ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ РАВНОПРОЧНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Капанадзе Г. А.

Ключевые слова:плоская задача, формулы Колосова–Мусхелишвили, задача Келдыша–Седова.

Keywords: Plane problem, Kolosov-Muskhelishvili's complex potentials, Keldysh-Sedov problem.

Կապանաձե Գ.Ա.

Պարբերական տեղադրված հավասարամուր անցքերով թուլացված կիսահարթության համար առաձգականության տեսության մի հարթ խնդրի մասին

Դիտարկված է պարբերական տեղադրված հավասարամուր անցքերով թուլացված ներքևի կիսահարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիր: Ենթադրվում է, որ անցքերի եզրերին ազդում են հաստատուն նորմալ ուժեր, իսկ կիսահարթության եզրին տեղադրված է ուղղագիծ հիմքով ողորկ դրոշմ: Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու բանաձևերի օգնությամբ քննարկվող խնդիրը բերվել է կիսահարթության համար Կելդիշ-Սեդովի խնդրին, որի լուծմամբ կոմպլեքս պոտենցիալները և անհայտ կոնտուրների հավասարումները կառուցված են անալիտիկ:

G. A. Kapanadze

ON ONE PROBLEM OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY FOR A HALF-PLANE WEAKENED BY PERIODICALLY DISTRIBUTED EQUI-STRONG HOLES

The problem of elastic equilibrium of a lower half-plane which is weakened by periodically distributed equi-strong holes, is considered. The hole boundaries are assumed to be free from external stresses, an absolutely smooth rigid stamp with a rectilinear base is applied to the boundary of the half-plane, and external normal contracting forces with principal vector *P* are applied to the stamp.

The problem is to find stressed state of the half-plane as well as analytic forms of boundaries of equi-string holes under the condition that tangential normal stress takes on them constant value.

Using the methods of the theory of analytic functions, the problem is reduced to the Keldysh-Sedov problem for a half-plane whose solution allows us to construct Kolosov-Muskhelishvili's complex potentials and equations of unknown contours effectively (analytically).

Рассматривается периодическая задача упругого равновесия нижней полуплоскости, ослабленной периодично расположенными равнопрочными отверстиями. Предполагается, что на границах отверстий действуют постоянные нормальные напряжения, а на границе полуплоскости приложен абсолютно гладкий жёсткий штамп с прямолинейным основанием и к штампу приложены внешние периодически повторяющиеся нормальные сжимающие силы с главным вектором P, направленным вертикально вниз.

Задача заключается в определении напряженного состояния полуплоскости и аналитических форм границ равнопрочных отверстий при условии, что на них нормальное напряжение принимает постоянное значение.

На основании формул Колосова–Мусхелишвили рассмотренная задача приведена к задаче Келдыша–Седова для полуплоскости и решением последней, комплексные потенциалы и уравнения искомых контуров построены эффективно (в аналитическом виде).

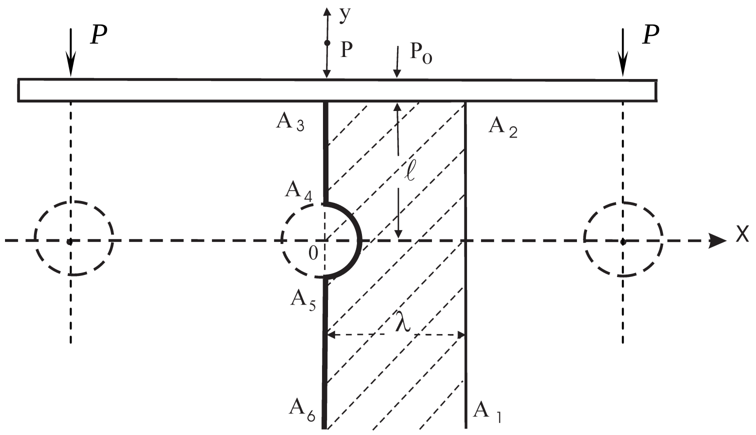
Аналогичные задачи плоской теории упругости для бесконечных областей, ослабленных равнопрочными отверстиями, исследованы в работах [1-4], а для конечной двухсвязной области – в работах [5–7].

Постановка задачи. Пусть на границе упругой нижней полуплоскости, ослабленной периодично расположенными отверстиями, приложен прямолинейный абсолютно гладкий жёсткий штамп, на который действуют внешние периодически повторяющиеся нормальные усилия с главным вектором P и штамп перемещается лишь вертикально вниз. Предположим, что отверстия симметричны относительно локальных вертикальных осей.

Рассмотрим задачу: Определить упругое равновесие полуплоскости и аналитическую форму контуров отверстий при условии, что на этих контурах нормальное напряжение принимает одно и то же постоянное значение $\sigma_s = k = \text{const}$.

Решение задачи. В силу симметрии и периодичности поставленной задачи ограничимся рассмотрением упругого равновесия полуполосы S (заштрихованная часть на фиг.1), граница которой состоит из прямолинейных отрезков $L_1 = \sum_{j=1}^{4} L_1^{(j)}$,

$L_1^{(j)} = A_j A_{j+1}$ $(j = 1,2,3,5)$ и неизвестной дуги $L_0 = A_4 A_5$



Фиг. 1

(под A_1 и A_6 подразумеваем точки $\lambda - i\infty$ и $-i\infty$, соответственно).

Легко заметить, что в рассмотренном случае касательные напряжения $\tau_{ns} = 0$ на всей границе области S, а нормальное смещение $\text{v}_n = \text{v} = \text{const}$ на $L_1^{(2)}$ и $\text{v}_n = 0$ на $L_1^{(1)} \cup L_1^{(3)} \cup L_1^{(4)}$.

На основании известных формул Колосова–Мусхелишвили [8] поставленная задача сводится к отысканию двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, голоморфных в области S по граничным условиям на $L = L_1 \cup L_0$:

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} \left[\aleph\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}\right] = 2\mu\, \text{v}_n(t), \quad t \in L_1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)} \left[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right] = C(t), \quad t \in L_1, \tag{2}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = B(t), \quad t \in L_0, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\varphi'(t)}\right] = \frac{k}{4}, \quad t \in L_0, \tag{4}$$

где $\alpha(t)$ – угол между внешней нормалью к контуру L_1 и осью ox,

$$C(t) = \operatorname{Re}\left[i \int_{A_1}^{t} \sigma_n(s_0) \exp i(\alpha(t_0) - \alpha(t)) ds_0 + \exp(-\alpha(t))(c_1 + ic_2) \right], \; t \in L_1,$$

$$B(t) = i\int_{A_1}^{t} \sigma_n(s_0)\exp i\alpha(t_0)ds_0 + c_1 + ic_2,\ t\in L_0;$$

c_1 и c_2 – произвольные действительные постоянные. Легко заметить, что $C(t)$ – кусочно-постоянная, а $B(t)$ – постоянная функция.

В дальнейшем потребуем, чтобы функция $\varphi(z)$ была непрерывна в замкнутой области $S+L$, а функции $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ были непрерывно продолжимыми на границе L всюду, за исключением, быть может, точек A_k, в окрестности которых оси удовлетворяют условию

$$|\varphi'(z)|,\quad |\psi(z)| < M\,|z - A_k|^{-\delta_k}, \tag{5}$$

где $M = \text{const},\ 0 \le \delta_k < 1,\ k = 2,3;\ \ 0 \le \delta_k < \dfrac{1}{2};\ k = 4,5$.

Сложением равенств (1) и (2), а затем дифференцированием на дуговой абсциссе s, с учетом кусочно-постоянности функций $\mathrm{v}_n(t)$ и $C(t)$, получаем

$$\mathrm{Im}\ \varphi'(z) = 0,\ \ t\in L_1. \tag{6}$$

Условия (4) и (6) представляют собой задачу Келдыша–Седова (см. [8], [9]):

$$\mathrm{Re}\left[\varphi'(t) - \frac{k}{4}\right] = 0,\ t\in L_0;\ \ \mathrm{Im}\left[\varphi'(t) - \frac{k}{4}\right] = 0,\ t\in L_1. \tag{7}$$

Задача (7) при условии (5) имеет единственное решение $\varphi'(z) = \dfrac{k}{4}$, и таким образом получаем

$$\varphi(z) = \frac{k}{4}z \tag{8}$$

(произвольную постоянную интегрирования считаем равной нулю).

Полагаем $c_1 = -P_0$ (P_0–главный вектор внешних усилий, приложенных на $L_1^{(2)}$, $c_2 = \int_{A_3}^{A_4}\sigma_n ds - \int_{A_1}^{A_2}\sigma_n ds$, с учетом (6), из граничных условий (1)–(3) получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\left[\frac{k}{2}k + \psi(t)\right] = -P_0;\\
&\mathrm{Re}\left[\frac{k}{2}k - \psi(t)\right] = -\frac{\lambda k(\aleph - 3)}{4};
\end{aligned}\right\}\ t\in L_1^{(1)};$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left[\frac{k}{2}k + \psi(t)\right] = 2\mu v - \frac{\aleph - 3}{4}kt;\\
&\mathrm{Im}\left[\frac{k}{2}k - \psi(t)\right] = -2\mu v + \frac{\aleph + 1}{4}kl;
\end{aligned}\right\}\ t\in L_1^{(2)}; \tag{9}$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{k}{2}k + \psi(t)\right] = 0;\ \mathrm{Re}\left[\frac{k}{2}k - \psi(t)\right] = 0,\quad t\in L_1^{(3)};$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k+\psi(t)\right]=0;\ \operatorname{Im}\left[\frac{k}{2}k-\psi(t)\right]=0,\ \ t\in L_0;$$
$$\operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k+\psi(t)\right]=0;\ \operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k-\psi(t)\right]=0,\ \ t\in L_1^{(4)};$$

Для равновесия выделенной части предполагаем, что к этой части бесконечности приложены силы, равнодействующая которых равна $-P_0$ (т.е. напряжения на бесконечности остаются ограниченными).

Пусть функция $z=\omega(\zeta)$ комформно отображает верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im}\zeta>0$) на область S. Обозначим через a_k прообразы точек A_k ($k=1,\ldots,5$) и будем считать, что $a_1=-\infty$; $a_4=-1$; $a_5=1$; $a_6=\infty$ (точки $\sigma=-\infty$ и $\sigma=\infty$ представляют одну и ту же точку $\zeta=\infty$ плоскости ζ).

Граничные условия (9) относительно функций

$$\Phi(\zeta)=\frac{k}{2}\omega(\zeta)+\psi\left[\omega(\zeta)\right];\ \Psi(\zeta)=\frac{k}{2}\omega(\zeta)-\psi\left[\omega(\zeta)\right] \tag{10}$$

примут вид:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\Phi(\tau)=-P_0,\ \ \tau\in(-\infty;a_2);\\&\operatorname{Im}\Phi(\tau)=2\mu v-\frac{\aleph-3}{4}k\,l,\ \ \ \tau\in(a_2;a_3);\\&\operatorname{Re}\Phi(\tau)=0,\ \ \tau\in(a_3;\infty);\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\Psi(\tau)=-\frac{\aleph-3}{4}k\lambda,\ \ \ \tau\in(-\infty;a_2);\\&\operatorname{Im}\Psi(\tau)=-2\mu v+\frac{\aleph+1}{4}k\,l,\ \ \ \ \tau\in(a_2;a_3);\\&\operatorname{Re}\Psi(\tau)=0,\ \ \tau\in(a_3;-1)\cup(1;\infty);\ \operatorname{Im}\Psi(\tau)=0,\ \tau\in(-1;1).\end{aligned} \tag{12}$$

Задачи (11) и (12) представляют собой задачу Келдыша–Седова для полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$.

Рассмотрим задачу (11). Будем искать ограниченное на бесконечности решение этой задачи. Это решение представится формулой

$$\Phi(\zeta)=\frac{\chi_1(\zeta)}{\pi i}\left[-P_0\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\zeta)}+i\left(2\mu\nu-\frac{\aleph-3}{4}k\,l\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\zeta)}\right], \tag{13}$$

где $\chi_1(\zeta)=\sqrt{(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}$ (под радикалом подразумевается ветвь, разложение которой в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $\sqrt{(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}=\zeta+a_1+\cdots$. Аналогичным образом будем понимать радикалы, встречающиеся в дальнейшем).

Рассмотрим теперь задачу (12). Необходимое и достаточное условие существования ограниченного на бесконечности решения этой задачи имеет вид

$$-\frac{\aleph-3}{4}k\lambda\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}+i\left(2\mu\nu-\frac{\aleph+1}{4}kl\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}=0, \quad (14)$$

а само решение дается формулой

$$\Psi(\zeta)=\frac{\chi_2(\zeta)}{\pi i}\left[-\frac{\aleph-3}{4}\lambda k\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\zeta)}+\right.$$
$$\left.+i\left(-2\mu\nu+\frac{\aleph+1}{4}kl\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\zeta)}\right], \quad (15)$$

где $\chi_2(\zeta)=\sqrt{(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)(\zeta-1)(\zeta+1)}$.

После нахождения функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, на основании (10), функции $\omega(\zeta)$ и $\psi[\omega(\zeta)]$ выражаются формулой

$$\omega(\zeta)=\frac{1}{k}\left[\Phi(\zeta)+\Psi(\zeta)\right];\ \Phi[\omega(\zeta)]=\frac{1}{k}\left[\Phi(\zeta)-\Psi(\zeta)\right]. \quad (16)$$

Перейдем теперь к определению аналитической формы искомых равнопрочных контуров. Уравнение части A_4A_5 искомого контура получаем из образа функции $\omega(\zeta)$ при $\zeta=\xi e[-1;1]$.

Заметим, что интегралы, входящие в формулу (13), выражаются в элементарных функциях, а интегралы, входящие в формулы (14) и (15), выражаются через эллиптические интегралы первого и третьего рода, а именно, для $\zeta=\xi e[-1;\ 1]$ имеем (см.[10]):

$$\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{1}{\chi_1(\xi)}\ln\frac{a_3-a_2}{\left[\sqrt{\xi-a_2}-\sqrt{\xi-a_3}\right]^2};$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{\pi i}{\chi_1(\xi)};$$

$$\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{2}{\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}}F(\varphi_0;k_0);$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)}=-\frac{2i}{\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}}F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right);$$

$$\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{2}{(\xi-a_2)(\xi-a_3)\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}}\times$$
$$\times\left[(a_3-a_2)\prod\left(\varphi_0;\frac{(a_2-1)(\xi-a_3)}{(a_3-1)(\xi-a_2)};k_0\right)+\right.$$
$$\left.+(a_2-\xi)F(\varphi_0;k_0)\right];$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{2i}{(\xi+1)(\xi-a_3)\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}}\times$$

$$\times\left[(a_3+1)\prod\left(\frac{\pi}{2};\frac{(a_2-a_3)(\xi+1)}{(a_2+1)(\xi-a_3)};k_1\right)+(\xi-a_3)\,F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right)\right],$$

где $\varphi_0=\arcsin\sqrt{\frac{1-a_3}{1-a_2}}$; $k_0=\sqrt{\frac{(a_3+1)(a_2-1)}{(a_2+1)(a_3-1)}}$; $k_1=\sqrt{\frac{2(a_3-a_2)}{(a_2+1)(a_3-1)}}$, а

$$F(\varphi;k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\qquad\text{и}\qquad\prod(\varphi;n;k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

– эллиптические интегралы первого и третьего рода, соответственно.

На основании приведенных формул, в силу (16), уравнение искомой части равнопрочного контура имеет вид:

$$\omega(\xi)=\frac{1}{k}\left\{\frac{P_i}{\pi}\ln\frac{a_3-a_2}{\left[\sqrt{\xi-a_2}-\sqrt{\xi-a_3}\right]^2}+i\left(2\mu\,\mathrm{v}-\frac{\aleph-3}{4}k\,l\right)-\right.$$

$$-\frac{\aleph-3}{2\pi i}k\lambda\frac{1}{\sqrt{(a_2+1)(a_3-1)}}\sqrt{\frac{\xi^2-1}{(\xi-a_2)(\xi-a_3)}}\times$$

$$\times\left[(a_3-a_2)\prod\left(\varphi_0;\frac{(a_2-1)(\xi-a_3)}{(a_3-1)(\xi-a_2)};k_0\right)+\right.$$

$$+(a_2-\xi)\,F\left(\varphi_0;k_0\right)+\frac{i}{\pi}\left(-2\mu\,\mathrm{v}+\frac{\aleph+1}{4}k\,l\right)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{(a_2+1)(a_3-1)}}\sqrt{\frac{(\xi-1)(\xi-a_2)}{(\xi+1)(\xi-a_3)}}\right]\times$$

$$\times\left[(a_3+1)\prod\left(\frac{\pi}{2};\frac{(a_2-a_3)(\xi+1)}{(a_2+1)(\xi-a_3)};k_1\right)+\right.$$

$$\left.\left.+(\xi-a_3)\,F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right)\right]\right\},\quad\xi\in[-1;1],\tag{17}$$

а условие (14) представится в виде

$$\lambda\,k(\aleph-3)\,F(\varphi_0;k_0)=\left[-8\mu\,\mathrm{v}+(\aleph+1)k\,l\,\right]F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right).\tag{18}$$

Учитывая [11], будем иметь

$$\Phi(a_2)=-P_0+i\left(2\mu\,\mathrm{v}-\frac{\aleph-3}{4}k\,l\right),$$

$$\Psi(a_2)=-\frac{\aleph-3}{4}k\,\lambda+i\left(-2\mu\,\mathrm{v}+\frac{\aleph+1}{4}k\,l\right),$$

$$\omega(a_2)=A_2=\lambda+il$$

из (16) получаем $k = -\frac{4P_0}{(\varkappa+1)\lambda}$. Подставляя сюда значение $\aleph = 3 - 4\sigma$ (σ – коэффициент Пуассона), получим

$$k = -\frac{P_0}{(1-\sigma)\lambda}. \tag{19}$$

Таким образом, относительно параметров a_2 и a_3 получаем условие (18). Фиксируя один из этих параметров и определяя другой из упомянутых условий, по формуле (17) определяется аналитическая форма части искомого равнопрочного контура, а другая часть определяется путем симметричного отражения относительно вертикальной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. // ПММ. 1974. Т.38. № 6. С.963-980.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 216 с.
3. Иванов Г. И., Космодамианский А. С. К решению задач с неизвестной границей при наличии циклической симметрии. //Тр. Николаевского кораблестр. ин-та, 1973. 302 с.
4. Мжаванадзе Ш. В. Обратные задачи плоской теории упругости при наличии циклической симметрии. //Сообщ. АН ГССР. 1984. Т.113. № 1. С.53-60.
5. Банцури Р. Д., Исаханов Р. С. Некоторые обратные задачи теории упругости. //Тр. Тбилисск. мат. ин-та, 87(1987). С. 3-20.
6. Банцури Р. Д., Исаханов Р. С. Полуобратная задача теории упругости для конечной двухсвязной области. //Тр. Тбилисск. мат. ин-та, 90(1988). С. 3-15.
7. Bantsuri R. On one Mixed Problem of the Plane Theory of Elasticity with a Partially Unknown Boundary. Proced. of A. Razmadze Mathematical Inst. 140(2006), 8-16.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. //ДАН СССР. 1937. Т. XVI. № 1. С.7-10.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Институт математики
НАН Грузии им. А.М.Размадзе

Поступила в редакцию
2.05.2007