

УДК 536.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОНСТРУКТИВНО И ФИЗИЧЕСКИ
НЕОДНОРОДНЫХ КОМПОЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ
АНИЗОТРОПИИ ОБЩЕГО ВИДА

Немировский Ю.В., Янковский А.П.

Յու. Վ. Նեմիրովսկի, Ա. Պ. Եանկովսկի

Գոնաստրուկտիվ և ֆիզիկական անհամասեռ կոմպոզիցիոն ձողերի ջերմահաղորդականության
ստացիոնար խնդրի ասիմպտոտիկ անալիզը ընդհանուր անիզոտրոպիայի դեպքում

Ձևակերպված է շերտավոր կոմպոզիցիոն ձողերի ջերմահաղորդականության եռաչափ ստացիոնար խնդիրը՝ շերտերի ընդհանուր անիզոտրոպիայի և անհամասեռության դեպքում: Կառուցված են ձևակերպված խնդրի ասիմպտոտիկ վերլուծությունները, ձողերի կողմնային մակերևույթների վրա տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Կատարված է ստացված երկչափ և միաչափ հավասարումների և եզրային պայմանների անալիզ և ուսումնասիրված են ջերմահաղորդականության խնդիրների լուծումների ասիմպտոտիկ հատկությունները

Yu.V. Nemirovskii, A.P. Yankovskii

The Asymptotic Analysis of the Stationary Problem of Thermal Conduction in the Constructively and
Physically Nonuniform Composit Balks at General form Anisotropy

The three-dimensional problem of a stationary thermal conduction of schistose composit balks of constant cross section is formulated at the general anisotropy and inhomogeneity of materials of stratum. Exterior asymptotic decompositions of solutions of a task in view are constructed at different boundary conditions on lateral surfaces of cores. The gained two-dimensional and one-dimensional resolving equations and boundary problems are analysed and asymptotic properties of solutions of problems of a thermal conduction are explored.

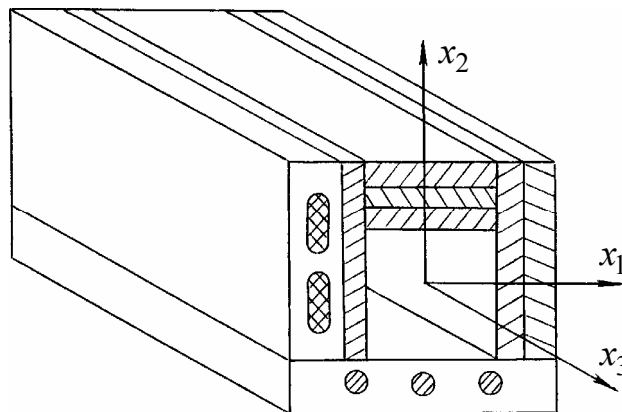
Сформулирована трехмерная задача стационарной теплопроводности слоистых композитных стержней постоянного поперечного сечения при общей анизотропии и неоднородности материалов слоев. Построены внешние асимптотические разложения решений поставленной задачи при разных граничных условиях на боковых поверхностях стержней. Проанализированы получающиеся двумерные и одномерные разрешающие уравнения и граничные задачи и исследованы асимптотические свойства решений задач теплопроводности.

При построении математических методов исследования пространственного стационарного поля температур тонкостенных элементов конструкций (стержней, пластин, оболочек) исследователи всегда пытались свести решение трехмерной задачи к совокупности решений некоторых более простых двумерных и одномерных задач. Способов понижения размерности решаемых задач разработано такое количество [1, 2], что их детальный анализ далеко выходит за рамки настоящего исследования. При этом, учитывая малый размер в поперечном направлении, авторы разными способами стремятся избавиться от поперечной координаты, сводя проблему к решению краевых задач в плане (для пластин) или вдоль оси (для стержней). Наличие малого геометрического параметра позволяет разыскивать решение трехмерной задачи теплопроводности тонкостенных конструкций асимптотическими методами интегрирования. Разработке этих методов для однослойных анизотропных тонкостенных конструкций посвящены, например, работы [3, 4 и др.]. Однако на сегодняшний день отсутствуют аналогичные исследования для конструктивно неоднородных (слоистых) тонкостенных композитных изделий. Целью настоящей работы является изучение с

использованием асимптотического анализа трехмерной задачи теплопроводности конструктивно и физически неоднородных анизотропных стержней.

Рассмотрим стержень с постоянным по длине произвольным поперечным сечением, состоящим из произвольного числа M анизотропных слоев, выполненных из различных неоднородных материалов (фиг. 1). Граница между слоями в поперечном сечении не обязательно прямолинейна, а может быть произвольной кривой, в том числе и замкнутой. Для краткости изложения продольные стержни, посредством которых осуществлено армирование, также будем называть слоями. Материалы слоев могут быть неоднородны как в поперечном сечении, так и в продольном направлении. Все слои пронумеруем: $m = 1, 2, \dots, M$, где m – номер слоя. Свяжем со стержнем прямоугольную декартову систему координат x_1, x_2, x_3 так, чтобы ось x_3 была направлена вдоль оси стержня, а переменные x_1, x_2 определяли координаты точек в поперечном сечении (фиг.1).

Введем обозначения: $T^{(m)}$ – температура m -го слоя; $q_i^{(m)}$ – компоненты вектора теплового потока в m -м слое; $\lambda_{ij}^{(m)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) – коэффициенты теплопроводности материала m -го слоя; $w^{(m)}$ – плотность мощностей внутренних источников тепла в m -м слое; q_n – заданный тепловой поток через боковую поверхность A стержня; $\alpha^{(m)}$ – коэффициент теплообмена по закону Ньютона между m -м слоем стержня и окружающей средой на боковой поверхности; T_∞ – температура окружающей среды со стороны боковой поверхности стержня; T_l^∞, T_r^∞ – температура окружающей среды со стороны левой («left») и правой («right») торцевых плоскостей стержня, определяемых координатами $x_3 = x_l, x_3 = x_r$ ($x_r > x_l$) соответственно; q_l, q_r – заданный тепловой поток через левую и правую торцевые плоскости стержня соответственно; $\alpha_l^{(m)}, \alpha_r^{(m)}$ – коэффициенты теплообмена по закону Ньютона между m -м слоем стержня и окружающей средой на левом и правом торцах соответственно.



Фиг. 1. Слоистый стержень

Будем рассматривать такие стержни, для которых продольный размер $L = x_r - x_l$ больше характерного размера H поперечного сечения (например, H – наибольшее расстояние между точками поперечного сечения) и для которых отношение

$$\varepsilon = H / L \quad (1)$$

является малым параметром.

Пусть T_e – характерное значение температуры; λ_e – характерное (эталонное) значение коэффициента теплопроводности. Перейдем к безразмерным переменным, функциям и величинам, для простоты не меняя их обозначений,

$$\begin{aligned} x_k &\leftrightarrow x_k / H \quad (k = 1, 2), \quad x_3 \leftrightarrow (x_3 - x_l) / L, \quad x_s \leftrightarrow (x_s - x_l) / L \quad (s = l, r) \\ T^{(m)} &\leftrightarrow T^{(m)} / T_e, \quad T_\infty \leftrightarrow T_\infty / T_e, \quad q_i^{(m)} \leftrightarrow q_i^{(m)} / q_e, \quad \lambda_{ij}^{(m)} \leftrightarrow \lambda_{ij}^{(m)} / \lambda_e \\ (i, j = 1, 2, 3), \quad q_n &\leftrightarrow q_n / q_e, \quad \alpha^{(m)} \leftrightarrow \alpha^{(m)} H / \lambda_e, \quad T_s^\infty \leftrightarrow T_s^\infty / T_e \quad (2) \\ q_s &\leftrightarrow q_s / q_e, \quad \alpha_s^{(m)} \leftrightarrow \alpha_s^{(m)} H / \lambda_e \quad (s = l, r), \quad w^{(m)} \leftrightarrow w^{(m)} H / q_e, \quad q_e \equiv \lambda_e T_e / H \end{aligned}$$

Далее будем считать, что изменения малого параметра ε в (1) вызваны изменением длины L стержня при фиксированном значении H , тогда в (2) безразмерные переменные, функции и величины, x_k ($k = 1, 2$), T_∞ , q_n , $\alpha^{(m)}$, $w^{(m)}$, $\lambda_{ij}^{(m)}$ ($i, j = 1, 2, 3$), T_s^∞ , q_s , $\alpha_s^{(m)}$ ($s = l, r$) имеют порядок $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Стационарная задача теплопроводности композитного стержня с учетом (1), (2) описывается следующими безразмерными уравнениями и соотношениями: уравнением теплопроводности

$$\partial_1 q_1^{(m)} + \partial_2 q_2^{(m)} + \varepsilon \partial_3 q_3^{(m)} = w^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \quad (3)$$

законом теплопроводности Фурье

$$q_i^{(m)} = -\lambda_{i1}^{(m)} \partial_1 T^{(m)} - \lambda_{i2}^{(m)} \partial_2 T^{(m)} - \varepsilon \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T^{(m)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4)$$

условиями сопряжения на границе контакта i -го и j -го слоев

$$q_1^{(i)} n_1 + q_2^{(i)} n_2 = q_1^{(j)} n_1 + q_2^{(j)} n_2, \quad T^{(i)} = T^{(j)} \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j) \quad (5)$$

граничными условиями на боковой поверхности A стержня

$$\beta (q_1^{(p)} n_1 + q_2^{(p)} n_2) = \gamma q_n + \delta \alpha^{(p)} (T^{(p)} - T_\infty), \quad \mathbf{x} \in A, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} \quad (6)$$

граничными условиями на левой

$$-\beta_l q_3^{(m)} = \gamma_l q_l (x_1, x_2) + \delta_l \alpha_l^{(m)} (T^{(m)} - T_l^\infty), \quad x_3 = x_l = 0 \quad (7)$$

и правой

$$\beta_r q_3^{(m)} = \gamma_r q_r (x_1, x_2) + \delta_r \alpha_r^{(m)} (T^{(m)} - T_r^\infty), \quad x_3 = x_r = 1, \quad 1 \leq m \leq M \quad (8)$$

торцевых плоскостях. Здесь $\partial_i (\square) = \partial (\square) / \partial x_i$ – оператор частного дифференцирования; n_1, n_2 – компоненты вектора единичной нормали к боковой поверхности A стержня или к границе контакта слоев (смотря по смыслу); $\beta(\mathbf{x})$, $\gamma(\mathbf{x})$, $\delta(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in A$) – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на боковой поверхности стержня; β_s , γ_s , δ_s – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на левом ($s = l$) или правом ($s = r$) торцах стержня; индекс p в (6) пробегает только те значения от 1 до M , для которых p -й слой имеет частью своей границы боковую поверхность A стержня.

Наличие малого параметра ε в уравнении (3) и в соотношениях (4) указывает на то, что граничная задача (3)–(8) является задачей с сингулярным возмущением, поэтому решение этой задачи будем разыскивать в виде

$$T^{(m)} = T_*^{(m)} + T_l^{(m)} + T_r^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \quad (9)$$

где $T_*^{(m)}$ – основное температурное поле в m -м слое; $T_l^{(m)}, T_r^{(m)}$ – поправки к основному полю в погранслоях в окрестности левого и правого торцов стержня, соответственно.

Далее настоящее исследование посвящено определению основного температурного поля $T_*^{(m)}$ в стержне. При этом будем различать два случая: 1) на боковой поверхности стержня задан только тепловой поток; 2) на боковой поверхности задан закон конвективного теплообмена или условия общего вида (6). В обоих случаях потребуем, чтобы функция $T_*^{(m)}$ удовлетворяла уравнению (3), соотношениям (4), условиям сопряжения (5) и граничным условиям (6) на боковой поверхности стержня. Вопрос о выполнении граничных условий на торцах стержня для функции пока оставим открытым.

В соответствии с терминологией, принятой в [5], задачу о нахождении функции $T_*^{(m)}$, удовлетворяющей уравнениям (3)–(6) внутри стержня и на его боковой поверхности, будем называть *полукраевой*, так как существуют участки границы стержня (его торцы), на которых краевые условия для этой функции временно не заданы.

Кроме того, в соответствии с [5], введем *определение*. Пусть дано дифференциальное уравнение $L(T(\mathbf{x}), \varepsilon) = 0$, функциональную последователь-

ность $\left\{ T(\mathbf{x}, \varepsilon) \right\}_{K=0}^{\infty}$ будем называть формальным асимптотическим решением этого уравнения, если существует монотонная неограниченно возрастающая функция $N(K)$ такая, что для любого K выполняется равенство

$$L\left(T(\mathbf{x}, \varepsilon), \varepsilon \right) = O\left(\varepsilon^{N(K)} \right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (10)$$

Элемент последовательности $T(\mathbf{x}, \varepsilon)$ будем называть формальным асимптотическим приближением решения уравнения с точностью $O\left(\varepsilon^{N(K)} \right)$. Если равенство, аналогичное (10), выполняется для части или всех краевых условий, то будем говорить о формальном асимптотическом решении полукраевой или краевой задачи соответственно.

Случай первый. На боковой поверхности задан только тепловой поток ($\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, в (6)). Примем для функции $T_*^{(m)}$ следующее правило аппроксимации (внешнее разложение)

$$T_*^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^K T_k^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k, \quad 1 \leq m \leq M, \quad K \geq 0 \quad (11)$$

где K – порядковый номер правила аппроксимации (номер асимптотического приближения); $T_k^{(m)}$ – характеристические функции температурного поля.

Представим компоненты вектора теплового потока $q_j^{(m)}$ в виде

$$q_i^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^K Q_{i,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k \quad (i = 1, 2), \quad q_3^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=0}^{K-1} Q_{3,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k \quad (12)$$

где $Q_{j,k}^{(m)}$ ($1 \leq m \leq M$, $j = 1, 2, 3$) – характеристические функции компонент вектора теплового потока, и потребуем выполнения следующих равенств между характеристическими функциями $T_k^{(m)}$ и $Q_{j,k}^{(m)}$:

$$Q_{i,k}^{(m)} = -\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_k^{(m)} - \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)} \quad (i = 1, 2, \quad 0 \leq k \leq K, \quad T_{-1}^{(m)} \equiv 0) \quad (13)$$

$$Q_{3,k}^{(m)} = -\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_k^{(m)} - \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)} \quad (0 \leq k \leq K-1, \quad T_{-1}^{(m)} \equiv 0, \quad 1 \leq m \leq M)$$

Подставим разложения (11), (12) в закон теплопроводности (4) и учтем (13), тогда получим, что в общем случае анизотропии все соотношения в законе Фурье выполняются приближенно:

$$\begin{aligned} q_i^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^{K-1} \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)} \quad (i = 1, 2) \\ q_3^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^{K-2} \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_K^{(m)} - \\ &- \varepsilon^{K-2} \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{K-1}^{(m)} - \varepsilon^{K-1} \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (14)$$

Если рассматривается анизотропия специального вида, когда одна из главных осей теплофизической анизотропии материала каждого слоя совпадает с продольным направлением стержня, т.е.

$$\lambda_{i3}^{(m)} = \lambda_{3i}^{(m)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq m \leq M \quad (15)$$

то первые два равенства (14) выполняются точно, а третье равенство – асимптотически с точностью порядка $O(\varepsilon^{K-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подставим (11), (12) в условия сопряжения решения (5) и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε , тогда получим цепочку равенств

$$Q_{1,k}^{(i)} n_1 + Q_{2,k}^{(i)} n_2 = Q_{1,k}^{(j)} n_1 + Q_{2,k}^{(j)} n_2, \quad T_k^{(i)} = T_k^{(j)} \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j, \quad 0 \leq k \leq K) \quad (16)$$

Подставим разложения (12) в уравнение теплопроводности (3) и граничные условия (6), где $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$, и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε , учитывая свойства $w^{(m)} = O(1)$, $q_n = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда получим цепочки равенств

$$\partial_1 Q_{1,k}^{(m)} + \partial_2 Q_{2,k}^{(m)} + \partial_3 Q_{3,k-1}^{(m)} = \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}) \quad (1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq k \leq K, \quad Q_{3,-1}^{(m)} \equiv 0) \quad (17)$$

$$Q_{1,k}^{(p)} n_1 + Q_{2,k}^{(p)} n_2 = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K) \quad (18)$$

где δ_{2k} – символ Кронекера ($\delta_{22} = 1$, $\delta_{2k} = 0$ при $k \neq 2$). Подставим теперь в равенства (16)–(18) выражения (13), тогда получим цепочки равенств:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \partial_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_k^{(m)} + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)} \right) - \partial_3 \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_{k-1}^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-2}^{(m)} \right) &= \\ = \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r T_k^{(i)} + \lambda_{l3}^{(i)} \partial_3 T_{k-1}^{(i)} \right) = \sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r T_k^{(j)} + \lambda_{l3}^{(j)} \partial_3 T_{k-1}^{(j)} \right) \quad (20)$$

$$T_k^{(i)} = T_k^{(j)} \quad (0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j)$$

$$-\sum_{i=1}^2 n_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j T_k^{(p)} + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(p)} \right) = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K) \quad (21)$$

где

$$T_{-k}^{(m)} \equiv 0 \quad (1 \leq m \leq M, \quad k \geq 1) \quad (22)$$

Анализ уравнений (19)–(21) с учетом (22) позволяет заключить, что для любого k функцию $T_k^{(m)}$ можно представить в виде:

$$T_k^{(m)}(\mathbf{x}) = T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) + \theta_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) D_3 \theta_{k-1}(x_3) + \theta_k(x_3), \quad 0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq m \leq M \quad (23)$$

где

$$D_3(\square) = d(\square) / dx_3, \quad \theta_k(x_3) \equiv T_k^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3), \quad x_3 \in [0, 1] \quad (24)$$

$T_{*k}^{(m)}$, $\theta_{*k}^{(m)}$, θ_{k-1} , θ_k – подлежащие определению функции, причем в силу (22), (24)

$$T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \theta_{-k}(x_3) \equiv 0 \quad (k \geq 1) \quad (25)$$

$$T_{*k}^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3) = 0, \quad \theta_{*k}^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3) = 0, \quad 0 \leq k \leq K, \quad x_3 \in [0, 1] \quad (26)$$

x_1^0, x_2^0 – координаты некоторой фиксированной точки поперечного сечения стержня; m в (24), (26) и далее в аналогичных равенствах соответствует номеру слоя, которому принадлежат точки (x_1^0, x_2^0, x_3) при $x_3 \in [0, 1]$.

Продемонстрируем, как можно последовательно определить все функции, входящие в (23). Для этого подставим разложение (23) в равенства (19)–(21):

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^2 \partial_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j (T_{*k}^{(m)} + \theta_{*k}^{(m)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_{*k-1}^{(m)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] - \\ & -\partial_3 \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_{*k-1}^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_{*k-2}^{(m)} D_3 \theta_{k-3} + \theta_{k-2}) \right] = \end{aligned} \quad (27)$$

$$= \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq m \leq M, \quad 0 \leq k \leq K$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r (T_{*k}^{(i)} + \theta_{*k}^{(i)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{l3}^{(i)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(i)} + \theta_{*k-1}^{(i)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] = \\ & = \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r (T_{*k}^{(j)} + \theta_{*k}^{(j)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{l3}^{(j)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(j)} + \theta_{*k-1}^{(j)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

$$T_{*k}^{(i)} + \theta_{*k}^{(i)} D_3 \theta_{k-1} = T_{*k}^{(j)} + \theta_{*k}^{(j)} D_3 \theta_{k-1} \quad (0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j)$$

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^2 n_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j (T_{*k}^{(p)} + \theta_{*k}^{(p)} D_3 \theta_{k-1}) + \lambda_{i3}^{(p)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(p)} + \theta_{*k-1}^{(p)} D_3 \theta_{k-2} + \theta_{k-1}) \right] = \\ & = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K) \end{aligned} \quad (29)$$

Потребуем, чтобы функция $\theta_{*k}^{(m)}$ с учетом (26) удовлетворяла следующей граничной задаче:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 \partial_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j \theta_{*k}^{(m)} + \lambda_{i3}^{(m)} \right) &= 0 \quad (1 \leq m \leq M), \quad \theta_{*k}^{(i)} = \theta_{*k}^{(j)} \quad (30) \\ \sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r \theta_{*k}^{(i)} + \lambda_{l3}^{(i)} \right) &= \sum_{l=1}^2 n_l \left(\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r \theta_{*k}^{(j)} + \lambda_{l3}^{(j)} \right) \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j) \\ -\sum_{i=1}^2 n_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j \theta_{*k}^{(p)} + \lambda_{i3}^{(p)} \right) &= 0 \quad (\mathbf{x} \in A), \quad \theta_{*k}^{(m)}(x_1^0, x_2^0, x_3) = 0 \quad (0 \leq k \leq K) \end{aligned}$$

Переменная x_3 в граничных задачах (30) выступает в качестве параметра и для каждого k эти задачи полностью идентичны, поэтому достаточно задачу (30) решить при любом k (например, при $k = 0$) и положить

$$\theta_{*k}^{(m)}(\mathbf{x}) = \theta_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv \theta_*^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 0 \leq k \leq K, \quad 1 \leq m \leq M \quad (31)$$

Краевая задача (30) является двумерной (по переменным x_1, x_2 , так как x_3 выступает в качестве параметра) задачей типа Неймана. Такие граничные задачи хорошо изучены [6]. Если материал каждого слоя обладает анизотропией специального вида (15), то из (30), (31) следует $\theta_*^{(m)} \equiv 0$. В случае общей анизотропии функция $\theta_*^{(m)} \neq 0$ и определяется теплофизическими свойствами материалов слоев (коэффициентами $\lambda_{ij}^{(m)}$, $i, j = 1, 2, 3$). Далее будем считать, что граничная задача (30) уже решена.

Перепишем равенства (27)–(29) с учетом (30), (31):

$$-\partial_3 \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-3} + \theta_{k-2}) \right] - \quad (32)$$

$$-\sum_{i=1}^2 \partial_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_{*k}^{(m)} + \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) \right] = \delta_{2k} w^{(m)}(\mathbf{x}), \quad 1 \leq m \leq M$$

$$T_{*k}^{(i)} = T_{*k}^{(j)}, \quad \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(i)} \partial_r T_{*k}^{(i)} + \lambda_{l3}^{(i)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(i)} + \theta_*^{(i)} D_3 \theta_{k-2}) \right] = \quad (33)$$

$$= \sum_{l=1}^2 n_l \left[\sum_{r=1}^2 \lambda_{lr}^{(j)} \partial_r T_{*k}^{(j)} + \lambda_{l3}^{(j)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(j)} + \theta_*^{(j)} D_3 \theta_{k-2}) \right] \quad (1 \leq i, j \leq M, \quad i \neq j)$$

$$-\sum_{i=1}^2 n_i \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j T_{*k}^{(p)} + \lambda_{i3}^{(p)} \partial_3 (T_{*k-1}^{(p)} + \theta_*^{(p)} D_3 \theta_{k-2}) \right] = \delta_{2k} q_n(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in A) \quad (34)$$

Проинтегрируем уравнение (32) по площади F поперечного сечения стержня, а граничное условие (34) – по контуру Γ поперечного сечения и применим формулу Остроградского – Гаусса, тогда с учетом условий сопряжения (33) получим условие разрешимости полукраевой задачи (32)–(34):

$$\begin{aligned}
& -D_3 \left\{ \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \lambda_{3j}^{(m)} (\partial_j T_{*k-1}^{(m)} + \partial_j \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-2}) dF + \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \lambda_{33}^{(m)} [D_3 \theta_{k-2} + \right. \\
& \left. + \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-3})] dF \right\} = \delta_{2k} \left(\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} w^{(m)}(\mathbf{x}) dF - \int_{\Gamma} q_n d\Gamma \right), \quad x_3 \in [0, 1]
\end{aligned} \quad (35)$$

где F_m – площадь поперечного сечения m -го слоя стержня. (Аналогичное условие разрешимости граничной задачи (30) приводит к тождеству $0 \equiv 0$.)

Предположим, что в (32)–(35) функции $T_{*k-1}^{(m)}(\mathbf{x})$, $T_{*k-2}^{(m)}(\mathbf{x})$, $\theta_{k-3}(x_3)$ уже известны, тогда равенство (35) является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $\theta_{k-2}(x_3)$, которое можно записать так:

$$-D_3 (G_k(x_3) + H_*(x_3) D_3 \theta_{k-2}(x_3)) = W_k(x_3), \quad x_3 \in [0, 1], \quad 0 \leq k \leq K \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned}
G_k(x_3) & \equiv \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_{*k-1}^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 (T_{*k-2}^{(m)} + \theta_*^{(m)} D_3 \theta_{k-3}) \right] dF \\
W_k(x_3) & \equiv \delta_{2k} \left(\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} w^{(m)}(\mathbf{x}) dF - \int_{\Gamma} q_n(\Gamma, x_3) d\Gamma \right) \quad (0 \leq k \leq K) \\
H_*(x_3) & \equiv \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j \theta_*^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \right) dF
\end{aligned} \quad (37)$$

Общий интеграл уравнения (36) имеет вид:

$$\theta_{k-2}(x_3) = - \int_0^{x_3} \frac{dt}{H_*(t)} \left(G_k(t) + \int_0^t W_k(s) ds \right) + C_{k-2}^* \int_0^{x_3} \frac{ds}{H_*(s)} + C_{k-2}^{**} \quad (38)$$

где C_{k-2}^* , C_{k-2}^{**} – постоянные интегрирования, которые должны быть определены из граничных условий на торцах стержня ($x_3 = 0$, $x_3 = 1$).

Так как функции $T_{*k-1}^{(m)}$, $T_{*k-2}^{(m)}$, θ_{k-3} в (32)–(34), (37) предполагаются известными, а функция θ_{k-2} определена в (38), равенства (32)–(34) с учетом первого уравнения (26) образуют двумерную (по переменным x_1, x_2) граничную задачу для определения функции $T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x})$, причем переменная x_3 здесь выступает в качестве параметра. Эта краевая задача является задачей типа Неймана и достаточно хорошо изучена [6].

Выясним вопрос об определении постоянных интегрирования C_{k-2}^* , C_{k-2}^{**} в (38). В точности краевые условия (7), (8) на торцах в континууме точек $(x_1, x_2) \in F$, $x_3 = 0$ или $x_3 = 1$ не могут быть выполнены без рассмотрения пограничных слоев, возникающих вблизи торцов стержня. Для определения же постоянных в (38) потребуем выполнения граничных условий на торцах стержня в интегральном смысле (проинтегрировав (7), (8) по площади поперечного сечения), тогда после

подстановки в (7), (8) разложений (11), (12) и собирания слагаемым при одинаковых степенях ε , получим цепочки интегральных равенств

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (-\beta_l Q_{3,k}^{(m)} - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_k^{(m)}) dF &= \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_l q_l - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_l^\infty) dF \quad (x_3 = 0) \\ \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\beta_r Q_{3,k}^{(m)} - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_k^{(m)}) dF &= \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_r q_r - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_r^\infty) dF \quad (x_3 = 1) \end{aligned} \quad (39)$$

Подставим сюда выражения для $Q_{3,k}^{(m)}$ из (13), тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} [\beta_l (\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 T_k^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 T_k^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)}) - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_k^{(m)}] dF &= \\ = \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_l q_l - \delta_l \alpha_l^{(m)} T_l^\infty) dF \quad (x_3 = 0) \\ \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} [-\beta_r (\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 T_k^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 T_k^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{k-1}^{(m)}) - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_k^{(m)}] dF &= \\ = \delta_{2k} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (\gamma_r q_r - \delta_r \alpha_r^{(m)} T_r^\infty) dF \quad (x_3 = 1, \quad 0 \leq k \leq K) \end{aligned} \quad (40)$$

Выполнение равенств (39) или (40) является необходимым и достаточным условием затухания погранслоев в стержне [3].

Покажем, как по изложенной выше схеме можно последовательно с увеличением k определить все функции, входящие в разложения (11), (23). Предполагаем, что граничная задача (30) уже решена и функция $\theta_*^{(m)}(\mathbf{x})$ (см. (31)) уже известна. Тогда при $k = 0$ из (26), (32)–(34) с учетом (25) получим $T_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$, поэтому из (23), (25) имеем

$$T_0^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv T_0^{(m)}(x_3) = \theta_0(x_3) \quad (T_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0) \quad (41)$$

Аналогично, при $k = 1$ из (26), (32)–(34) с учетом (25) и $T_{*0}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$ получим $T_{*1}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$, поэтому из (23) с учетом (31) следует:

$$T_1^{(m)}(\mathbf{x}) = \theta_*^{(m)}(\mathbf{x}) D_3 \theta_0(x_3) + \theta_1(x_3) \quad (T_{*1}^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0) \quad (42)$$

после чего из (40) при $k = 0$ с учетом (41) и (22) имеем

$$\theta_0(0) \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \delta_l \alpha_l^{(m)} dF = 0, \quad \theta_0(1) \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \delta_r \alpha_r^{(m)} dF = 0 \quad (43)$$

а из (38) при $k = 2$ с учетом (37), (25) и $T_{*0}^{(m)} = T_{*1}^{(m)} = 0$ можно определить функцию $\theta_0(x_3)$, постоянные интегрирования которой C_0^* , C_0^{**} вычисляются из (43), где предполагается, что интегралы по площади поперечного сечения не равны нулю. После этого функция $T_0^{(m)}$ в силу (41) будет однозначно определена.

Аналогично, из (40) при $k = 1$ с учетом (41), (42) получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[\beta_l D_3 \theta_0 \left(\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 \theta_*^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 \theta_*^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \right) - \right. \\
& \left. - \delta_l \alpha_l^{(m)} \left(\theta_*^{(m)} D_3 \theta_0 + \theta_1(x_3) \right) \right] dF = 0 \quad (x_3 = 0) \\
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[-\beta_r D_3 \theta_0 \left(\lambda_{31}^{(m)} \partial_1 \theta_*^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} \partial_2 \theta_*^{(m)} + \lambda_{33}^{(m)} \right) - \right. \\
& \left. - \delta_r \alpha_r^{(m)} \left(\theta_*^{(m)} D_3 \theta_0 + \theta_1(x_3) \right) \right] dF = 0 \quad (x_3 = 1, \quad 0 \leq k \leq K)
\end{aligned} \tag{44}$$

Так как функция $\theta_0(x_3)$ однозначно определена, то из (26), (32)–(34) с учетом (25) и $T_{*0}^{(m)} = T_{*1}^{(m)} = 0$ можно определить функцию $T_{*2}^{(m)}(\mathbf{x})$, а затем из (38) при $k = 3$ с учетом (37) – и функцию $\theta_1(x_3)$, постоянные интегрирования которой C_1^* , C_1^{**} вычисляются из (44). После этого функция $T_1^{(m)}$ в силу (42) также будет однозначно определена. Далее по схеме (23)–(40) при $2 \leq k \leq K$ можно однозначно определить и все оставшиеся характеристические функции $T_k^{(m)}$ в разложении (11).

Равенства (43), (44) справедливы при $\delta_l \neq 0$, $\delta_r \neq 0$. Пусть на правом торце стержня задан тепловой поток ($\beta_r = \gamma_r = 1$, $\delta_r = 0$ в (8)), тогда второе равенство (43) выполняется тождественно, а постоянные C_0^* , C_0^{**} можно определить из первого равенства (43) и второго равенства (44), которое при $\delta_r = 0$ не зависит от θ_1 , но в силу (38) содержит постоянную C_0^* . Аналогично, постоянные C_1^* , C_1^{**} определяются из первого интегрального равенства (44) и второго равенства (40) при $k = 2$ с учетом $\delta_r = 0$ и т.д. для остальных постоянных C_k^* , C_k^{**} ($2 \leq k \leq K$). Подобные рассуждения справедливы и в том случае, когда на левом торце задан тепловой поток ($\beta_l = \gamma_l = 0$, $\delta_l = 0$ в (7)), а на правом торце – граничное условие общего вида (8) или задана температура ($\beta_r = \gamma_r = 0$, $\delta_r \alpha_r^{(m)} \equiv 1$).

Отметим, что после подстановки аппроксимаций (11), (12) в граничные условия (7), (8) и интегрирования этих соотношений по площади поперечного сечения с учетом равенств (39) получим приближенное выполнение (в интегральном смысле) граничных условий на торцах стержня:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[-\beta_l q_3^{(m)} - \gamma_l q_l - \delta_l \alpha_l^{(m)} \left(T^{(m)} - T_l^\infty \right) \right] dF = -\varepsilon^{K-2} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \beta_l Q_{3,K}^{(m)} dF, \quad x_3 = 0 \\
& \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left[\beta_r q_3^{(m)} - \gamma_r q_r - \delta_r \alpha_r^{(m)} \left(T^{(m)} - T_r^\infty \right) \right] dF = \varepsilon^{K-2} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \beta_r Q_{3,K}^{(m)} dF, \quad x_3 = 1
\end{aligned} \tag{45}$$

Если на торцевых поверхностях заданы значения температуры ($\beta_l = \beta_r = 0$, $\gamma_l = \gamma_r = 0$, $\delta_l \alpha_l^{(m)} = \delta_r \alpha_r^{(m)} \equiv 1$), то граничные условия (7), (8) в интегральном смысле выполняются точно в силу равенства нулю правых частей в (45).

Так как при задании внешнего разложения (11), (12) с учетом равенств (13), (16)–(18) при любом номере аппроксимации $K \geq 0$ тождественно выполняются уравнение теплопроводности (3), граничное условие (6) и условия сопряжения

решения (5) и только равенства (4) (см. (14)) и граничные условия (7), (8) (в интегральном смысле, см. (45)) выполняются приближенно, то согласно введенному выше определению в первом случае граничных условий, заданных на боковой поверхности ($\beta = \gamma = 1$, $\delta = 0$ в (6)), в силу равенств (14), (45) формулы (11), (12) дают формальное асимптотическое решение полукраевой задачи (3)–(6) с точностью $O(\varepsilon^{K-2})$ и краевой задачи (3)–(8), где граничные условия (7), (8) выполняются в интегральном смысле, – с той же точностью.

Рассмотрим интересный с практической точки зрения случай, когда функции $w^{(m)}$, q_n в (32), (34), (37) суть полиномы порядка $n_w^{(m)}$, n_q по переменной x_3 соответственно, коэффициенты которых являются функциями переменных x_1, x_2 . Обозначим через $n_p = \max(n_w, n_q)$, где $n_w = \max_{1 \leq m \leq M} n_w^{(m)}$. Пусть свойства материалов слоев не зависят от продольной координаты ($\partial_3 \lambda_{ij}^{(m)} = 0$, $1 \leq m \leq M$, $i, j = 1, 2, 3$), тогда из граничной задачи (30), (31) следует $\partial_3 \theta_*^{(m)} = 0$, а из (37) получаем $H_* = \text{const}$. При этом из (37), (38) с учетом (25) при $k = 2$ вытекает, что $\theta_0(x_3)$ – полином порядка не выше $n_p + 2$. Последующий анализ по схеме (32)–(38) с учетом (41), (42) показывает, что функции $T_{*k}^{(m)}(\mathbf{x})$ суть полиномы по переменной x_3 порядка не выше $n_p + 2 - k$ ($2 \leq k \leq K$), коэффициенты которых зависят от переменных x_1, x_2 , а функции $\theta_k(x_3)$ – также полиномы порядка не выше $n_p + 2 - k$ ($0 \leq k \leq K$). Отсюда и из (23), (37), (38) имеем

$$\begin{aligned} T_k^{(m)}(\mathbf{x}) &= T_{*k}^{(m)}(x_1, x_2) + \theta_*^{(m)}(x_1, x_2) C_{k-1}^* / H_* + x_3 C_k^* / H_* + C_k^{**} \quad (k = n_p + 2) \\ T_k^{(m)}(\mathbf{x}) &= \theta_*^{(m)}(x_1, x_2) C_{k-1}^* / H_* + x_3 C_k^* / H_* + C_k^{**} \quad (k \geq n_p + 3) \end{aligned} \quad (46)$$

Если на одном из торцов стержня задан тепловой поток (например, на правом: $\beta_r = \gamma_r = 1$, $\delta_r = 0$), а на другом – граничное условие общего вида (например, на левом: $\delta_l \neq 0$), то из (40) с учетом (46) получаем: $C_k^* = 0$ при $k \geq n_p + 2$, $C_k^{**} = 0$ при $k \geq n_p + 3$, а значит, в силу (14) следует точное выполнение закона Фурье (4) и интегральных равенств (45) при задании аппроксимации (11), (12) порядка $K \geq n_p + 3$. Аналогичный результат получается и при задании температуры на каждом торце стержня ($\beta_l = \gamma_l = \beta_r = \gamma_r = 0$, $\delta_l \alpha_l^{(m)} = \delta_r \alpha_r^{(m)} = 1$ в (7), (8), (40)). В случае же анизотропии специального вида (15) равенства (14) при указанных граничных условиях на торцах в силу (46) выполняются точно уже при $K \geq n_p + 2$.

Случай второй. На боковой поверхности стержня задано граничное условие (6) общего вида. Предполагается, что функция переключения $\delta(\Gamma, x_3) \geq 0$ при любом фиксированном значении $x_3 \in [0, 1]$ на некоторой части контура Γ поперечного сечения может быть равна нулю (но не равна нулю на всем Γ) и хотя бы в одной

точке контура или на его части $\delta(\Gamma, x_3) > 0$ при $x_3 \in [0, 1]$, причем эта точка или участок (участки) могут быть разными при разных x_3 .

Примем для функции $T_*^{(m)}$ в (9) и компонент вектора теплового потока $q_j^{(m)}$ в отличие от (11), (12) следующие правила аппроксимации:

$$T_*^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^K T_k^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k, \quad 1 \leq m \leq M, \quad K \geq 0 \quad (47)$$

$$q_i^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^K Q_{i,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k \quad (i=1, 2), \quad q_3^{(m)}(\mathbf{x}, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{K-1} Q_{3,k}^{(m)}(\mathbf{x}) \varepsilon^k, \quad 1 \leq m \leq M \quad (48)$$

По-прежнему потребуем выполнения равенств (13) между характеристическими функциями $T_k^{(m)}$ и $Q_{j,k}^{(m)}$, тогда после подстановки разложений (47), (48) в закон теплопроводности (4) с учетом (13) получим, что в общем случае анизотропии все соотношения в законе Фурье выполняются приближенно

$$\begin{aligned} q_i^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^{K+1} \lambda_{i3}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)} \quad (i=1, 2) \\ q_3^{(m)} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_*^{(m)} + \varepsilon \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_*^{(m)} &= -\varepsilon^K \sum_{j=1}^2 \lambda_{3j}^{(m)} \partial_j T_K^{(m)} - \\ &- \varepsilon^K \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_{K-1}^{(m)} - \varepsilon^{K+1} \lambda_{33}^{(m)} \partial_3 T_K^{(m)}, \quad 1 \leq m \leq M \end{aligned} \quad (49)$$

Если рассматривается анизотропия специального вида (15), то первые два равенства (49) выполняются точно, а третье равенство – асимптотически с точностью порядка $O(\varepsilon^K)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подставим разложения (47), (48) в равенства (3), (5), (6) и соберем слагаемые при одинаковых степенях ε , учитывая свойства $w^{(m)} = O(1)$, $q_n = O(1)$, $T_\infty = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда из (6) получим цепочку равенств

$$\beta(\mathbf{x}) (Q_{1,k}^{(p)} n_1 + Q_{2,k}^{(p)} n_2) - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_k^{(p)} = \delta_{0k} (\gamma(\mathbf{x}) q_n - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_\infty), \quad \mathbf{x} \in A \quad (50)$$

а из (3), (5) получим равенства (16), (17), в которых следует δ_{2k} заменить на δ_{0k} ($\delta_{00} = 1$, $\delta_{0k} = 0$ при $k \geq 1$).

Подставим теперь в уравнения (16), (17), (50) выражения (13), тогда из (50) следует

$$\begin{aligned} -\beta(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^2 n_i \left(\sum_{j=1}^2 \lambda_{ij}^{(p)} \partial_j T_k^{(p)} + \lambda_{i3}^{(p)} \partial_3 T_{k-1}^{(p)} \right) - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_k^{(p)} &= \\ = \delta_{0k} (\gamma(\mathbf{x}) q_n(\mathbf{x}) - \delta(\mathbf{x}) \alpha^{(p)} T_\infty(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in A, \quad 0 \leq k \leq K \end{aligned} \quad (51)$$

а из (16), (17) вытекают равенства (19), (20), в которых нужно учесть (22) и заменить δ_{2k} на δ_{0k} (далее при ссылках на формулу (19) будем учитывать в ней замену $\delta_{2k} \leftrightarrow \delta_{0k}$).

В силу (22) равенства (19), (20), (51) при каждом $k \geq 0$ образуют двумерную (по переменным x_1, x_2 , так как x_3 выступает в качестве параметра) краевую задачу относительно функции $T_k^{(m)}$ при граничных условиях общего вида. Из

предположения о том, что при каждом $x_3 \in [0, 1]$ функция переключения $\delta(\Gamma, x_3) > 0$ хотя бы в одной точке контура Γ , следует единственность решения рассматриваемой граничной задачи, которая достаточно хорошо изучена [6]. Решая последовательно с увеличением $k \geq 0$ граничные задачи (19), (20), (51) с учетом (22), определим все характеристические функции $T_k^{(m)}$ в разложении (47).

Если характеристические функции удовлетворяют граничным задачам (19), (20), (51) в сечении стержня, то с учетом (47), (48), (16), (17), (22) можно убедиться в том, что для K -й аппроксимации функции температуры $T_*^{(m)}$ (47) и компонент вектора теплового потока $q_j^{(m)}$ (48) уравнение теплопроводности (3), граничные условия (6), условия сопряжения решения (5) выполняются тождественно, а соотношения закона Фурье (4) – приближенно с асимптотической точностью $O(\varepsilon^K)$ (см. (49)). Следовательно, в случае анизотропии общего вида семейство функций (47), (48) обеспечивает точность формального асимптотического решения полукраевой задачи (19), (20), (51) порядка $O(\varepsilon^K)$; в случае же анизотропии специального вида (15) из (19), (20), (51), (22) следует, что в (47) характеристические функции $T_k^{(m)} \equiv 0$ при четных k , поэтому из (49) вытекает точность формального асимптотического решения полукраевой задачи (19), (20), (51) порядка $O(\varepsilon^{K+1})$, где $K \geq 0$ – четное число.

Исследуем важный с практической точки зрения случай, когда функции $w^{(m)}$, q_n , T_∞ в (3), (6) суть полиномы порядка $n_w^{(m)}$, n_q , n_T по переменной x_3 соответственно, коэффициенты которых являются заданными функциями переменных x_1, x_2 . Обозначим через $n_p = \max(n_w, n_q, n_T)$, где $n_w = \max_{1 \leq m \leq M} n_w^{(m)}$. Пусть свойства материалов слоев не зависят от продольной координаты x_3 ($\partial_3 \lambda_{ij}^{(m)} = 0$, $1 \leq m \leq M$, $i, j = 1, 2, 3$), тогда из граничной задачи (19), (20), (51) с учетом (22) следует, что характеристическая функция $T_k^{(m)}(\mathbf{x})$ – полином по переменной x_3 порядка $n_p - k$ ($k \geq 0$), коэффициенты которого зависят от переменных x_1, x_2 . Следовательно, из (49) вытекает точное решение полукраевой задачи (19), (20), (51) при $K \geq n_p + 1$ (здесь $K \geq 0$ – любое натуральное число) в случае анизотропии общего вида и при $K \geq n_p$ (здесь $K \geq 0$ – четное число) в случае анизотропии специального вида (15).

Граничные условия (7), (8) на торцах стержня при использовании разложений (47), (48) могут быть выполнены лишь в исключительных случаях. В общем же случае краевые условия (7), (8) на торцах в континууме точек могут быть выполнены лишь после рассмотрения погранслоев, возникающих вблизи торцов стержня.

Замечание 1. Решения (11), (47), полученные для основного температурного поля в стержне для первого и второго случаев граничных условий на боковой поверхности, качественно обладают теми же свойствами, что и полученные авторами в [4] асимптотические разложения температурного поля в анизотропных пластинах.

Аналогичными свойствами должны были бы обладать и решения для стержней в [3]. Но там для второго случая граничных условий было введено дополнительное предположение, что критерий Био достаточно мал ($H\alpha^{(p)} = A^{(p)}\varepsilon^2$, $A^{(p)} = O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$) и использовано внешнее разложение решения в виде (47), поэтому, в отличие от полученных выше результатов, характеристические функции $T_k^{(m)}$ в [3] обладают двуконстантным произволом, позволяющим удовлетворить в некотором смысле (например, интегрально) граничным условиям на торцах стержня. В [8] авторы исследовали особенности решения задачи теплопроводности анизотропных пластин методом разделения переменных с последующим анализом асимптотических свойств этого решения. Там показано, что при реализации на лицевых поверхностях пластин теплообмена по закону Ньютона (аналог второго случая граничных условий в настоящем исследовании) внешнее разложение решения по малому параметру ε не обладает интегральными произволами, как и в настоящей работе, но при малом значении критерия Био погранслои могут глубоко проникать в анизотропную пластину (и даже могут пронизывать всю область, занимаемую пластиной в плане). Поэтому важным является построение температурных поправок в погранслоях (определение функций $T_l^{(m)}$, $T_r^{(m)}$ в (9)) стержня, однако этот вопрос выходит за рамки настоящего исследования.

Замечание 2. Если во втором случае граничных условий, заданных на боковой поверхности стержня, вместо внешнего разложения (47), (48) использовать (11), (12), то в конечном итоге получим цепочки разрешающих уравнений (19), (20), (51), где следует δ_{0k} заменить на δ_{2k} . Тогда с учетом (22) из граничных задач (19), (20), (51) будем иметь $T_0^{(m)}(\mathbf{x}) = T_1^{(m)}(\mathbf{x}) \equiv 0$, $T_k^{(m)}(\mathbf{x}) \neq 0$ при $2 \leq k \leq K$, т.е. вновь получим разложение вида (47).

Полученные в настоящей работе внешние асимптотические разложения и сделанные на их основе оценки точности представления температуры могут быть использованы при расчетах на прочность и податливость стержневых композитных конструкций, так как используемые на практике приближенные теории деформирования стержней (Бернулли, Тимошенко и др.) дают приемлемую точность лишь на некотором удалении от торцов, т.е. за пределами погранслоев или локальных эффектов, распространяющихся в глубину стержня на расстояние порядка его толщины. Разработанный метод может оказаться эффективным и при исследовании основного напряженного состояния в композитных стержнях методом асимптотического расщепления [5], когда такие конструкции подвергаются термосиловому нагружению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.06, номер проекта 2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. / Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч. 1. – М.: Высш. школа, 1982. 327 с.
2. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. / Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч. 2. – М.: Высш. школа, 1982. 304 с.
3. Зино Е.И., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 224 с.

4. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Уточнение асимптотических разложений решений задачи теплопроводности анизотропных пластин // Математические методы и физико-механические поля. 2005. Т.48. № 2. С. 157 – 171.
5. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. Новосибирск: Наука, 2004. 409 с.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204 с.
7. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
8. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Сравнительный анализ структурных моделей теплопроводности волокнистых сред и сведение трехмерной задачи теплопроводности армированных пластин к двумерной // Конструкции из композитных материалов. 2004. № 3. С.36–51.

Институт теоретической и прикладной механики
СО РАН, г. Новосибирск

Поступила в редакцию
6.09.2007