ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №4, 2007 Механика

УДК 539.3

ВОЗВРАЩЕНИЕ К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: разномодульный материал, статическая устойчивость, стержень.
Keywords: different-modulus material, statical stability, beam.

Լ.Ա. Մովսիսյան, Գ.Գ. Ներսիսյան

Վերադարձ տարամոդալ նյութից ձողի կայունության խնդրին

Ուսումնասիրվում է տարամոդուլ նյութից ձողի կայունությունը, երբ նրա վրա ազդում են երկու կենտրոնացված ուժեր, ծայրերից հավասար հեռավորության վրա: Երկու դեպք է դիտարկված, երբ ուժերն ուղղված են մեկը մյուսի ուղղությամբ, կամ էլ՝ հակառակ ուղղությամբ: Կախված ուժերի հեռավորությունից և նյութի հատկությունից նախնական վիճակի լարվածության մի քանի դեպքեր են հնարավոր: Հետազոտվել է բոլոր դեպքերի համար կայունության խնդիրները, հոդակապային և ամրակցված եզրային պայմանների դեպքերում: Համեմատության համար դիտարկված է նաև մեկ ուժի դեպքը:

L.A. Movsisyan, G.G. Nersisyan

The return to problem of stability for different-modulus material of beam

The stability of beam made from different-modulus material when two concentrated force act on equal distance from it ends is investigated. Two cases are investigated when forces are directed one to another and vice vere. In dependence from property of material and from points of application of force there are obtained rather different stresses states and therefore different statements of problem of stability.

Задачи устойчивости составных стержней или стержней из разномодульного материала имеют характерную особенность. Оказывается, если сосредоточенная сила действует в точке соединения материалов [1] (для разномодульности, в точке раздела интервалов растяжение–сжатие [2,3]), независимо от ее поведения (следящая или нет), статический подход определения критических сил вполне пригоден. В дальнейшем подобные [1-3] задачи были рассмотрены для вязкоупругих стержней [4] и для разномодульно-вязкоупругих стержней при движущей нагрузке [5].

В настоящей работе исследуется устойчивость стержня из разномодульного материала при двух сосредоточенных силах, когда они приложены на одинаковых расстояниях от концов. Рассматриваются два случая, когда силы направлены друг к другу и, наоборот, для двух случаев краевых условий – шарнирное опирание и жесткое защемление. Для сравнения приводится также случай устойчивости при одной силе. В зависимости от точек приложения сил и свойства материала, совершенно различными получаются напряженные состояния и, следовательно, различными получаются постановки и решения задач по устойчивости.

1.Стержень на двух концах закреплен в продольном направлении. На одинаковых расстояниях (b) от концов действуют одинаковые по величине сосредоточенные силы P. Общая длина стержня – $2(a+b)=l$. Рассматриваются два случая.

а) Силы направлены друг к другу (от близкого конца в противоположном направлении). Относительно средней точки стержня имеется симметрия. Тогда в срединной части $(2a)$ стержня будет сжимающая сила

$$P_1 = -P\frac{bE^-}{aE^+ + bE^-} = -P\frac{\alpha\beta}{1+\beta(\alpha-1)} \tag{1.1}$$

а у концов

$$P_2 = P\frac{aE^+}{aE^+ + bE^+} = P\frac{1-\beta}{1+\beta(\alpha-1)} \tag{1.2}$$

здесь E^+ – коэффициент упругости при растяжении, а E^- – при сжатии, $\alpha = E^- / E^+$, $\beta = b/(a+b)$.

в) В случае, когда силы направлены в сторону ближайшего конца, то в сжимающейся части (у концов) будет

$$P_1 = -P\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta+\alpha(1-\beta)} \tag{1.3}$$

а в средней части –

$$P_2 = P\frac{\beta}{\beta+\alpha(1-\beta)} \tag{1.4}$$

2. Уравнения устойчивости в зависимости от того, часть стержня сжатая или растянутая, будут различными. Для первого случая ((1.1), (1.2)) соответствующими уравнениями будут:

$$E^- J\frac{d^4 w_1}{dx^4} - P_1\frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0, \qquad E^+ J\frac{d^4 w_2}{dx^4} + P_2\frac{dw^2}{dx^2} = 0 \tag{2.1}$$

которые в безразмерных величинах превратятся

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} + k_1^2\frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^4 w_2}{d\xi^4} - k_2^2\frac{d^2 w_2}{d\xi^2} = 0 \tag{2.2}$$

здесь

$$k_1^2 = \lambda\frac{\beta\left[\alpha+\beta(1-\alpha)\right]}{4\left[1+\beta\,(\alpha-1)\right]}, \qquad k_2^2 = \lambda\frac{(1-\beta)\left[\beta+\alpha(1-\beta)\right]}{4\left[1+\beta(\alpha-1)\right]}$$

$$\lambda = \frac{4P(a+b)^2}{EJ}, \quad E = \frac{E^+ b + E^- a}{a+b}, \quad \xi = \frac{x}{a+b} \tag{2.3}$$

E – приведенный (осредненный) модуль упругости. Решениями уравнений (2.2) соответственно будут

$$w_1 = c_1\cos k_1\xi + c_2\cos k_1\xi + c_3\xi + c_4$$

$$w_2 = d_1\mathrm{ch}k_2\xi + d_2\mathrm{sh}k_2\xi + d_3\xi + d_4 \tag{2.4}$$

Начало координаты ξ берем в точке приложения силы, тогда независимо от рассматриваемых случаев, общими будут следующие условия:
условия симметрии в срединной точке –

$$w_1' = w_1''' = 0 \text{ при } \xi = 1-\beta \tag{2.5}$$

В точке приложения силы $\xi = 0$ имеем

$$w_1 = w_2\,,\;\; w_1' = w_2';\quad E^- w_1'' = E^+ w_2'' \tag{2.6}$$

а на конце $\xi = -\beta$ единственное неизменное условие

$$w_2 = 0 \text{ при } \xi = -\beta \tag{2.7}$$

Итак, рассмотрим несколько случаев. Если на конце имеется шарнирное условие, то к (2.7) прибавится еще

$$w_2'' = 0 \text{ при } \xi = -\beta \tag{2.8}$$

В точке $\xi = 0$ в качестве четвертого условия изучим случай, когда сила следящая:

$$E^- w_1''' = E^+ w_2''' \text{ при } \xi = 0 \tag{2.9}$$

и когда она «мертвая»:

$$E^-(w_1''' + k_1^2 w_1') = E^+(w_2''' - k_2^2 w_1') \text{ при } \xi = 0 \tag{2.10}$$

Безразмерная критическая сила $\lambda_{кр}$ определится после удовлетворения условий (2.5)-(2.10).

Задача I. Из условий (2.5)-(2.9) $\lambda_{кр}$ определяется из уравнения

$$k_1 \operatorname{tg} k_1 (1-\beta) = k_2 \operatorname{cth} k_2 \beta \tag{2.11}$$

Задача II. Из условий (2.5)-(2.8) и (2.10):

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 (1-\beta) + \alpha k_1 \operatorname{cth} k_2 \beta = 0 \tag{2.12}$$

Если на конце $\xi = -\beta$ имеется условие жесткой заделки, то вместо (2.8) возьмем

$$w_2' = 0 \text{ при } \xi = -\beta \tag{2.13}$$

Задача III. Из условий (2.5)-(2.7), (2.9) и (2.13):

$$\alpha k_1 k_2 \operatorname{sh} k_2 \beta + \operatorname{tg} k_1 (1-\beta)\left[k_2^2 + \alpha k_1^2 (1 - \operatorname{ch} k_2 \beta)\right] = 0 \tag{2.14}$$

Задача !V. Из условий (2.5)-(2.7), (2.10) и (2.13):

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 (1-\beta) + \alpha k_1 \operatorname{th} k_2 \beta = 0 \tag{2.15}$$

3. Если силы направлены к близким концам (случай б), то уравнения устойчивости согласно (1.3) и (1.4) будут

$$\frac{d^4 w_1}{d\xi^4} - k_3^2 \frac{d^2 w_1}{d\xi^2} = 0\,,\quad \frac{d^4 w_2}{d\xi^4} + k_4^2 \frac{d^2 w_2}{d\xi^2} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь

$$k_3^2 = \lambda \frac{\beta\left[1 + \beta(\alpha - 1)\right]}{4\left[\beta + \alpha(1-\beta)\right]}\;,\quad k_4^2 = \lambda \frac{(1-\beta)\left[1 + \beta(\alpha - 1)\right]}{4\left[\beta + \alpha(1-\beta)\right]} \tag{3.2}$$

Выражение λ сохраняет вид (2.3), но уже для выражения приведенного коэффициента E должны брать

$$E = \frac{aE^+ + bE^-}{a+b} \tag{3.3}$$

Здесь изучим только случай шарнирного опирания –

$$w_2 = w_2'' = 0 \text{ при } \xi = -\beta \tag{3.4}$$

Задача V. Наряду с условиями (2.5), первыми двумя условиями (2.6) и (3.3) должны быть удовлетворены еще следующие:

$$E^+ w_1'' = E^- w_2'' \quad \text{и} \quad E^+ w_1''' = E^- w_2''' \tag{3.5}$$

Тогда уравнение для определения $\lambda_{кр}$ будет

$$k_4 \mathrm{ctg} k_4 \beta + k_3 \mathrm{th} k_3 \left(1-\beta\right) = 0 \tag{3.6}$$

Задача VI. Все перечисленные условия в задаче V, кроме последнего в (3.5). Вместо него возьмем

$$E^+ \left(w_1''' - k_3^2 w_1'\right) = E^- \left(w_2''' + k_4^2 w_2'\right) \tag{3.7}$$

тогда имеем

$$k_3 \mathrm{ctg} k_4 \beta = \alpha k_4 \mathrm{th} k_3 \left(1-\beta\right) \tag{3.8}$$

4. Для сравнения с предыдущими задачами рассмотрен также случай, когда сила одна.

Тогда в сжатой части стержня сила будет

$$P_1 = -P \frac{\alpha\beta}{2+\beta(\alpha-1)} \tag{4.1}$$

а в растянутой –

$$P_1 = P \frac{2-\beta}{2+\beta(\alpha-1)} \tag{4.2}$$

Решая уравнения типа (2.2) и удовлетворяя условиям на концах –

$$w_2 = w_1'' = 0 \text{ при } \xi = -\beta$$
$$w_1 = w_1'' = 0 \text{ при } \xi = 2-\beta \tag{4.3}$$

для случая „мертвой»« силы получим (задача VII)

$$k_5 \mathrm{ctg} k_5 \left(2-\beta\right) + k_6 \mathrm{cth} k_6 \beta = 0 \tag{4.4}$$

где

$$k_5^2 = \lambda\beta k \ , \qquad k_6^2 = \lambda(2-\beta)k$$
$$k = \frac{1}{4}\frac{\beta+\alpha(2-\beta)}{2+\beta(\alpha-1)} \tag{4.5}$$

Здесь параметр λ имеет вид (2.3), но только E будет:

$$E = \frac{E^+ b + E^-(2a+b)}{2(a+b)}$$

Для случая следящей силы (задача VIII) соответствующее уравнение будет

$$\begin{gathered} k_5 k_6 \left[\alpha\beta k_5^3 - (2-\beta) k_6^3\right]\left[\alpha k_5 \mathrm{cth} k_6 \beta - k_6 \mathrm{ctg} k_5 \left(2-\beta\right)\right] - \\ -\left(\alpha k_5^2 + k_6^2\right)\left(\alpha\beta k_5^3 + k_6^3\right) = 0 \end{gathered} \tag{4.6}$$

Из (4.5) и (4.6), в частности, получатся результаты [3] (стр.120).

5. Для всех рассмотренных задач найдены первые критические параметры (безразмерная критическая сила) для различных α и β.

$$\alpha = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 1;\ 2{,}5\ ;\ 5$$

$$\beta = 0{,}1\ ;\ 0{,}2;....,\ 0{,}9$$

Случай $\alpha = 1$ соответствует однородному материалу. Номера таблиц соответствуют номерам задач.

Таблица 1

α	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0

λ.					
0,1	329,24	173,08	100,20	49,037	30,497
0,2	121,98	78,418	52,278	30,892	22,405
0,3	64,475	48,813	37.328	26.402	21,611
0,4	40,334	35,250	30,844	25,974	23,586
0,5	28,128	28,128	28,128	28,128	28,128
0,6	21,385	24,470	27,965	33,209	36.570
0,7	17,729	23,417	30,623	43,294	52,894
0,8	16,558	25,757	38,635	65,383	90,149
0,9	20,149	38,329	66,205	135,28	217.53,00

Таблица 2

0,1	1514,4	728,82	361,76	118.78	53,94
0,2	670,28	385,69	214,01	84,045	46,068
0,3	424,77	280,97	173,89	81,774	52,148
0,4	321,98	239,38	165,18	93,261	67,848
0,5	277,18	228,83	176,27	120,08	98,791
0,6	268,14	244,67	211,23	174,99	162,71
0,7	297,52	300,75	293,25	298,99	316,77
0,8	408,40	462,60	517,25	661,13	813,64
0,9	915,22	1199,1	1591,8	2635,0	3915,0

Таблица 3

0,1	1519,6	740,79	382,48	144,34	63,508
0,2	624,53	334,54	178,27	73,528	41,567
0,3	346,23	194,57	111,85	55,175	36,784
0,4	211,69	126,29	81,919	49,980	38,635
0,5	135,29	89,142	67,174	51,266	45,358
0,6	90,075	68,266	60,874	56,356	58,757
0,7	63,233	57,452	61,463	74,214	85,246
0,8	48,361	55,539	72,184	110,21	146,29
0,9	46,046	72,528	116,04	225,51	356,28

Таблица 4

0,1	1549,2	775,36	414,61	164,92	80,718
0,2	678,69	399,89	232,59	101,21	56,229
0,3	427,60	286,87	182,85	90,831	57,834
0,4	323,04	242,11	170,02	98,737	71,539
0,5	277,58	230,12	178,98	123,56	101,32
0,6	268,28	245,26	212,70	177,16	164,44
0,7	297,56	300,98	293,96	300,20	317,84
0,8	408,41	462,66	517,48	661,62	814,12
0,9	915,22	1199,1	1591,8	2635,1	3915,1

Таблица 5

0,1	484,48	921,60	1591,8	3252,9	5230,4
0,2	221,67	344,83	517,25	875,34	1206,9
0,3	169,78	224,25	293,25	414,60	506,53
0,4	161,53	184,82	211,23	250,83	276,22
0,5	176,27	176,27	176,27	176,27	176,27
0,6	216,00	188,77	165,18	139,09	126,31
0,7	300,37	227,40	173,89	123,00	100,67
0,8	499,35	321,01	214,00	126,46	91,71
0,9	1188,6	624,86	361,76	177,03	110,10

Таблица 6

0,1	144,11	96,291	66,205	45,479	34,442
0,2	76,632	56,392	38,635	23,277	15,317
0,3	60,710	45,492	30,623	16,437	9,742
0,4	57,819	42,697	27,965	13,563	7,398
0,5	62,337	44,458	28,128	12,496	6,361
0,6	74,992	50,754	30,844	12,736	6,112
0,7	102,03	64,239	37,328	14,578	6,660
0,8	165,63	94,432	52,278	19,761	8,725
0,9	384,46	190,43	100,20	37,932	16,79

Таблица 7

0,1	400,31	185,85	100,07	44,364	25,019
0,2	170,29	89,520	51,827	25,362	15,774
0,3	99,978	58,485	36,355	19,576	13,220
0,4	67,840	43,612	29,074	17,180	12,460
0,5	50,214	35,150	25,107	16,246	12,553
0,6	39,481	29,890	22,857	16,167	13,233
0,7	32,505	26,486	21,670	16,733	14,447
0,8	27,793	24,289	21,253	17,897	16,252
0,9	24,559	22,971	21,489	19,723	18,803

Таблица 8

0,1	870,65	388,08	195,75	73,937	35,821
0,2	395,40	197,45	105,58	43,343	23,332
0,3	245,38	134,90	76,433	34,160	20,137
0,4	174,78	104,40	62,621	30,484	19,456
0,5	135,07	86,763	55,016	29,148	19,942
0,6	110,37	75,574	50,550	29,061	21,044
0,7	94,042	68,052	47,823	29,582	21,899
0,8	82,754	62,698	45,913	29,744	19,286
0,9	74,752	58,400	43,732	27,276	13,638

Из приведенных таблиц можно сделать ряд выводов.

1. То, что критические значения λ при случае защемленных концов балки должны быть больше, чем при шарнирном опирании, очевидно, однако, если в задаче Эйлера это отношение равно четырем, то здесь различные в зависимости от α и β и наименьшее его значение имеет порядок около двух.

2. Почти для всех α (для задач I-VI) с увеличением β значение критической силы уменьшается, а потом возрастает, т.е. имеется определенный β, при котором она минимальная.
3. При воздействии одной силы (п.4) критическая сила больше, чем при воздействии двух сил для случая, когда она „мертвая»« и меньше, когда следящая.
4. Для случаев, когда силы направлены друг к другу, значения критических сил, как правило, больше, когда силы действуют „мертвым»« образом, чем при следящей. А вот для случая, когда силы направлены к концам, имеется совершенно обратная картина.

Можно, конечно, сделать еще ряд выводов, но оставим их для читателей, конечно, если они найдутся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lee Q.E., Reissner E. Note on a Problem Beam Bukling. //J.Applied Mech. and Physics (ZAMP). 1975. V.26. P. 839-843.
2. Исабекян Н.Г. Об одной задаче устойчивости стержня, изготовленного из разномодульного материала. Механика. /Межвузовский сб. научных трудов. Ереван. 1988. Вып.4. С.97-101.
3. Амбарцумян С.А. Сопротивление материалов, разносопротивляю-щихся растяжению и сжатию. Ереван: Изд-во РАУ. 2004. 187 с.
4. Мовсисян Л.А. К упругой и вязкоупругой устойчивости составного стержня. // Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т.44. ¹4. С.3-12.
5. Мовсисян Л.А. Об устойчивости вязкоупругого разномодульного стержня при движущейся нагрузке. // Изв. РАН. МТТ. 1994. ¹4. С.171-175.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.05.2006