

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА
КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА КРИТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ И
КРИТИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ ФЛАТТЕРА

Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А.

Ключевые слова: вязкоупругость, флаттер, интегро-дифференциальные уравнения, критическая скорость, критическое время.

Keywords: viscous-elastic, flutter, integro-differential equations, critical speed, critical time.

Ֆ.Բ. Բադալով, Բ.Ա. Խուդայարով

Ֆլատերի կրիտիկական ժամանակի և կրիտիկական արագության վրա թռչող սարքի կոմպոզիցիոն առաձգամածուցիկ հատկությունների ազդեցության ուսումնասիրությունը

Դիտարկված է գազով շրջահոսվող առաձգամածուցիկ սալի ոչ գծային ֆլատերի խնդիրը: Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով խնդիրը բերված է սովորական ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ուսումնասիրությանը, որը լուծված է թույլ եզակիությունների արտաքսման թվային եղանակով: Բերված են ֆլատերի կրիտիկական ժամանակի և կրիտիկական արագության հաշվարկի արդյունքներ:

F.B. Badalov, B.A. Khudayarov

Research Influence Viscoelastic of Property Material of Designs of the Flying
Device on Critical Time and Critical Speeds of the Flutter

The flutter of viscoelastic plates streamlined by a gas current are investigated. The basic direction of the present work consists in taking into account of viscoelastic material properties at supersonic speeds. An algorithm of the numerical solution for the problem has been worked out on the basic of the method. The results of the flutter critical speed calculations have been given.

Исследуется нелинейный флаттер вязкоупругой пластины, обтекаемой потоком газа. Цель настоящей работы определить критическое время и скорости флаттера с учетом вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. При помощи метода Бубнова–Галеркина задача сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Решение ИДУ находится численным методом исключения слабо сингулярных особенностей в интегральных и ИДУ. На основе этого метода разработан алгоритм численного решения задачи. Приведены результаты расчетов критического времени и критической скорости флаттера пластины.

Введение

Широкое применение композиционных материалов в аэрокосмической технике привело к необходимости изучения задач тонкостенных конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. В соответствии с этим представляет значительный интерес анализ особенностей по отношению к аналогичным задачам для упругих тонкостенных конструкций.

Влияние вязкоупругих свойств материала конструкций и некоторые результаты численного решения нелинейных задач обсуждаются ниже. Используется квадратичный вариант нелинейных уравнений теории тонких пологих оболочек [1,2]. В современной литературе эти уравнения обычно называют уравнениями Маргерра [3], который предложил эту систему уравнений для исследования проблем прочности, жесткости и устойчивости тонкостенных конструкций типа авиационных крыльев. Из нее в частном случае можно получить уравнения Кармана [4-6].

1. Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим нелинейную задачу о флаттере вязкоупругой пластины. Пусть пластина со сторонами a и b и толщиной h шарнирно оперта по всему контуру, обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории [7].

Уравнения Кармана в декартовой системе координат относительно перемещений u , v и w с учетом вязкоупругих свойств материала конструкций, можно записать в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned} (1-R^*) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + L_1(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ (1-R^*) \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + L_2(w) \right\} - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \quad (1) \\ D(1-R^*) \nabla^4 w + L_3^*(u, v, w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= q. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } L_1(w) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$L_2(w) = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\begin{aligned} L_3^*(u, v, w) = & -\frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \right. \\ & + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left. \right\} - \frac{Eh}{1-\mu^2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} (1-R^*) \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} (1-R^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где D – цилиндрическая жесткость; μ , E , ρ – коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность материала; h – толщина пластинки; R^* – интегральный оператор вида: $R^* \varphi(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации;

$$q = -B \frac{\partial W}{\partial t} - BV \frac{\partial W}{\partial x} - B_1 V^2 \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 - \dots - \text{аэродинамическое давление,}$$

определяемое по теории А.А.Ильюшина [7].

При изгибе в срединной поверхности возникают нормальные и касательные усилия:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} (1-R^*) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \quad (x \Leftrightarrow y), \quad N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} (1-R^*) \varepsilon_{xy},$$

где ε_x , ε_y , ε_{xy} – компоненты конечной деформации, определяемые формулами [6]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Моменты M_x , M_y и M_{xy} определяются через функцию прогиба w :

$$M_x = -D(1-R^*)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad M_y = -D(1-R^*)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = D(1-\mu)(1-R^*)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Будем искать приближенное решение системы (1) в виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b},$$

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$
(2)

Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова–Галёркина, получим систему ИДУ. Введя в ИДУ следующие безразмерные величины $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{u}{h}$, $\frac{v}{h}$, $\frac{w}{h}$, $\frac{V_\infty t}{a}$ и сохраняя при этом прежние обозначения, запишем:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{1k \ln m} \ddot{u}_{nm} - \Omega(1-R^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(A_{1k \ln m} u_{nm} + \frac{1+\mu}{2} B_{1k \ln m} v_{nm} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{1k \ln mir} w_{nm} w_{ir} \right\} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{2k \ln m} \ddot{v}_{nm} - \Omega(1-R^*) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(\frac{1+\mu}{2} A_{2k \ln m} u_{nm} + B_{2k \ln m} v_{nm} \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{2k \ln mir} w_{nm} w_{ir} \right\} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} \left(\ddot{w}_{nm} + M_\lambda \dot{w}_{nm} \right) + (1-R^*) \Omega \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{3k \ln m} w_{nm} - \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{nm} \times$$

$$\times (1-R^*) \left\{ A_{4k \ln mir} u_{ir} + B_{4k \ln mir} v_{ir} \right\} \Omega +$$

$$+ \chi M_p \left(\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \gamma_{k \ln m} w_{nm} + \frac{\chi+1}{4} M^{*2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{kenmir} w_{nm} w_{ir} \right) = 0, \quad (3)$$

где

$$N_{1k \ln m}, A_{1k \ln m}, B_{1k \ln m}, D_{1k \ln m}, N_{2k \ln m}, A_{2k \ln m}, B_{2k \ln m}, D_{2k \ln m},$$

$$N_{3k \ln m}, C_{3k \ln m}, A_{4k \ln m}, B_{4k \ln m}, \gamma_{k \ln m}, \Gamma_{k \ln mir}, M^*, M_p, \Omega$$

– безразмерные параметры.

2. Численные результаты

Интегрируем систему (3) два раза по t , запишем ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим слабо-сингулярные особенности интегрального оператора R^* [8]. Полагая затем $t = t_i$, $t_i = i\Delta t$, $i = 1, 2, \dots$ ($\Delta h = \text{const}$) и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $u_{ikl} = u_{kl}(t_i)$, $v_{ikl} = v_{kl}(t_i)$ и $w_{ikl} = w_{kl}(t_i)$, получим следующие рекуррентные формулы при ядре Колтунова–Ржаницына

$$\left(R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \right):$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{1k \ln m} u_{pnm} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{1k \ln m} (u_{0nm} + \dot{u}_{onm} t_p) - \\ & - \Omega \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(A_{1k \ln m} \left[u_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-snm} \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1+\mu}{2} B_{1k \ln m} \left[v_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right] \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{1k \ln mir} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \right\}, \\ & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{2k \ln m} v_{pnm} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{2k \ln m} (v_{0nm} + \dot{v}_{onm} t_p) - \\ & - \Omega \sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j) \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left(\frac{1+\mu}{2} A_{2k \ln m} \left[u_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-snm} \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + B_{2k \ln m} \left[v_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl} \right] \right) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M D_{2k \ln mir} \left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir} \right) \right\}, \\ & \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} w_{pnm} = \frac{1}{1 + A_p M_\lambda} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} \left\langle w_{0nm} + \left(\dot{w}_{onm} + M_\lambda w_{onm} \right) t_p \right\rangle - \right. \\ & \quad - \sum_{j=0}^{p-1} A_j \left(M_\lambda \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M N_{3k \ln m} w_{jnm} - (t_p - t_j) \left[\chi M_p \left(\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \gamma_{k \ln m} w_{jnm} + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\chi+1}{4} M^{\ast 2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M \Gamma_{k \ln mir} w_{jnm} w_{jir} \right) + \Omega \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M C_{3k \ln m} \left(w_{jnm} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \Omega \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M w_{jnm} \left\langle A_{4k \ln mir} \left(u_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-sir} \right) + B_{4k \ln mir} \times \right. \right. \end{aligned}$$

$$\times \left(v_{jir} - \frac{A}{\alpha} \sum_{s=0}^j B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-sir} \right) \Bigg] \Bigg] \Bigg] \Bigg\}, \quad (4)$$

$$p = 1, 2, \dots; \quad k = \overline{1, N}; \quad l = \overline{1, M},$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Delta t}{2}; \quad A_j = \Delta t, \quad j = \overline{1, i-1}; \quad A_i = \frac{\Delta t}{2}, \\ B_0 &= \frac{\Delta t^\alpha}{2}; \quad B_j = \frac{\Delta t^\alpha (j^\alpha - (j-1)^\alpha)}{2}, \quad s = j, \\ B_s &= \frac{\Delta t^\alpha ((s+1)^\alpha - (s-1)^\alpha)}{2}. \end{aligned}$$

На основе разработанного алгоритма создан пакет прикладных программ на языке «Delphi».

Результаты вычислений представлены в таблице и отражаются графиками, приведенными на фиг. 1,2.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость флаттера $V_{кр}$, принимаем условие, что при этой скорости происходит незатухающее колебательное движение с быстро возрастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению (фиг. 1,2) [9, 10].

Для определения $V = V_{кр}$ рассматриваются числа V_1 и V_2 , расположенные на интервале (A, B) таким образом, что $A < V_1 < V_2 < B$ при $t_1 < t < t_2$. Сравнивая закон изменения w при $V = V_1$ и $V = V_2$, можно сделать следующие выводы:

а) если при $V < V_1$ закон изменения функции w близок к гармоническому, то $V_{кр}$ не может быть на интервале (A, V_1) , т.е. $V_{кр}$ лежит на интервале (V_1, B) , $t_{кр}$ лежит в интервале $(t_1 < t_{кр} < \infty)$;

в) если при $V < V_1$ наблюдается быстрый рост функции w во времени, то $V_{кр}$ лежит в интервале (A, V_1) .

Процессы а) и в), т.е. процесс исключения интервалов повторяется для (A, V_1) или (V_1, B) и т.д. Поиск завершается тогда, когда оставшийся подынтервал уменьшается до достаточно малых размеров.

Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала пластинки на критические значения времени и скорости флаттера. Результаты вычислений, представленные в таблице, показывают, что решения упругих ($A = 0$) и вязкоупругих ($A > 0$) задач существенно различаются между собой. Например, при увеличении параметра A от нуля до значения 0.1 критическое время увеличивается на 90%, а критическая скорость флаттера уменьшается на 44.7%.

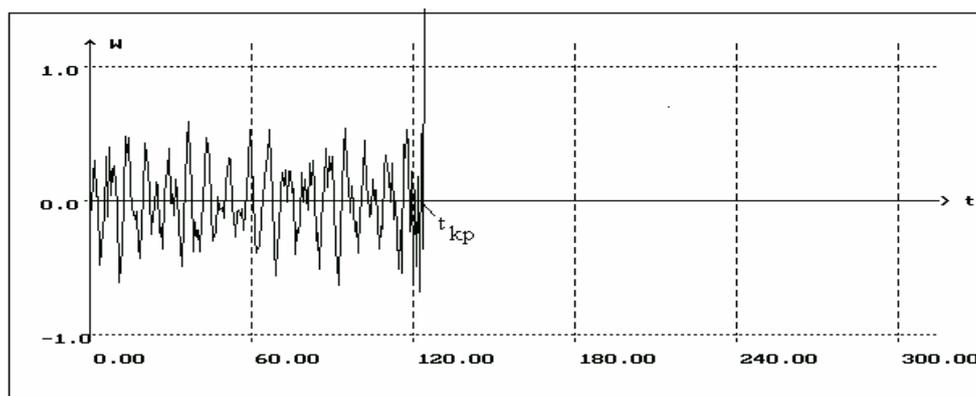
Далее исследовано влияние параметра сингулярности α на критическое время и скорость флаттера. С увеличением α эта скорость возрастает, а время

уменьшается. Например, разница между значениями критического времени при $\alpha=0.2$ и $\alpha=0.8$ составляет 77,7%.

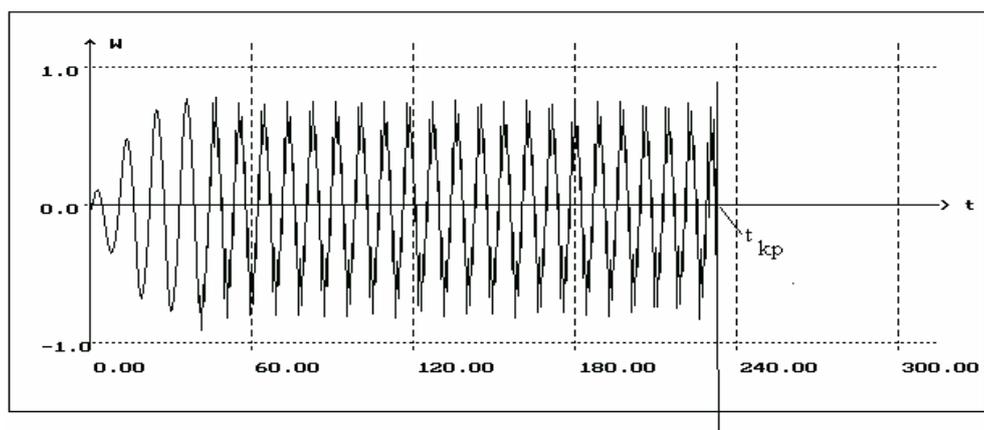
Из приведенной выше таблицы видно, что влияние параметра затухания β ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра вязкости A и сингулярности α незначительно, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы о том, что экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкций.

Таблица. Зависимость критического времени и критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров пластинки

A	α	β	λ_1	λ	$t_{кр}$	$V_{кр}$
0.0 0.1	0.116	0.05	250	2.2	123 232	1016 661.5
0.001	0.2 0.6 0.8	0.05	250	2.2	112.5 90 25	961.5 1014 1096
0.001	0.2	0.1 0.2	250	2.2	122 134	952.5 944.5
0.001	0.2	0.05	300 350 400	2.2	165 110 80	826 651 524
0.001	0.2	0.05	250	1.5 1.9 2.4	53 76 120	819 886 1001



Фиг. 1. Зависимости прогиба идеально-упругой пластины от времени t при $V = V_{кр}$.



Фиг. 2. Зависимости прогиба вязкоупругой пластины от времени t при $V = V_{кр}$

Изучено влияние параметра относительной толщины пластинки λ_1 на критическое время и критическую скорость $V_{кр}$ флаттера. Расчеты были проведены при $\lambda_1=300, 350$ и 400 . Полученные результаты показывают, что с уменьшением толщины пластинки (с ростом параметра λ_1) критическое время и скорость флаттера вязкоупругой пластинки уменьшаются.

Исследовалось влияние параметра удлинения пластинки λ на величину критической скорости и время флаттера. С увеличением λ происходит повышение критического времени скорости флаттера, что объясняется тем, что с ростом λ (при постоянном λ_1) уменьшается размер пластинки перпендикулярно к направлению течения и, следовательно, повышается относительная жесткость системы.

На основании полученных результатов можно заключить, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит не только к уменьшению критической скорости флаттера $V_{кр}$, но и к увеличению критического времени $t_{кр}$, с которого начинается явление флаттера (фиг.1,2). Это принципиально новый механический эффект и может представлять интерес для специалистов в области проектирования подобных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения к технике. М.: Гостехтеориздат, 1949. 784 с.
2. Галимов К.З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях // ПММ. 1951. Т.15. №6. С.723-742.
3. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука. Физматлит, 1997. 272 с.
4. Karman Th. Collected works. V. 1. London: 1956. 530 p.
5. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.
6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. XX. Вып. 6. С.733-755.
8. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
9. Khudayarov V.A. Numerical Analysis of the Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates // INTERNATIONAL J. APPLIED MECHANICS. New York, USA. – 2005. –Vol. 41. – No 5. – P. 538-542.
10. Бадалов Ф.Б., Ганихонов Ш.Ф. Вибрации наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов. Ташкент: 2002, 230 с.

Ташкентский Государственный Авиационный
Институт МВ и ССО РУз

Поступила в редакцию
26.02.2007