ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМ КРЕПЛЕНИЕМ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х.

Ключевые слова: контакт, стрингер, интегральное уравнение, функциональное уравнение, бесконечная система.
Keywords: contact, stringer, integral equation, functional equation, infinite system.

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան
Առաձգական ամրանով կիսահարթության կոնտակտային խնդրի լուծման մասին

Ֆուրյեի ձևափոխության և Վիներ-Հոֆի մեթոդի օգնությամբ, առաձգական վերադիրով ամրանավորված առաձգական կիսահարթության կոնտակտային խնդրի օրինակի վրա, որն ուսումնասիրված է [1]-ում, առաջարկվում է նոր մոտեցում վերջավոր ինտերվալի վրա սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման համար: Այն տրվում է աստիճանային շարքի և խնդրին բնորոշ եզակիությունները բնութագրող առանձին գումարելի գումարի տեսքով: Անհայտ գործակիցների որոշումը բերվում է պարզ, ռեգուլյար գծային անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի անհայտ կոնտակտային լարման ինտենսիվության Ֆուրյեի պատկերի մնացքների նկատմամբ:

K.L.Aghayan, E.Kh.Grigoryan
About Solution of Contact Problem for Semi-Plane with Elastic Stringer

The new approach to the solution of singular integro-differential equation in finite interval is showed at example of contact problem for elastic semi-plane [1] by Fourier transformation and Wiener-Hopf method. The solution is obtained in the form of power series with segregated singularities. The definition of coefficients is reduced to the system of regular infinite system of linear algebraic equations with simple structure in regard to residue of Fourier's transformant of unknown contact strains.

На примере контактной задачи для упругой полуплоскости с упругим креплением, решенной в [1], показан новый подход к решению сингулярного интегрального уравнения на конечном интервале при помощи преобразования Фурье и метода Винера-Хопфа. Решение получено в виде степенного ряда с отдельно выделенными особенностями. Определение коэффициентов разложения сведено к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений простой структуры относительно вычетов трансформанты Фурье неизвестных контактных напряжений.

Исследованию контактного взаимодействия между тонкостенными элементами типа упругих накладок (крепление, стрингер) или включений, различных геометрических форм с более массивными телами посвящены многочисленные работы. Коротко остановимся на работах, которые прямым образом связаны с известной работой Н.Х. Арутюняна [1], где в рамках известной модели Мелана [2] исследуется контактная задача о передаче нагрузки от крепления (накладки) конечной длины и постоянной толщины к упругой полуплоскости.

Первая работа, по-видимому, принадлежит Бенскотеру [3], в которой изучается поле напряжений в бесконечной пластине с упругим креплением конечной длины. Исходное интегро-дифференциальное уравнение здесь решено численно для двух случаев, когда на концах накладки сосредоточенные силы направлены в одну сторону и в противоположные стороны. Буфлер в [4] рассмотрел контактную задачу для полуплоскости (или полной плоскости), когда вдоль конечного отрезка ее свободной поверхности (или, соответственно, внутри плоскости) припаяна упругая накладка постоянного поперечного сечения. При различных видах нагружения и температурного воздействия получено приближенное решение исходного интегро-дифференциального уравнения. В статье В.М. Толкачева [5] ребро конечной длины и постоянного сечения прикреплено по всей длине к бесконечной пластине или к границе полубесконечной пластины. Здесь решение интегро-дифференциального уравнения получено путем обращения сингулярной части, и последующим использованием тригонометрических рядов решение задачи сведено к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В 1968г. Н.Х. Арутюняном [1] вновь была рассмотрена контактная задача для полуплоскости, когда на ее свободной поверхности приклеено крепление (накладка) конечной длины и постоянной толщины. Решение определяющего интегро-дифференциального уравнения, после обращения сингулярного интеграла, построено при помощи степенного ряда. Представляя решение в виде суммы своих четной и нечетной частей, решение задачи сведено к двум регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения степенных рядов. В итоге получено изящное решение поставленной задачи, содержащее в явном виде особенности, характеризующие контактные напряжения около концевых точек накладки. Отметим, что работа [1] послужила своеобразным стимулом для дальнейшего развития этой области контактных и смешанных задач теории упругости, подтверждением чего является большое количество опубликованных работ в этой области.

В последствии, примерно одновременно, были опубликованы исследования [6,7,8], в которых методом ортогональных многочленов Чебышева решения рассмотренных в [1,3] задач сведены к регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений более простой структуры.

В работах [9,10] рассмотрены контактные задачи для двух полубесконечных балок и полубесконечных накладок, находящихся на границе упругой полуплоскости. Решение этих задач методом Винера-Хопфа сведено к решению бесконечных систем линейных уравнений простой структуры относительно вычетов трансформанты Фурье интенсивности неизвестного контактного напряжения и построено решение в виде степенных рядов по этим же коэффициентам–вычетам.

В предлагаемой работе вновь рассматривается задача для полуплоскости с упругой накладкой конечной длины [1]. Здесь, как и в работах [9,10], нам удалось построить решение задачи в виде степенных рядов, содержащих в явном виде особенности, которые характеризуют напряжения в окрестности концов упругой накладки. При этом, ядра полученных бесконечных систем имеют весьма простую структуру.

1. Рассмотрим плоскую контактную задачу о передаче нагрузки от накладки конечной длины к упругой полуплоскости [1]. На конечном отрезке $[-a,a]$ свободной границы упругой полуплоскости приклеена упругая накладка (стрингер) постоянной толщины h, на правом конце которой приложена осевая растягивающая сила P. При известных предположениях относительно накладки [1,2] задача определения неизвестных контактных касательных напряжений, возникающих в зоне контакта, сводится к решению следующего сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши [1]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds=\lambda^{*}\left[P-\int_{x}^{a}\tau(s)ds\right],\quad -a<x<a, \tag{1.1}$$

при условии равновесия накладки:

$$\int_{-a}^{a}\tau(x)dx=P. \tag{1.2}$$

Здесь $\tau(x)$–подлежащее определению контактное напряжение, действующее под накладкой,

$$\lambda^* = E_2 / 2\left(1-\nu_2^2\right)hE_1 \,. \tag{1.3}$$

E_1 – модуль упругости материала накладки, h – ее толщина, E_2 – модуль упругости материала полуплоскости, ν_2 – коэффициент Пуассона.

Для решения сингулярного интегрального уравнения (1.1) функцию $\tau(x)$ представим в виде суммы своих четной и нечетной частей [1]:

$$\begin{gathered}\tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x), \\ \tau_1(-x) = -\tau_1(x), \quad \tau_2(x) = \tau_2(-x),\end{gathered} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и (1.2) и отделяя четные и нечетные части, приходим к следующим сингулярным интегральным уравнениям ($\vartheta(x)$ – функция Хевисайда):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a \left[\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x}\right]\tau_2(s)ds = \lambda^* \int_0^a \vartheta(x-s)\tau_2(s)ds, \quad 0 < x < a, \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a \left[\frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x}\right]\tau_1(s)ds = \lambda^* \left[\frac{P}{2} - \int_0^a \vartheta(s-x)\tau_1(s)ds\right], \tag{1.6}$$

с условием

$$\int_0^a \tau_2(s)ds = P/2 \,. \tag{1.7}$$

Таким образом, задача сводится к решению сингулярных интегральных уравнений (1.5) и (1.6) с условием (1.7).

Для решения полученных интегральных уравнений произведем в (1.5)-(1.7) замену переменных $s = ae^u, x = ae^{\mathrm{v}}$ и рассмотрим их и при $0 < \mathrm{v} < \infty$. В итоге получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{1-e^{\mathrm{v}-u}} - \frac{1}{1+e^{\mathrm{v}-u}}\right]q_2^-(u)du = \\ = \lambda\vartheta(-\mathrm{v})\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{v}-u)q_2^-(u)e^u du + g_2^+(\mathrm{v}) \qquad (-\infty < \mathrm{v} < \infty),\end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{1-e^{\mathrm{v}-u}} + \frac{1}{1+e^{\mathrm{v}-u}}\right]q_1^-(u)du = \\ = \lambda\vartheta(-\mathrm{v})\left[\frac{P}{2a} - \int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(u-\mathrm{v})q_1^-(u)e^u du\right] + g_1^+(\mathrm{v}) \quad (-\infty < \mathrm{v} < \infty),\end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_2^-(u)e^u du = P/2a, \quad \lambda = \lambda^* a \,, \tag{1.10}$$

где

$$\begin{gathered}\tau_j\left(ae^u\right) = q_j(u), \qquad q_j^-(u) = \vartheta(-u)q_j(u), \\ g_j^+(\mathrm{v}) = \vartheta(\mathrm{v})g_j(\mathrm{v}), \quad g_j(\mathrm{v}) = \left[\frac{\mu}{1-\nu}\frac{du_2^{(j)}(x,0)}{dx}\right]\Bigg|_{x=ae^{\mathrm{v}}} \qquad (j=1,2),\end{gathered} \tag{1.11}$$

$u_2(x,0)$ – перемещение граничных точек полуплоскости, а $u_2^{(2)}(x,0)$ и $u_2^{(1)}(x,0)$ – ее четные и нечетные части, соответственно.

Применив теперь к (1.8) и (1.9) комплексное преобразование Фурье, после некоторых выкладок приходим к следующим функционально-разностным уравнениям:

$$\operatorname{th}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\overline{q}_2^-(\alpha)+\lambda\frac{\overline{q}_2^-(\alpha-i)}{\alpha}=\lambda\frac{\overline{q}_2^-(-i)}{\alpha}+i\overline{g}_2^+(\alpha)\quad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0),\tag{1.12}$$

$$\operatorname{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\overline{q}_1^-(\alpha)+\lambda\frac{\overline{q}_1^-(\alpha-i)}{\alpha}=\lambda\frac{P}{2a\cdot\alpha}+i\overline{g}_1^+(\alpha),\tag{1.13}$$

где

$$\overline{q}_j^-(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}q_j^-(\alpha)e^{i\alpha u}du,\qquad \overline{g}_j^+(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}g_j^+(\alpha)e^{i\alpha u}du\qquad (j=1,2)\tag{1.14}$$

$\alpha=\sigma+i\tau$,

$\overline{q}_j^-(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\overline{g}_j^+(\alpha)$ – при $\operatorname{Im}\alpha>-1$, поскольку $q_1^-(u)=O(1)$, $g_j^+(u)=O(e^{-u})$ при $|u|\to\infty$. Кроме того, так как $\tau_j(ax)$ и $g_j(ax)$ имеют порядок $(1-x)^{-1/2}$ при $x\to 1$ [11,1], то

$$\overline{q}_j^-(\alpha)\sim\alpha^{-1/2},\quad \overline{g}_j^+(\alpha)\sim\alpha^{-1/2},\quad (j=1,2)\tag{1.15}$$

при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Заметим еще, что из (1.10) и (1.14) следует

$$\overline{q}_2^-(-i)=P/2a\,.\tag{1.16}$$

2. Решения функционально-разностных уравнений (1.12) и (1.13) построим методом Винера-Хопфа [12]. Для этого исследуем аналитические свойства функций $\overline{q}_j^-(\alpha)$ $(j=1,2)$ в области $\operatorname{Im}\alpha\geq 0$ [9,10].

Сначала рассмотрим уравнение (1.12). Как было отмечено, $\overline{q}_2^-(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\overline{g}_2^+(\alpha)$ – при $\operatorname{Im}\alpha>-1$. Исследуем полюса функции $\overline{q}_2^-(\alpha)$, рассматривая ее аналитическое продолжение в дополнении к области $\operatorname{Im}\alpha<0$. Так как, согласно (1.16), $\overline{q}_2^-(-i)$ конечна, $\overline{g}_2^+(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha>-1$ и $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)=0$ при $\alpha=0$, то из (1.12) следует, что точка $\alpha=0$ может быть простым полюсом для $\overline{q}_2^-(\alpha)$. Следовательно, $\alpha=i$ может быть простым полюсом для $\overline{q}_2^-(\alpha-i)$. Тогда, поскольку $\alpha=i$ является простым полюсом для $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)$, а $\overline{g}_2^+(i)$ конечна, то опять из (1.12) следует, что $\overline{q}_2^-(i)$ конечна. Теперь, поскольку $\overline{q}_2^-(i)$ и $\overline{g}_2^+(2i)$ конечны, а $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)=0$ при $\alpha=2i$, то точка $\alpha=2i$ может быть простым полюсом для $\overline{q}_2^-(\alpha)$. Далее рассмотрим точку $\alpha=3i$. В этой точке $\overline{g}_2^+(3i)$ конечна, $\operatorname{th}(\pi\alpha/2)$ имеет простой полюс, а $\overline{q}_2^-(\alpha-i)$ может иметь простой полюс. Тогда из (1.12) следует, что $\overline{q}_2^-(3i)$ конечна. Продолжая эти рассуждения, нетрудно убедиться, что полюсами функции $\bar{q}_2^-(\alpha)$ могут быть только точки $\alpha = 2ni$ $(n = 0,1,2,...)$ и, притом, простыми.

Перейдем теперь к решению функционального уравнения (1.12). Для этого факторизуем $\mathrm{th}(\pi\alpha/2)$, представив ее в виде:

$$th(\pi\alpha/2) = \bar{K}_2(\alpha) = \bar{K}_2^-(\alpha)\cdot \bar{K}_2^+(\alpha), \tag{2.1}$$

$$\bar{K}_2^-(\alpha) = \frac{\alpha\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)}, \qquad \bar{K}_2^+(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{2.2}$$

$\Gamma(\alpha)$ – известная гамма-функция Эйлера.

Очевидно, что $\bar{K}_2^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha > -1$ и там не имеет нулей, а $\bar{K}_2^-(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha < 0$ и там не имеет нулей. Кроме того, из (2.2) следует, что $\bar{K}_2^+(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\bar{K}_2^-(\alpha) = O(\alpha^{1/2})$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Подставляя (2.1) в (1.12), получим уравнение

$$\bar{K}_2^-(\alpha)\bar{q}_2^-(\alpha) + \frac{\lambda\bar{q}_2^-(\alpha - i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} - \frac{\lambda\bar{q}_2^-(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} = i\,\frac{\bar{g}_2^+(\alpha)}{\bar{K}_2^+(\alpha)}, \quad (-1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0), \tag{2.3}$$

которое, в свою очередь, представим в виде

$$\begin{aligned}\bar{L}_2^-(\alpha) &= \bar{K}_2^-(\alpha)\bar{q}_2^-(\alpha) + \lambda\bar{\phi}_2^-(\alpha) - \lambda\bar{F}_2^-(\alpha) = \lambda\bar{F}_2^+(\alpha) - \lambda\bar{\phi}_2^+(\alpha) - \\ &- i\bar{g}_2^+(\alpha)\big/\bar{K}_2^+(\alpha) = \bar{L}_2^+(\alpha), \qquad (-1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0),\end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\bar{F}_2^-(\alpha) = \frac{\bar{q}_2(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(0)}, \qquad \bar{F}_2^+(\alpha) = \frac{\bar{q}_2(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} - \frac{\bar{q}_2^-(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(0)}, \tag{2.5}$$

$$\bar{\phi}_2(\alpha) = \frac{\bar{q}_2^-(\alpha - i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} = \bar{\phi}_2^+(\alpha) + \bar{\phi}_2^-(\alpha). \tag{2.6}$$

Здесь $\bar{F}_2^+(\alpha)$ и $\bar{\phi}_2^+(\alpha)$ регулярны при $\mathrm{Im}(\alpha) > -1$, а $\bar{F}_2^-(\alpha)$ и $\bar{\phi}_2^-(\alpha)$ регулярны при $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$. При этом:

$$\bar{\phi}_2^-(\alpha) = \int_{-\infty}^{0}\bar{\phi}_2(u)e^{i\alpha u}du, \qquad \mathrm{Im}\,\alpha < 0, \tag{2.7}$$

$$\bar{\phi}_1^+(\alpha) = \int_{0}^{\infty}\bar{\phi}_2(u)e^{i\alpha u}du, \qquad \mathrm{Im}\,\alpha > -1, \tag{2.8}$$

$$\phi_2(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\bar{\phi}_2(\alpha)e^{-i\alpha u}d\alpha, \qquad -1 < \tau < 0. \tag{2.9}$$

Как было отмечено, $\bar{K}_2^+(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\bar{q}_2^-(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности. Тогда из (2.6) следует, что $\bar{\phi}_2(\sigma) = O(|\sigma|^{-1})$ при

$|\sigma| \to \infty$. Следовательно, из (2.9) следует, что $\overline{\phi}_2(u) = O(\ln|u|)$ при $|u| \to 0$. Тогда из (2.7) и (2.8) следует, что $\overline{\phi}_2^{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1}\ln\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Имея эти оценки, из уравнения (2.4), с учетом асимптотических поведений присутствующих функций при $|\alpha| \to \infty$, получим, что $\overline{L}_2^-(\alpha) = O(1)$ при $|\alpha| \to \infty$, $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$ и $\overline{L}_2^+(\alpha) = O(1)$ при $|\alpha| \to \infty$, $\mathrm{Im}(\alpha) > -1$. Тогда, согласно теореме об аналитическом продолжении и теореме Лиювилля, из (2.4) получим

$$\overline{K}_2^-(\alpha)\overline{q}_2^-(\alpha) + \lambda\overline{\phi}_2^-(\alpha) - \lambda\overline{F}_2^-(\alpha) = a_2, \qquad \mathrm{Im}\,\alpha < 0, \tag{2.10}$$

$$\lambda\overline{F}_2^+(\alpha) - \lambda\overline{\phi}_2^+(\alpha) - i\overline{g}_2^+(\alpha)/K_2^+(\alpha) = a_2, \qquad \mathrm{Im}\,\alpha > -1, \tag{2.11}$$

где a_2 – неизвестная постоянная, подлежащая определению из условия равновесия накладки (1.16).

С другой стороны, из представления (2.6) и из сказанного выше о возможных полюсах $\overline{q}_2^-(\alpha)$ следует, что точки $\alpha = 0$, $\alpha = (2n-1)i$ $(n = 1,2,...)$ могут быть простыми полюсами для $\overline{\phi}_2(\alpha)$. Поскольку $\overline{\phi}_2^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha > -1$, то $\overline{\phi}_2^-(\alpha)$ можно представить в виде разложения на простейшие дроби [13]:

$$\overline{\phi}_2^-(\alpha) = \frac{\overline{q}_2^-(-i)}{\alpha\overline{K}_2^+(0)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{iA_{-1}^{(2n)}}{(2n+1)(\alpha - i(2n+1))\overline{K}_2^+(2ni)}, \tag{2.12}$$

где

$$A_{-1}^{(2n)} = \lim_{\alpha\to(2n+1)i}(\alpha - i(2n+1))\overline{q}_2^-(\alpha - i) = \lim_{\alpha\to 2ni}(\alpha - 2ni)\overline{q}_2^-(\alpha). \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12) в (2.10), с учетом (2.5) получим

$$\overline{q}_2^-(\alpha) = \frac{i\lambda}{\overline{K}_2^-(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n)}}{(2n+1)(\alpha - i(2n+1))\overline{K}_2^+(2ni)} + \frac{a_2}{\overline{K}_2^-(\alpha)}. \tag{2.14}$$

Теперь, имея в виду, что $A_{-1}^{(2m)}$ представляет вычет функции $\overline{q}_2^-(\alpha)$ в точках $\alpha = 2mi(m = 0,1,2,...)$, из (2.13) и (2.14) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $A_{-1}^{(2n)}(n = 0,1,2,...)$:

$$\mathrm{X}_m^{(2)} + \frac{\lambda}{4}\beta_m^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{X}_n^{(2)}}{(n+1/2)(n-m+1/2)} = \beta_m^{(2)}, \tag{2.15}$$

$$A_{-1}^{(2m)} = a_2\overline{K}_2^+(i(2m+1))\mathrm{X}_m^{(2)}, \qquad m = 0,1,2,... \tag{2.16}$$

$$\beta_m^{(2)} = \frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m+1)!!}{2^m \cdot m!}\right]^2 = \left(1 + \frac{1}{4m^2}\right)\beta_{m-1}^{(2)}, \qquad m = 1,2,...$$

$$\beta_0^{(2)} = 1, \quad \beta_m^{(2)} = O(1), \text{при} \quad m \to \infty. \tag{2.17}$$

Таким образом, решение функционального уравнения (1.12) свелось к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.15) простой структуры.

Регулярность бесконечной системы (2.15) следует из легко проверяемого равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)|n-m+1/2|}=\begin{cases}\pi^2/2, & m=0\\ \dfrac{3}{m}\left[\psi(m+1/2)-\psi(1/2)\right], & m=1,2,...\end{cases} \tag{2.18}$$

где $\psi(z)$–известная пси-функция.

Имея решение (2.15), при помощи (2.16), (2.14) и (1.16) получим значение a_2 в виде

$$ia_2=\frac{P}{a\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{X}_n^{(2)}}{(2n+1)(n+1)}\right]^{-1}. \tag{2.19}$$

Подставляя (2.19) в (2.14), после обратного преобразования Фурье для определения неизвестных контактных напряжений $\tau_2(x)$ получим следующую формулу:

$$\tau_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ia_2\cdot a}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{i\sqrt{2}a_2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\beta_m^{(2)}\Gamma(m+1)}\left[\mathrm{X}_m^{(2)}-\beta_m^{(2)}\right]\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \tag{2.20}$$

$$(0\le x<a),$$

где $\mathrm{X}_m^{(2)}(m=0,1,2,...)$– решение бесконечной системы (2.15), а a_2 определяется из (2.19).

Отметим, что при получении (2.20) использовано значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-ic-\infty}^{-ic+\infty}\frac{\Gamma(i\alpha-i\alpha_0)}{\Gamma(i\alpha)}e^{-i\alpha u}d\alpha=\vartheta(-u)\frac{e^{-i\alpha_0 u}\left(1-e^{u}\right)^{i\alpha_0-1}}{\Gamma(i\alpha_0)},\quad -1<c<0. \tag{2.21}$$

Из (2.15) и (2.18) следует

$$\left(\mathrm{X}_m^{(2)}-\beta_m^{(2)}\right)=O\left(m^{-1}\ln m\right),\qquad m\to\infty. \tag{2.22}$$

Следовательно, ряд в (2.20) равномерно сходится при $0\le x\le a$, т.е. особенность $\tau_2(x)$ дается только первым слагаемым.

При $\lambda=0$ (жесткая накладка) $\mathrm{X}_m^{(2)}=\beta_m^{(2)}(m=0,1,2,...)$. Тогда из (2.19) и (2.20) получим известное решение

$$\tau_2(x)=P/\pi\sqrt{a^2-x^2}. \tag{2.23}$$

3. Рассмотрим теперь функционально-разностное уравнение (1.13), где $\overline{q}_1^-(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\overline{g}_1^+(\alpha)$– при $\operatorname{Im}\alpha>-1$.

Факторизуя $\operatorname{cth}(\pi\alpha/2)$

$$\operatorname{cth}(\pi\alpha/2)=\overline{K}_1(\alpha)=\overline{K}_1^-(\alpha)\cdot\overline{K}_1^+(\alpha), \tag{3.1}$$

функциональное уравнение (1.13) представим в виде:

$$\begin{gathered}\overline{L}_1^-(\alpha)=\overline{K}_1^-(\alpha)\overline{q}_1^-(\alpha)+\lambda\overline{\phi}_1^+(\alpha)-\frac{\lambda P}{2a}\overline{F}_1^-(\alpha)=\frac{i\overline{g}_1^+(\alpha)}{\overline{K}_1^+(\alpha)}+\\ +\frac{\lambda P}{2a}\overline{F}_1^+(\alpha)-\lambda\overline{\phi}_1^+(\alpha)=\overline{L}_1^+(\alpha),\qquad (-1<\operatorname{Im}\alpha<0),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\overline{K}_1^-(\alpha)=\left[\overline{K}_2^-(\alpha)\right]^{-1},\qquad \overline{K}_1^+(\alpha)=\left[\overline{K}_2^+(\alpha)\right]^{-1}. \tag{3.3}$$

$$\overline{F}_1^-(\alpha)=\frac{1}{\alpha\overline{K}_1^+(0)},\quad \overline{F}_1^+(\alpha)=\frac{1}{\alpha\overline{K}_1^+(\alpha)}-\frac{1}{\alpha\overline{K}_1^+(0)},\tag{3.4}$$

$$\overline{\Phi}_1(\alpha)=\frac{\overline{q}_1^-(\alpha-i)}{\alpha\overline{K}_1^+(\alpha)}=\overline{\phi}_1^+(\alpha)+\overline{\phi}_1^-(\alpha),\tag{3.5}$$

а $\overline{K}_2^\pm(\alpha)$ даются при помощи (2.2).

Здесь $\overline{K}_1^-(\alpha)$, $\overline{F}_1^-(\alpha)$, $\overline{\phi}_1^-(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\overline{K}_1^+(\alpha)$, $\overline{F}_1^+(\alpha)$, $\overline{\phi}_1^+(\alpha)$– при $\operatorname{Im}\alpha>-1$. При этом, из (2.2) и (3.3) следует, что $\overline{K}_1^\pm(\alpha)=0\left(\alpha^{\pm1/2}\right)$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности. Тогда из (1.15) и (3.5) следует, что $\overline{\phi}_1(\sigma)=O\left((\sigma|\sigma|)^{-1}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$. Опираясь на свойства интегралов Фурье, из аналогичных представлений (2.7)-(2.9) для $\overline{\phi}_1^\pm(\alpha)$ получим

$$\overline{\phi}_1^\pm(\alpha)=\mp\frac{A}{i\alpha}+O\left(\alpha^{-2}\ln\alpha\right)\tag{3.6}$$

при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности, где

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{\phi}_1(\alpha)d\alpha,\qquad -1<\tau<0.\tag{3.7}$$

Имея в виду (3.6) и сказанное выше об асимптотических поведениях, входящих в (3.2) функций, получим, что $\overline{L}_1^-(\alpha)=O\left(\alpha^{-1}\right)$ при $|\alpha|\to\infty,\ \operatorname{Im}\alpha<0$ и $\overline{L}_1^+(\alpha)=O\left(\alpha^{-1}\right)$ – при $|\alpha|\to\infty,\ \operatorname{Im}\alpha>-1$. Следовательно, опять из теорем об аналитическом продолжении и Лиювилля получим, что в (3.2) $\overline{L}_1^+(\alpha)=\overline{L}_2^-(\alpha)\equiv0$. Тогда для $\overline{q}_1^-(\alpha)$ получим:

$$\overline{q}_1^-(\alpha)=-\frac{\lambda\overline{\phi}_1^-(\alpha)}{\overline{K}_1^-(\alpha)}+\frac{\lambda P}{2a}\frac{1}{\overline{K}_1^+(0)\alpha\overline{K}_1^-(\alpha)},\ \operatorname{Im}\alpha<0.\tag{3.8}$$

Обратимся теперь к $\overline{\phi}_1^-(\alpha)$ из (3.5). Аналогичными рассуждениями, как это делалось относительно $\overline{q}_2^-(\alpha)$, при помощи (1.13) нетрудно убедиться, что полюсами аналитического продолжения $\overline{q}_1^-(\alpha)$ в области $\operatorname{Im}\alpha\ge0$ могут быть только точки $\alpha=(2n-1)i,\ n=1,2,3,\ldots$, притом простыми. Тогда из (3.5) следует, что точки $\alpha=2ni(n=0,1,2,\ldots)$ могут быть простыми полюсами для аналитического продолжения $\overline{\phi}_1^-(\alpha)$ и ее можно представить в виде разложения на простейшие дроби [13]

$$\overline{\phi}_1^-(\alpha)=\frac{\overline{q}_1^-(-i)}{\alpha\overline{K}_1^+(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n-1)}}{2ni(\alpha-2ni)K_1^+(2ni)},\tag{3.9}$$

$$A_{-1}^{(2n-1)}=\text{Выч}\,\overline{q}_1^-(\alpha-i)\Big|_{\alpha=2ni}=\lim_{\alpha\to(2n-1)i}\overline{q}_1^-(\alpha),\ \ n=1,2,\ldots\tag{3.10}$$

Подставляя (3.9) в (3.8) и учитывая (3.10), после некоторых выкладок для определения $A_{-1}^{(2n-1)}(n=1,2,...)$ приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{X}_m^{(1)}+\frac{\lambda}{4}\beta_m^{(1)}\sum\frac{\mathrm{X}_n^{(1)}}{n(n-m+1/2)}=\frac{\lambda}{2m-1}\beta_m^{(1)},\quad m=1,2,... \tag{3.11}$$

$$\beta_m^{(1)}=\frac{1}{2m}\left[\frac{(2m-1)!!}{2^{m-1}(m-1)!}\right]^2=\left(1+\frac{1}{4m(m-1)}\right)\beta_{m-1},\qquad m=2,3,...$$

$$\beta_1^{(1)}=1/2,\qquad \beta_m^{(1)}=O(1),\qquad m\to\infty \tag{3.12}$$

$$A_{-1}^{(2m-1)}=ia_1\overline{K}_1^{+}(2mi)\mathrm{X}_m^{(1)},\qquad m=1,2,... \tag{3.13}$$

Постоянная a_1 определяется при помощи (3.8) и имеет вид

$$a_1=\frac{P}{a}\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{X}_n^{(1)}}{n(2n+1)}\right]^{-1}. \tag{3.14}$$

Регулярность бесконечной системы (3.12) следует из равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n|n-m+1/2|}=\frac{2}{2m-1}\left[2\psi(m)+\psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-2\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\gamma\right] \tag{3.15}$$

$$(m=1,2,...),$$

где $\gamma=0.5772...$ – постоянная Эйлера, $\psi(z)$ – функция-пси.

Имея решение $\left\{\mathrm{X}_m^{(1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ системы (3.11), при помощи (3.8), (3.9), (3.13) и (3.14) получим решение функционального уравнения (1.13) $\overline{q}_1^{-}(\alpha)$. После чего, при помощи обратного преобразования Фурье определим распределение контактного напряжения $\tau_1(x)$. Не останавливаясь на этих выкладках, приведем ее окончательное выражение

$$\tau_1(x)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c_0x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{a_1}{\beta_m^{(1)}}\mathrm{X}_m^{(1)}+\frac{\lambda c_0}{2m-1}\right]\overline{K}_1^{+}((2m-1)i)\left(\frac{x}{a}\right)^{2m-1}$$

$$(0\le x<1), \tag{3.16}$$

где

$$c_0=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{X}_n^{(1)}}{n}. \tag{3.17}$$

$\mathrm{X}_m^{(1)}(m=0,1,2,...)$ – решение бесконечной системы (3.11), а a_1 определяется из (3.14).

Исходя из (3.6) и (3.8), можно показать, что

$$\left[\frac{a_1}{\beta_m^{(1)}}\mathrm{X}_m^{(1)}+\frac{\lambda c_0}{2m-1}\right]=O\left(m^{-2}\ln m\right),\quad m\to\infty \tag{3.18}$$

Тогда, из (3.3) и (3.18) следует, что ряд в (3.16) равномерно сходится при $0\le x\le a$, т.е. особенность $\tau_1(x)$ дается первым слагаемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып.4. С.632-646.
2. Melan E. Ein eitrag zur Theorie geschwesster Verbindungen. –Ingenieur –Archiv. 1932. Bd3. Hef 2. s123-129.
3. Benscoter S.U. Analysis of single stiffener on an infinite sheet. // J.Appl. Mech. 1949. Vol.16. №3. P.242-246.
4. Bufler H. Scheibe mit endlichaer elastischer Vesteifang. VDI –Forshungsh. 1961. №485. S.41.
5. Толкачев В.М. Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине. //Докл. АН СССР. 1964. Т.154. №4. С.806-808.
6. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. //ПММ. 1970. Т.34. №3. С.412-421.
7. Arutunyan N.Kh., Mkhitaryan S.M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners.-Trends in elasticity and thermoelasticity (W. Novacki Anniversary Volume). Groningen, Wolters-Noordhoff publ. 1971.
8. Эрдоган Ф., Гупта Г. Задача о полуплоскости с упругой накладкой. // Прикл. Мех. Тр.Амер. о-ва инж.-мех. Сер.Е. 1971. Т.34. №4.
9. Григорян Э.Х. Изгиб двух полубесконечных балок, лежащих на границе упругой полуплоскости. // Изв.НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.20–30.
10. Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена двумя полубесконечными накладками. Ереван: Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Изд ЕГУ. 1991. №8.
11. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. //Quart. J. Mech. And Appl. Math. 1955. 8. №2.
12. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: 1962. 278с.
13. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Физматгиз. 1961.

Инситтут механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.05.2007