

$$R_{m,n}^{(7)} = \frac{8k\lambda_1}{\pi(b-a)a}\int_a^b\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$R_m^{(3)} = \frac{4(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{\pi A(b-a)a}\int_a^b\int_{-a}^{a} sR_1(x-s)\,ds\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$R_m^{(4)} = \frac{4k\lambda_1\tau(a)}{\pi(a-b)a}\int_a^b\int_{-a}^{a} R_2(x-s)ds\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$K_m^{(2)} = \frac{4(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{\pi^2(b-a)a}\int_a^b\int_{-a}^{a} s\ln\frac{1}{|x-s|}ds\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$\alpha_m^{(2)} = \frac{4}{\pi(a-b)}\left[\int_a^b\sqrt{\frac{1-h^2(x)}{h_*^2(x)-1}}U_{m-1}[h(x)]dx + \lambda_1\int_a^b\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx\right]$$

Система уравнений (2.13), (2.14) исследуется аналогично системам [11-13]. Оказывается, что при произвольных значениях λ_1, λ_2 эта система квазивполне регулярна. Постоянная Y_0 определяется из второго условия (2.5). После определения X_n $(n = 1,2,3...)$ и Y_n $(n = 0,1,2,...)$ значения $\tau(x)$ при $x > b$ будут определяться так:

$$\tau(x)=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left[\frac{a^{2n}}{n(2n-1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n-1}}-\frac{a^{2n+2}}{n(2n+1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n+1}}\right]+$$

$$+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{\pi a}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)\,d\,s+$$

$$+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}\,U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)d\,s-2kA\sum_{n=1}^{\infty}X_n\frac{a^{2n}}{\sqrt{x^2-a^2}\,(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n}}-$$

$$-2kA\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)d\,s+\frac{kA\lambda_1\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds-$$

$$-A\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\left[U_{n-1}[h(x)]-U_{n-1}\left[h_*(x)\right]-\frac{T_n\left[h(x)\right]}{\sqrt{h^2(x)-1}}+\frac{T_n\left[h_*(x)\right]}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}\right]+$$

$$+AY_0\left[\frac{1}{\sqrt{h^2(x)-1}}-\frac{1}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}-\lambda_1\int_a^b\left[R_2(x-s)+R_2(x+s)\right]\frac{ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\right]-$$

$$-A\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{T_n\left[h(s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+kA\lambda_1\tau\left(a\right)+\frac{kA\tau(a)}{\pi a}\ln\frac{x-a}{x+a}+g(x),\quad x>b$$

а значение $\tau\left(x\right)$ в точке $x=a$ получим из первого уравнения (2.7), подставляя $x=a$.

Далее, из представления (2.3) и (2.6) следует, что $\tau\left(x\right)$ в точках $x=\pm c$ имеет логарифмическую особенность.

С другой стороны, из (2.1) в силу разложения $K\left(\sigma\right)=1/\left(\lambda_1+|\sigma|\right)$ при $|\sigma|\to 0$ получим, что $\tau\left(x\right)=F^{-1}\left[\overline{\tau}\left(\sigma\right)\right]$ при $|x|\to\infty$ имеет степенной порядок $O\left(x^{-3}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А. Об одной задаче для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе упругими накладками. //Уч. записки ЕГУ, Естеств. науки. 1984. №1. С. 46-51.
2. Керопян А.В. Контактные задачи для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склеенными стрингерами. //Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 2007. №2. С. 35–44.
3. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. // Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol. XXIII, 1970. P. 521.
4. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками //Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С.180–184.

5. Саркисян В.С., Керопян А.В. Контактные задачи для упругих тел, на границе которых приклеен линейно или нелинейно деформируемый стрингер конечной длины. //В сб. научных трудов: “Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела.” Ереван: НАН Армении. 1999. С. 126 – 132.
6. Григорян Э.Х. О решении задачи для упругой бесконечной пластины, на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №4. С. 11-16.
7. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С. 14-23.
8. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1979. №2. С.62–71.
9. Саркисян В.С., Григорян Э.Х., Шагинян С.С. О двух задачах для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным включением. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1981. №1. С.27–40.
10. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415с.
11. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 259с.
12. Григорян Э.Х., Манукян Э.А. Об одной задаче для упругой плоскости с частично скрепленным бесконечным упругим включением.// Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1981. С. 51-59.
13. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487с.
14. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев–Одесса: “Вища школа”, 1982. 167 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
26.02.2007