ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СВОЙСТВАМИ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Белубекян М. В., Мгерян Д. Э.

Ключевые слова: поверхностные волны, условия затухания, кубическая симметрия.
Keywords: surface waves, damping conditions, cube symmetry.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Դ. Հ. Միհերյան
Առանձգական մակերևույթային ալիքների տարածման եռաչափ խնդիր խորանարդային սիմետրիա ունեցող առաձգական կիսատարածություններում

Ներկա աշխատանքում եռաչափ դրվածքով ուսումնասիրվում է մակերևույթային ալիքների վարքը խորանարդային սիմետրիա ունեցող առանձգական կիսատարածություններում, երբ կիսատարածության եզրը ազատ է լարումներից: Այսպիսի կիսատարածություններում սիմետրիայի հարթություն չլինելու պատճառով հնարավոր չի լինում մտցնել պոտենցիալ ֆունկցիաներ,ինչպես [1,2,3,4] աշխատանքնեռում, հետևաբար խնդիրը լուծվել է ուղղիղ ձևով: Ստացվել է, որ մակերևույթային ալիքի մարման պայմանը կախված է ալիքային թվերից: Ցույց է տրվել, որ մակերևույթային ալիքը ունի դիսպերսիայի հատկություն, ստացվել և լուծվել է դիսպերսիոն հավասարումը:

M. V. Belubekyan, D. H. Mheryan
Three dimensional problem of surface wave propagation in elastic half-space with the properties of cube symmetry

In the offered work three- dimensional problem of propagation of elastic surface waves in a cube isotropic semi-space, when on the surface of semi-space all three components of stresses are equal to zero, was considered. In these mediums the plane of simmetry does not exists, so we can't introduce the potential functions, as in works [1,2,3,4], so we solved the problem without potential functions. It is shown, that conditions of damping of surface waves are depending from wave numbers. The new dispersion equation is obtained and solved.

В данной работе рассматривается трехмерная задача распространения упругих поверхностных волн в полупространстве из материала со свойствами кубической симметрии. В таких средах нет плоскостей изотропии [1,2,3,4]. Задача решена без введения потенциальных функций. Получено, что условия затухания поверхностной волны зависят от волновых чисел. Доказано, что в этом случае поверхностная волна обладает свойством дисперсии. Получено и решено дисперсионное уравнение.

1.Рассматривается полупространство из материала со свойствами кубической симметрии. Предполагается, что координатные оси x и y лежат в плоскости, ограничивающей полупространство, а ось z направлена перпендикулярно к этой плоскости, в глубь полупространства. Далее предполагается, что координатные оси совпадают с осями кубической симметрии. В таком случае полупространство в декартовой координатной системе занимает область $(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \le z < \infty)$.

Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид:

$$c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+$$
$$+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$
$$c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$
$$+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$
$$c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+c_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+$$
$$+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Здесь u, v, w– проекции вектора на оси координат x, y, z / соответственно, c_{ij} – три упругих независимых констант кубической симметрии, ρ –плотность материала, $\gamma=\frac{c_{11}-c_{12}}{2c_{44}}$ – коэффициент анизотропии для изотропных материалов $\gamma=1$.

При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания:

$$\lim_{z\to\infty}u=0,\quad \lim_{z\to\infty}v=0,\quad \lim_{z\to\infty}w=0 \tag{1.2}$$

Решения системы дифференциальных уравнений (1.1) представляются в виде:

$$u=Ae^{-pz}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y),$$
$$v=Be^{-pz}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y), \tag{1.3}$$
$$w=Ce^{-pz}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y).$$

Подстановка (1.3) в систему (1.1) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных A, B, C:

$$(\Gamma^2\eta-\theta^{-1}k_1^2-k_2^2+p^2)A+(2\gamma-\theta^{-1}-1)k_1k_2B+(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_1piC=0,$$
$$(2\gamma-\theta^{-1}-1)k_1k_2A+(\Gamma^2\eta-k_1^2-\theta^{-1}k_2^2+p^2)B+(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_2piC=0, \tag{1.4}$$
$$(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_1piA+(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_2piB+[\Gamma^2(\eta-1)+\theta^{-1}p^2]C=0.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\gamma=\frac{c_{11}-c_{12}}{2c_{44}},\ \theta=\frac{c_{44}}{c_{11}}<1,\ \eta=\frac{\omega^2}{c_2^2\Gamma^2}\,/\,\Gamma^2=k_1^2+k_2^2,\ c_2^2=\frac{c_{44}}{\rho}.$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.4), после некоторых преобразований, приводит к следующему уравнению:

$$\rho^3-(s_1+2s_2+4\varepsilon_1)\rho^2+[s_2(s_2+2s_1)+4\varepsilon_1s_2+\varepsilon_2]\rho+$$
$$+s_2(s_1s_2+\xi\varepsilon_1)=0 \tag{1.5}$$

где

$$\rho = \frac{p^2}{\Gamma^2},\ s_1 = 1-\theta\eta,\ s_2 = s_3 = 1-\eta,\ \varepsilon_1 = (\gamma-1)(1-\gamma\theta),$$

$$\varepsilon_2 = \xi(\gamma-1)[1-\theta-(\gamma-1)(3-4\gamma\theta)],\ \xi = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2+k_2^2)^2}.$$

2. По теореме Гаусса свободный член уравнения (1.5) представляет произведения корней этого уравнения с отрицательным знаком, его можно представить в следующем виде:

$$\theta(1-\eta)\left[\frac{1+\theta^{-1}-\sqrt{(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1})}}{2}-\eta\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1+\theta^{-1}+\sqrt{(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1})}}{2}-\eta\right]. \tag{2.1}$$

Отметим, что в случае изотропной среды $(\gamma = 1)$ выражение (2.1) принимает вид

$$\theta(1-\eta)(1-\eta)(1-\theta\eta). \tag{2.1a}$$

В случае, когда все корни уравнения (1.5) являются действительными, то они должны быть положительными, чтобы выполнялись условия затухания. Выражение (2.1) должно быть положительным. В этом случае знак выражения (2.1) определяется значением трех сомножителей. Из различных вариантов знаков сомножителей, определяющих положительность выражения (2.1), выбирается тот вариант, который в пределе $\gamma \to 1$ совпадает с условием затухания для изотропной среды. Следовательно, в этом случае условие затухания (1.2) принимает вид

$$0 < \eta < \min(1,\ \beta^*)$$
$$\beta^* = \frac{1+\theta^{-1}-\sqrt{(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1})}}{2}. \tag{2.2}$$

Показано, что $(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1}) > 0,\ \beta^* > 0.$ При $\xi = 1$ $\beta^* = \gamma$, а при $\xi = 0$ $\beta^* = 1$.

В табл.1 представлены значения β^* для $\xi = 1$. Характеристики материалов взяты из монографии [5].

Таблица1

материал	$\beta^*(\xi = 1)$
Al	0.8215
GaAs	0.5471
$Y_3Al_5O_{12}$	0.9621
$Y_3Fe_5O_{12}$	1.055
$Bi_{12}GeO_{20}$	1.91176
Au	0.3478
Pt	0.634

Из вышесказанного следует, что для тех материалов, у которых $\gamma < 1$, условия затухания получаются в виде $0 < \eta < \beta^*$, а для тех материалов, у которых $\gamma > 1$, условия затухания получаются в виде $0 < \eta < 1$.

В частном случае изотропной среды ($\gamma = 1$) условие затухания (2.2) совпадает с условием затухания для изотропных материалов.

3.Уравнение (1.5) можно представить в следующем виде:

$$(\rho - s_1)(\rho - s_2)^2 - 4\varepsilon_1\rho(\rho - s_2) + \varepsilon_2(\rho - \frac{\xi\varepsilon_1}{\varepsilon_2}s_2)\ . \tag{3.1}$$

В частном случае, при $\alpha = 1$ уравнение (3.1) приводится к следующему виду:

$$(\rho - s_2)\{\rho^2 - (4\varepsilon_1 + s_1 + s_2)\rho + \varepsilon_2 + s_1 s_2\} = 0\ .$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\rho^2 - (4\varepsilon_1 + s_1 + s_2)\rho + \varepsilon_2 + s_1 s_2 = 0\,. \tag{3.2}$$

Корни уравнения (3.2) имеют вид:

$$\rho_{12} = \frac{1}{2}\left\{ 4\varepsilon_1 + s_1 + s_2 \pm \sqrt{(4\varepsilon_1 + s_1 + s_2)^2 - 4(\varepsilon_2 + s_1 s_2)} \right\}$$

Для того, чтобы выполнялись условия затухания, требуется, чтобы $\rho_2 > 0$, то есть $\varepsilon_2 + s_1 s_2 > 0$ (3.3). Из (3.3) можно определить условие затухания:

$$0 < \eta < \min(1, \eta_*)$$

$$\eta_* = \frac{1 + \theta^{-1} - \sqrt{(\theta^{-1} - 1)^2 - 4\theta^{-1}[1 - \theta - (\gamma - 1)(3 - 4\gamma\theta)]\xi}}{2}\,. \tag{3.4}$$

4. Из уравнения (1.5) получаются корни $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, из которых корни p_1, p_2, p_3 и только они удовлетворяют условиям затухания, следовательно, u, v, w примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= \left\{ A_1 e^{-p_1 z} + A_2 e^{-p_2 z} + A_3 e^{-p_3 z} \right\} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \\ v &= \left\{ B_1 e^{-p_1 z} + B_2 e^{-p_2 z} + B_3 e^{-p_3 z} \right\} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \\ w &= \left\{ C_1 e^{-p_1 z} + C_2 e^{-p_2 z} + C_3 e^{-p_3 z} \right\} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Первое уравнение системы (1.4) умножаем на κ_2, а второе – на κ_1 и вычитая, получается:

$$B = \frac{k_2}{k_1}\frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_1}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2}A\ . \tag{4.2}$$

Подставляя выражение (4.2) в третье уравнение системы (1.4), получается:

$$C = \frac{pi}{k_1}\frac{\theta^{-1} - 2\gamma + 1}{s_2 - \theta^{-1}\rho}\frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2}A\ . \tag{4.3}$$

В (4.2) и (4.3) дополнительно использованы обозначения:

$$\xi_1 = \frac{2k_1^2}{\Gamma^2}, \quad \xi_2 = \frac{2k_2^2}{\Gamma^2}\ . \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что $\xi = \xi_1\xi_2$. Подставляя (4.2) и (4.3) в (4.4), получим:

$$u = \left\{ A_1 e^{-p_1 z} + A_2 e^{-p_2 z} + A_3 e^{-p_3 z} \right\} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y),$$

$$v = \{ \frac{k_2}{k_1} \frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_1}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2} A_1^{-p_1 z} + \frac{k_2}{k_1} \frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_1}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2} A_2^{-p_2 z},$$

$$+ \frac{k_2}{k_1} \frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_1}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2} A_3^{-p_3 z} \} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y),$$

$$w = \{ \frac{pi}{k_1} \frac{\theta^{-1} - 2\gamma + 1}{s_2 - \theta^{-1}\rho} \frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2} A_1 e^{-p_1 z}, \tag{4.5}$$

$$+ \frac{pi}{k_1} \frac{\theta^{-1} - 2\gamma + 1}{s_2 - \theta^{-1}\rho} \frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2} A_2 e^{-p_2 z},$$

$$+ \frac{pi}{k_1} \frac{\theta^{-1} - 2\gamma + 1}{s_2 - \theta^{-1}\rho} \frac{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi}{\rho - s_2 + (1-\gamma)\xi_2} A_3 e^{-p_3 z} \} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y).$$

5.Рассматривается полупространство со свободной от нагрузки поверхностью:

$$\sigma_{zz} = 0,\ \sigma_{zx} = 0,\ \sigma_{zy} = 0 \quad \text{при } z = 0. \tag{5.1}$$

Граничные условия (5.1) в перемещениях имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, (1 - 2\theta\gamma)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right] + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5.2}$$

Подстановка (4.5) в (5.2) приводит к следующей системе однородных и алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, A_3:

$$\sqrt{\rho_1}[q_1 f_1 - 1]A_1 + \sqrt{\rho_2}[q_2 f_2 - 1]A_2 + \sqrt{\rho_3}[q_3 f_3 - 1]A_3 = 0,$$

$$\sqrt{\rho_1}[q_1 f_1 - g_1]A_1 + \sqrt{\rho_2}[q_2 f_2 - g_2]A_2 + \sqrt{\rho_3}[q_3 f_3 - g_3]A_3 = 0, \tag{5.3}$$

$$f_1[2\theta\gamma - 1 - q_1\rho_1]A_1 + f_2[2\theta\gamma - 1 - q_2\rho_2]A_2 + f_3[2\theta\gamma - 1 - q_3\rho_3]A_3 = 0,$$

где

$$f_i = \frac{\rho_i - s_2 + (1-\gamma)\xi}{\rho_i - s_2 + (1-\gamma)\xi_2}, \quad i = 1,2,3,$$

$$g_i = \frac{\rho_i - s_2 + (1-\gamma)\xi_1}{\rho_i - s_2 + (1-\gamma)\xi_2}, \quad i = 1,2,3, \tag{5.4}$$

$$\mathrm{q}_i = \frac{\theta^{-1} - 2\gamma + 1}{s_2 - \theta^{-1}\rho_1}, \qquad i = 1,2,3\ .$$

Равенство нулю детерминанта системы (5.3) после ряда преобразований приводится к виду:

$$R(\eta,\xi) = \sqrt{\rho_1\rho_2}(\rho_1 - \rho_2)[\Omega - \rho_1\rho_2 + s_2\theta(\rho_1 + \rho_2)][(-1+\gamma)\xi + s_2 - \rho_3],$$

$$[(-1 + 2\gamma\theta s_2 - \rho_3)] - \sqrt{\rho_1\rho_3}(\rho_1 - \rho_3)[\Omega - \rho_1\rho_3 + s_2\theta(\rho_1 + \rho_3)]\times$$

$$\times[(-1+\gamma)\xi + s_2 - \rho_2][(-1 + 2\gamma\theta s_2 - \rho_2)] + \sqrt{\rho_2\rho_3}(\rho_2 - \rho_3)\times$$

$$\times[\Omega - \rho_2\rho_3 + s_2\theta(\rho_2 + \rho_3)][(-1+\gamma)\xi + s_2 - \rho_1][(-1 + 2\gamma\theta s_2 - \rho_1)], \tag{5.5}$$

где

$$\Omega = [1-\theta+2\theta(1-\gamma)][(1-\gamma)\xi-(1-\theta)s_2]-\theta^2 s_2^2 \ . \qquad (5.6)$$

Если вставить $\xi = 0,$ который соответствует задаче плоской деформации [6], то получится уравнение

$$\eta - \frac{4\gamma(1-\gamma\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}} = 0 \ . \qquad (5.7)$$

В частном случае изотропной среды $\gamma = 1,\ \rho_1 = 1-\eta,\ \rho_2 = 1-\eta,\ \rho_1 = 1-\theta+\eta$, а уравнение (5.5), после ряда преобразований приводится к уравнению Релея, для пространственной задачи [7,8]

$$(2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\theta\eta)} = 0 \ . \qquad (5.8)$$

Решив уравнение (5.5), можно найти параметр η и исследовать влияние дисперсии на поверхностную волну.

Для материала $Y_3Fe_5O_{12}$ (железоитриевый гранат) γ равна 1,05563.

В табл. 2 приводятся корни уравнения (5.5) для материала $Y_3Fe_5O_{12}$ в зависимости от ξ .

Таблица 2

ξ	η
0	0.86935
0.1	0.8690
0.2	0.86686
0.3	0.8683
0.4	0.8680
0.5	0.8677
0.6	0.8674
0.7	0.8671
0.8	0.8668
0.9	0.8665
1.0	0.8662

Таблица3

ξ	η
0	0,949033
0.1	0,946171
0.2	0,944108
0.3	0,942386
0.4	0,9408
0.5	0,9395
0.6	0,9382
0.7	0,9370
0.8	0,9359
0.9	0,9349
1.0	0,9339

При $\xi = 0$ значение η совпадает с корнем уравнения (5.7). Табл. 2 показывает, что с возрастанием ξ безразмерный параметр η уменьшается.

Для материала $Bi_{12}GeO_{20}$ (Германат висмута) γ равна 1.91176. В табл. 3 приводятся корни уравнения (5.5) для материала $Bi_{12}GeO_{20}$ в зависимости от ξ .

При $\xi = 0$ значение η совпадает с корнем уравнения (5.7). Табл. 3 показывает, что с возрастанием ξ безразмерный параметр η уменьшается, что приводит к увеличению степени локализации поверхностной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С. 362 –369.
2. Wàng Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional problems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol. 32. №1. PP.105 – 115.
3. Белубекян В. М., Мгерян Д. Э. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде. //Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. № 2. С.3-9.
4. Мгерян Д. Э. Распространение пространственной поверхостной волны, когда на границе полупространства одно касательное перемещение равно нулю. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №.2. С.18-23.
5. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
6. Kazaryan, K. B., Belubekyan M. V. Elastic waves propagation in an elastic layer with cubic anisotropic properties. //Pros. NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. №4. p.29–35.
7. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids, North-Holland. 425p.
8. Knowles J. K. A note on surface waves, J. of Geophysical Research. 1996. V.21. №22. P. 5480-5481.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
5.10.2007