ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3, 624.04

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОСЛАБЛЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Баблоян А.А., Багдасарян А.В.

Ключевые слова: прямоугольник, ослабленный, трещина, напряжение, перемещение.
Key words: rectangular, weakened, crack, tension, displacement.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ Բաղդասարյան.

Ուղղահայաց ճաքով թուլացված ուղղանկյան ճկվածքը

Բերվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը կենտրոնական տեղակայված ճաքով թուլացված ուղղանկյան համար: Ուղղանկյան հորիզոնական կողմերի վրա և ճաքի ափերին տրվում են լարումներ: Ուղղահայաց կողմերի վրա տրվում են երեք տիպի եզրային պայմաններ:

A.H. Babloyan, A.V. Baghdasaryan

The bending of rectangular weakened by a vertical crack

The solution of a problem of elasticity theory for rectangular weakened by a centrally located vertical crack is brought. On the horizontal sides of the rectangular and on the crack faces the stresses are given. On the vertical sides of the rectangular three types of boundary conditions are given.

Приводится решение задачи теории упругости для прямоугольника, ослабленного центрально расположенной вертикальной трещиной. На горизонтальных сторонах прямоугольника и на берегах трещины задаются напряжения. На боковых сторонах прямоугольника задаются три типа граничных условий.

1) Боковые стороны жестко защемлены.
2) На боковых сторонах заданы внешние нагрузки.
3) На боковых сторонах заданы неоднородные условия типа симметрии.

Все задачи решаются методом Фурье и, в конечном итоге, сведены к решению вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольника с размерами $2l \times h$, ослабленного вертикальной наружной трещиной. На горизонтальных сторонах прямоугольника и на берегах трещины заданы внешние усилия. На боковых сторонах задаются три типа граничных условий, как упомянуто в аннотации. Внешние усилия расположены симметрично относительно оси *oy*, поэтому задачи решаются только для половины основной области, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$u(0,y)=0, \quad \tau_{xy}(0,y)=0, \quad (c \le y \le h) \tag{1}$$

Граничные условия на горизонтальных сторонах прямоугольника и на берегах трещины имеют вид:

$$\begin{gathered}\sigma_y(x,l)=f_1(x), \quad \sigma_y(x,h)=f_2(x), \\ \tau_{xy}(x,0)=\tau_{xy}(x,h)=0, \quad \sigma_x(0,y)=\tau_{xy}(0,y)=0, \quad (0 \le y \le c).\end{gathered} \tag{2}$$

На боковых сторонах прямоугольника задаются следующие граничные условия:

задача 1 – $$u(l,y)=\chi(0.5h-y), \quad v(l,y)=0, \quad (0 \le y \le h) \tag{3}$$

задача 2 – $$\sigma_x(0,y)=f_0(y), \quad \tau_{xy}(l,y)=g(y) \tag{4}$$

задача 3 – $$\tau_{xy}(l,y)=g(y), \quad Eu(l,y)=u_0+\chi y \tag{5}$$

где χ – угол поворота боковой стороны, c – высота трещины.

Задачи решаются при помощи бигармонической функции Эйри. При этом имеем [1, 2].

$$\sigma_x(x,y)=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2},\sigma_y(x,y)=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2},\tau_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x\partial y},$$

$$Eu(x,y)=\int\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2}dx-\nu\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+c_1y+a_1,\quad \Delta\Delta\Phi(x,y)=0,$$

$$Ev(x,y)=\int\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}dx-\nu\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}-c_1x+b_1. \tag{6}$$

Для правой части области бигармоническую функцию ищем в виде:

$$\Phi\left(x,y\right)=a_0x^2+b_0y^2+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(y)\cos(\alpha_kx)+\frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\psi_p(x)\cos(\beta_py),$$

$$\varphi_k(y)=A1_k\operatorname{sh}(\alpha_ky)+B1_k\operatorname{ch}(\alpha_ky)+\alpha_ky[C1_k\operatorname{ch}(\alpha_ky)+D1_k\operatorname{sh}(\alpha_ky)], \tag{7}$$

$$\psi_p(x)=A2_p\operatorname{sh}(\beta_px)+B2_p\operatorname{ch}(\beta_px)+\beta_px[C2_p\operatorname{ch}(\beta_px)+D2_p\operatorname{sh}(\beta_px)].$$

Постоянные α_k и β_p выбираем следующим образом: для задачи 1 $\alpha_k=\pi(2k-l)/(2l),\beta_p=p\pi/h$, для задач 2 и 3 $\alpha_k=k\pi/l,\beta_p=p\pi/h$.

1^0. *<u>Задача 1.</u>* Удовлетворяя нескольким граничным условиям, получим

$$A2_p+C2_p=0,\quad A1_k+C1_k=0,$$

$$\begin{gathered}(B1_k+D1_k+hC1_k\alpha_k)\operatorname{sh}(\alpha_kh)+(A1_k+C1_k+hD1_k\alpha_k)\operatorname{ch}(\alpha_kh)=0,\\ [(1+\nu)B2_p+2D2_p+l(1+\nu)C2_p\beta_p]\operatorname{ch}(\beta_pl)+\\ +[(1+\nu)A2_p+2C2_p+l(1+\nu)D2_p\beta_p]\operatorname{sh}(\beta_pl)=0.\end{gathered} \tag{1.1}$$

Теперь введем новые неизвестные по формулам

$$\begin{gathered}X2_p=\beta_p{}^2[C2_p\operatorname{sh}(\beta_pl)+D2_p\operatorname{ch}(\beta_pl)],\quad Y2_p=\beta_p{}^2C2_p,\\ X1_k=\alpha_k{}^2\left(C1_k[1+\operatorname{ch}(\alpha_kh)]+D1_k\operatorname{sh}(\alpha_kh)\right),\\ Y1_k=\alpha_k{}^2\left(C1_k[\operatorname{ch}(\alpha_kh)-1]+D1_k\operatorname{sh}(\alpha_kh)\right).\end{gathered} \tag{1.2}$$

Решая восемь уравнений (1.1) и (1.2), старые неизвестные выразим новыми, при этом, для функций $\varphi_k(y)$ и $\psi_p(x)$ получим

$$\varphi_k(y)=-\frac{Y1_k\left(\operatorname{sh}[\alpha_k(h-y)]+\operatorname{sh}(\alpha_ky)\right)}{2\alpha_k{}^2[\operatorname{ch}(\alpha_kh)-1]}-$$

$$-\frac{Y1_k\alpha_k\left(y\operatorname{ch}[\alpha_k(h-y)]+(h-y)\operatorname{ch}(\alpha_ky)\right)}{2\alpha_k{}^2[\operatorname{ch}(\alpha_kh)-1]}+$$

$$+\frac{X1_k\left[\operatorname{sh}[\alpha_k(h-y)]-\operatorname{sh}(\alpha_ky)+\alpha_k\left(y\operatorname{ch}[\alpha_k(h-y)]+(y-h)\operatorname{ch}(\alpha_ky)\right)\right]}{2\alpha_k{}^2[\operatorname{ch}(\alpha_kh)+1]},$$

$$\psi_p(x)=\frac{Y2_p\left(\operatorname{sh}[\beta_p(2l-x)]-\operatorname{sh}(\beta_px)\right)}{2\beta_p{}^2\operatorname{ch}^2(\beta_pl)}+$$

$$+\frac{Y2_p\left(x\beta_p \operatorname{ch}[\beta_p(2l-x)]-(2l-x)\beta_p \operatorname{ch}(\beta_p x)\right)}{2\beta_p{}^2 \operatorname{ch}^2(\beta_p l)}+$$
$$+\frac{X2_p\left(-2\operatorname{ch}(\beta_p x)+(1+\nu)\beta_p[x\operatorname{sh}(\beta_p x)-l\operatorname{ch}(\beta_p x)\operatorname{th}(\beta_p l)]\right)}{(1+\nu)\beta_p{}^2 \operatorname{ch}(\beta_p l)}. \tag{1.3}$$

Удовлетворяя остальным несмешанным граничным условиям, для определения новых неизвестных получим три бесконечные системы:

$$\frac{X1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h)-\alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h)+1}+\frac{8}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\left[\frac{Y2_p\alpha_k{}^2\beta_p}{(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2}+\frac{(-1)^k X2_p\alpha_k(\alpha_k{}^2\nu-\beta_p{}^2)}{(1+\nu)(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2}\right]=$$
$$=f2_k-f1_k,$$
$$\frac{Y1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h)+\alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h)-1}-\frac{8}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\left[\frac{Y2_p\alpha_k{}^2\beta_p}{(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2}+\frac{(-1)^k X2_p\alpha_k(\alpha_k{}^2\nu-\beta_p{}^2)}{(1+\nu)(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2}\right]=$$
$$=f1_k+f2_k-\frac{4a_0(-1)^{-1+k}}{\alpha_k},$$
$$\frac{2[-1+(-1)^p](\chi+c_1)}{\beta_p}+\frac{X2_p[(3-\nu)\operatorname{sh}(2\beta_p l)-2l(1+\nu)\beta_p]}{\operatorname{ch}^2(\beta_p l)}+$$
$$+\frac{4\beta_p}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(X1_k[-1+(-1)^p]+Y1_k[1+(-1)^p]\right)(-\nu\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)}{(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2}+ \tag{1.4}$$
$$+\frac{Y2_p[4\operatorname{ch}(\beta_p l)+2l(1+\nu)\operatorname{sh}(\beta_p l)\beta_p]}{\operatorname{ch}^2(\beta_p l)}=0.$$

Удовлетворяя смешанным граничным условиям на линии $x=0$, для $Y2_p$ получим парные уравнения по тригонометрическим функциям

$$a_1+yc_1+\frac{4}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y2_p\cos(\beta_p y)}{\beta_p}=0,\quad (0\le y\le c),$$
$$2b_0+\frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\Big[\left(-(1-N_p)Y2_p+M_pX2_p+W_p\right)\cos(\beta_p y)\Big]=0,\quad (c\le y\le h), \tag{1.5}$$

где

$$M_p=\frac{2+(1+\nu)\beta_p l\operatorname{th}(\beta_p l)}{(1+\nu)\operatorname{ch}(\beta_p l)},\quad N_p=1-\frac{\operatorname{sh}(\beta_p l)-\beta_p l\operatorname{sech}(\beta_p l)}{\operatorname{ch}(\beta_p l)},$$
$$W_p=\frac{2\beta_p{}^2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(X1_k[-1+(-1)^p]+Y1_k[1+(-1)^p]\right)\alpha_k}{(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2}. \tag{1.6}$$

Решение парных уравнений приведено в параграфе 4.

2^0. *<u>Задача 2.</u>* Из части граничных условий имеем:

$$A2_p+C2_p=0,\quad A1_k+C1_k=0,$$
$$(B1_k+D1_k+hC1_k\alpha_k)\operatorname{sh}(\alpha_k h)+(A1_k+C1_k+hD1_k\alpha_k)\operatorname{ch}(\alpha_k h)=0,$$

$$\beta_p{}^2[\mathrm{sh}(\beta_p l)(B2_p + D2_p + lC2_p\beta_p) + \mathrm{ch}(\beta_p l)(A2_p + C2_p + lD2_p\beta_p)] = g_p. \quad (2.1)$$

Введем новые неизвестные

$$\begin{aligned}
&X2_p = \beta_p{}^2\left(C2_p[-1+\mathrm{ch}(\beta_p l)] + D2_p\,\mathrm{sh}(\beta_p l)\right),\\
&Y2_p = \beta_p{}^2\left(C2_p[-1-\mathrm{ch}(\beta_p l)] - D2_p\,\mathrm{sh}(\beta_p l)\right),\\
&X1_k = \alpha_k{}^2\left(C1_k[-1+\mathrm{ch}(\alpha_k h)] + D1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_k h)\right),\\
&Y1_k = \alpha_k{}^2\left(C1_k[-1-\mathrm{ch}(\alpha_k h)] - D1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_k h)\right), \qquad (2.2)\\
&X2_p = (Z2_p + T2_p)/2, \quad Y2_p = (Z2_p - T2_p)/2.
\end{aligned}$$

Решая восемь уравнений (2.1) и (2.2) и подставляя в (7), для функций $\varphi_k(y)$ и $\psi_p(x)$ получаем

$$\varphi_k(y) = -\frac{Y1_k\left(\mathrm{sh}[\alpha_k(h-y)] - \mathrm{sh}(\alpha_k y)\right)}{2\alpha_k{}^2[\mathrm{ch}(\alpha_k h)+1]} -$$

$$-\frac{Y1_k\alpha_k\left(y\,\mathrm{ch}[\alpha_k(h-y)] - (h-y)\,\mathrm{ch}(\alpha_k y)\right)}{2\alpha_k{}^2[\mathrm{ch}(\alpha_k h)+1]} -$$

$$-\frac{X1_k\left[\mathrm{sh}[\alpha_k(h-y)] + \mathrm{sh}(\alpha_k y) + \alpha_k\left(y\,\mathrm{ch}[\alpha_k(h-y)] + (h-y)\,\mathrm{ch}(\alpha_k y)\right)\right]}{2\alpha_k{}^2[\mathrm{ch}(\alpha_k h)-1]},$$

$$\psi_p(x) = \frac{\mathrm{ch}(\beta_p x)g_p}{\beta_p{}^2\,\mathrm{sh}(\beta_p l)} + \frac{T2_p\left(\beta_p x\,\mathrm{sh}(\beta_p x) - \mathrm{ch}(\beta_p x)[1+\beta_p l\,\mathrm{cth}(\beta_p l)]\right)}{2\beta_p{}^2\,\mathrm{sh}(\beta_p l)} -$$

$$-\frac{Z2_p\left(\mathrm{ch}[\beta_p(l-x)] + \beta_p l\,\mathrm{ch}(\beta_p x)\,\mathrm{csch}(\beta_p l) + \beta_p x\,\mathrm{sh}[\beta_p(l-x)]\right)}{2\beta_p{}^2\,\mathrm{sh}(\beta_p l)}. \qquad (2.3)$$

Удовлетворяя остальным несмешанным граничным условиям, для новых неизвестных получаются три бесконечные системы.

$$\frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\left(\frac{[(-1)^k T2_p + Z2_p]\alpha_k{}^2}{(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2} + \frac{(-1)^k g_p}{\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2}\right) + \frac{X1_k[\mathrm{sh}(\alpha_k h)+\alpha_k h]}{\mathrm{ch}(\alpha_k h)-1} =$$

$$= f1_k + f2_k, \quad \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{[(-1)^k T2_p + Z2_p]\alpha_k{}^2}{(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2} + \frac{(-1)^k g_p}{\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2}\right) +$$

$$+\frac{Y1_k[\mathrm{sh}(\alpha_k h)-\alpha_k h]}{\mathrm{ch}(\alpha_k h)+1} = f1_k - f2_k, \quad 4a_0 l + \frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 + f2_0,$$

$$\frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{[X1_k + (-1)^p(X1_k - Y1_k) + Y1_k]\alpha_k\beta_p{}^2}{(\alpha_k{}^2+\beta_p{}^2)^2} + T2_p\frac{\mathrm{sh}(2\beta_p l) + 2\beta_p l}{2\,\mathrm{sh}(\beta_p l)^2} +$$

$$+Z2_p\frac{\mathrm{sh}(\beta_p l) + \beta_p l\,\mathrm{ch}(\beta_p l)}{\mathrm{sh}(\beta_p l)^2} = 2f0_p + 2g_p\,\mathrm{cth}(\beta_p l),$$

$$2b_0 h = f0_0, \quad \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 - f2_0. \tag{2.4}$$

Последнее соотношение является условием равновесия статики для внешних сил $\sum Y = 0$.

Из смешанных граничных условий получаем парные уравнения

$$\begin{aligned} &a_1 + yc_1 - \frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z2_p\cos(\beta_p y)}{\beta_p} = 0, \quad (c \le y \le h) \\ &2b_0 + \frac{1}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\Big[\big((1+N_p)Z2_p + M_p T2_p + W_p\big)\cos(\beta_p y)\Big] = 0, \quad (0 \le y \le c) \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} &M_p = \frac{\operatorname{sh}(\beta_p l) + \beta_p l\operatorname{ch}(\beta_p l)}{\operatorname{sh}^2(\beta_p l)}, \quad N_p = \frac{\operatorname{sh}(2\beta_p l) + 2\beta_p l}{2\operatorname{sh}^2(\beta_p l)} - 1 \\ &W_p = \frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big(X1_k + (-1)^p(X1_k - Y1_k) + Y1_k\big)\alpha_k\beta_p^{\,2}}{(\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2})^2} - 2g_p\operatorname{csch}(\beta_p l) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение парных уравнений приведено в параграфе 4.

3⁰. ***<u>Задача 3.</u>*** В этой задаче из некоторых граничных условий получаем соотношения (2.1). Введем еще новые неизвестные (2.2).

Здесь функция $\varphi_k(y)$ выражается первой формулой (2.3), а $\psi_p(x)$ примет вид:

$$\begin{aligned} \psi_p(x) = {} & \frac{Z2_p\big(\operatorname{ch}[\beta_p(l-x)] + l\beta_p\operatorname{ch}(\beta_p x)\operatorname{csch}(\beta_p l) + x\beta_p\operatorname{sh}[\beta_p(l-x)]\big)}{2\beta_p^{\,2}\operatorname{sh}(\beta_p l)} - \\ & - \frac{g_p\big((\nu-1)\operatorname{ch}(\beta_p x) + (1+\nu)[l\beta_p\operatorname{ch}(\beta_p x)\operatorname{cth}(\beta_p l) - x\beta_p\operatorname{sh}(\beta_p x)]\big)}{2\beta_p^{\,2}\operatorname{sh}(\beta_p l)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Удовлетворяя граничным условиям для нормальных напряжений $\sigma_y(x,y)$ и нормальных перемещений $u(l,y)$, получаются две бесконечные системы:

$$\begin{aligned} &\frac{X1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h) + \alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h) - 1} + \frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{\beta_p\big(-Z_p\alpha_k^{\,2} + (-1)^k g_p[(2+\nu)\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2}]\big)}{(\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2})^2} = \\ &= f1_k + f2_k, \\ &\frac{Y1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h) - \alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h) + 1} + \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{\beta_p\big(-Z_p\alpha_k^{\,2} + (-1)^k g_p[(2+\nu)\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2}]\big)}{(\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2})^2} = f1_k - f2_k, \\ &4a_0 l + \frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 + f2_0, \quad \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 - f2_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Последнее уравнение является условием статики $\sum Y = 0$. Из смешанных граничных условий получаются парные уравнения по косинусам

$$2b_0+\frac{1}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\Big[\Big(W_p-N_pZ_p\Big)\cos(\beta_p y)\Big]=0,\quad (0\le y\le c),$$

$$a_1+yc_1+\frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z_p\cos(\beta_p y)}{\beta_p}=0,\quad (0\le y\le c).\tag{3.3}$$

где

$$N_p=\frac{\operatorname{sh}(2\beta_p l)+2\beta_p l}{2\operatorname{sh}^2(\beta_p l)}-1,\quad W_p=g_p\frac{(\nu-1)\operatorname{sh}(\beta_p l)+\beta_p l(1+\nu)\operatorname{ch}(\beta_p l)}{\operatorname{sh}^2(\beta_p l)}+$$

$$+\frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Big(X1_k+(-1)^p(X1_k-Y1_k)+Y1_k\Big)\alpha_k\beta_p^{\,2}}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2}.\tag{3.4}$$

4^0. Здесь рассматриваются парные уравнения (1.5), (2.5) и (3.3). Такие парные уравнения рассматривались многими авторами [3,4]. Здесь будем пользоваться результатами работ [5,6].

Парные уравнения (1.5) сведены к решению бесконечной системы

$$2p^{-1}Y2_p=\sum_{k=1}^{\infty}Q_kI(k,p,\gamma)+2b_0hp^{-1}z_p(\cos\gamma)-$$

$$-\frac{c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right)y_p(\cos\gamma)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\quad(p=1,2,3,...),\tag{4.1}$$

$$\frac{\pi}{2}(a_1+c_1h)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_kz_k(\cos\gamma)}{k}-$$

$$-\frac{c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta-4b_0h\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\quad\left(z=\frac{\pi y}{h},\gamma=\frac{\pi c}{h}\right),\tag{4.2}$$

где $P_k(x)$ – полином Лежандра

$$y_k(x)=P_{k-1}(x)+P_k(x),\quad y_k(x)=P_{k-1}(x)-P_k(x),$$

$$Q_k=N_kY2_k+M_kX2_k+W_k,\quad I(k,p,\gamma)=\int_{\gamma}^{\pi}y_k(\cos\theta)y_p(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta.\tag{4.3}$$

Перемещения точек берегов трещины определяются формулой

$$\frac{\pi}{4}(a_1+c_1h)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y2_p}{p}\cos px=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z}{2}\left[2b_0h\int_{z}^{\gamma}\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\int_{z}^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}-\frac{c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right)\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}\mathrm{d}\theta\right],\tag{4.4}$$

где $(0\le z\le\gamma)$, $z=\pi y/h$, $\gamma=\pi c/h$.

Контактные напряжения на отрезке $(x=0,c<y<h)$ выражаются формулой

$$\sum_{p=1}^{\infty}[(1-N_P)Y2_P-M_PX2_P-W_p]\cos pz=b_0h-$$

$$-\frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}}\frac{K_1}{\sqrt{\cos\theta-\cos z}}-\frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}}\left(-\sum_{k=1}^{\infty}kQ_k\int_{\gamma}^{z}\frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos z}}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_1h}{2\pi}\int_{\gamma}^{z}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\sin(\theta/2)\sqrt{\cos\theta-\cos z}}\right), \tag{4.5}$$

где K_1 – коэффициент интенсивности контактных напряжений

$$K_1=2b_0h+\sum_{k=1}^{\infty}Q_ky_k(\cos\gamma)+\frac{c_1h}{\pi}\ln\mathrm{tg}(\gamma/4) \tag{4.6}$$

Парные уравнения (2.5) сведены к бесконечной системе

$$2p^{-1}Z2_p=\sum_{k=1}^{\infty}Q_kI(k,p,\gamma)+4b_0hp^{-1}z_p(\cos\gamma)+$$

$$+\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{ctg}\frac{\theta}{4}\right)y_p(\cos\gamma)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\,\theta,\quad Q_k=N_kZ2_p+M_kT2_k+W_k \tag{4.7}$$

$$\pi(a_1+c_1h)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_kz_k(\cos\gamma)}{k}-\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}\right)\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\,\theta-8b_0h\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right). \tag{4.8}$$

Формула перемещения точек берегов трещины получается следующей:

$$\frac{\pi}{2}(a_1+c_1h)-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z2_p}{p}\cos px=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z}{2}\left[4b_0h\int_{z}^{\gamma}\frac{\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\int_{z}^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}-\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}\right)\frac{\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}\mathrm{d}\,\theta\right]. \tag{4.9}$$

Контактные напряжения будут выражаться формулой

$$b_0h+\sum_{p=1}^{\infty}[(1+N_P)Z2_P+M_PT2_P+W_p]\cos pz=$$

$$=\frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}}\left(\frac{K_1}{\sqrt{\cos\gamma-\cos z}}-\sum_{k=1}^{\infty}kQ_k\int_{\gamma}^{z}\frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\,\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos z}}+\right. \tag{4.10}$$

$$\left.+\frac{c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{z}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\sin(\theta/2)\sqrt{\cos\theta-\cos z}}\right),\quad(\gamma\le z\le\pi),$$

где

$$K_1=2b_0h+\sum_{k=1}^{\infty}Q_ky_k(\cos\gamma)+\ln\mathrm{tg}(\gamma/4)\,. \tag{4.11}$$

Бесконечные системы, связанные с парными уравнениями (3.3), будут

$$2p^{-1}Z2_p=\sum_{k=1}^{\infty}(W_k-N_kZ2_p)I(k,p,\gamma)+4b_0hp^{-1}z_p(\cos\gamma)+$$

$$+\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{ctg}\frac{\theta}{4}\right)y_p(\cos\gamma)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\,\theta, \tag{4.12}$$

$$\pi(a_1+c_1h)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(W_k-N_kZ2_p)z_k(\cos\gamma)}{k}-$$
$$-\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta-8b_0h\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right). \tag{4.13}$$

Формула перемещений точек берегов трещины будет следующей:

$$\frac{\pi}{2}(a_1+c_1h)+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z2_p}{p}\cos px=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z}{2}\left[4b_0h\int_{z}^{\gamma}\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}+\right. \tag{4.14}$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}(W_k-N_kZ2_p)\int_{z}^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}-\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right)\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}\,\mathrm{d}\theta\right].$$

Контактные напряжения будут выражаться формулой

$$b_0h+\sum_{p=1}^{\infty}[W_p-(1+N_P)Z2_P]\cos pz=$$
$$=\frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}}\left(\frac{K_1}{\sqrt{\cos\gamma-\cos z}}+\frac{c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{z}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta/2)\sqrt{\cos\theta-\cos z}}-\right. \tag{4.15}$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}k(W_k-N_kZ2_p)\int_{\gamma}^{z}\frac{z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos z}}\right),\quad(\gamma\le z\le\pi),$$

$$K_1=4b_0h+\frac{c_1h}{\pi}\ln(\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2})+\sum_{k=1}^{\infty}(W_k-N_kZ_k)y_k(\cos\gamma). \tag{`4.16}$$

Доказательства регулярности аналогичных бесконечных систем приводятся в работах [5,6].

Полученные результаты могут быть полезны при расчете строительных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.–Л.: ОТИЗ, 1947. 464с.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
3. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. М.: Наука, 1977. 250 с.
4. Sneddon I.N. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam: North-Holl. Publ. Com. 1966. 283 c.
5. Баблоян А.А. Контактные и смешанные задачи для однородных и составных тел. // Докторская диссертация. Л.: 1979. 346 с.
6. Мхитарян С.М., Александров В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию 12.09.2007