ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №4, 2007 Механика

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Геворкян Р.С.

Ключевые слова: асимптотический метод, связанные краевые задачи, термоупругость, динамические задачи для пластин.
Keywords: asymptotic method, coupled boundary problems, termoelastisity, dynamic problems for plates.

Ռ.Ս. Գևորգյան

Իզոտրոպ սալի ջերմաառաձգականության խնդրի լուծման մասին

Կինեմատիկական և խառը եզրային պայմաններով սալերի և թաղանթներիհամար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկական եղանակով լուծելն արդյունավետ էր [1-3]: Ասիմպտոտիկական մեթոդը կիրառվում է սալերի ջերմաառաձգականության տեսության դինամիկ կապակցված խնդիրների լուծման համար, լարումների թենզորի և տեղափոխման վեկտորի բոլոր բաղադրիչները նախապես ներկայացնելով Ֆուրյեի ձևափոխության իրենց պատկերների միջոցով:

R.S. Gevorgyan

On Asymptotic Solution of Thermoelastic Problem for Isotropic Plates

The asymptotic method of the solution of boundary value problem of elasticity theory is effective for anisotropic plates and shells with the kinematical and mixed boundary conditions [1-3]. In this work the asymptotic method is applied for the solution of connected dynamic problems of thermoelasticity for plates, at first represented all components of stress tensors and transfer vector with its Fourier transformation images.

Асимптотический метод решения краевых задач теории упругости оказался эффективным для анизотропных пластин и оболочек с кинематическими и смешанными граничными условиями [1-3]. В работе асимптотический метод применяется для решения связанных динамических задач термоупругости для пластин, предварительно представив все компоненты тензора напряжений и вектора перемещения их образами преобразования Фурье.

1. Имеем пластину в прямоугольной системе координат занимающую область $\Omega_* = \left\{x, y, z:\ -a \le x \le a, -b \le y \le b,\ -h \le z \le h,\ h << l = \min\left\{a, b\right\}\right\}$.

На поверхности $z = -h$ пластины (фиг.1) заданы компоненты вектора перемещения и изменение температуры, действие которого учитывается по модели Дюгамеля-Неймана (Duhamel-Neumann).

$$u_j\left(x, y, -h, t\right) = u_j^-\left(x, y, t\right), \qquad j = x, y, z$$
$$\theta\left(x, y, -h, t\right) = \theta^-\left(x, y, t\right) \tag{1.1}$$
$$\theta = T - T_0$$

а на противоположной поверхности $z = h$ задана температурная функция

$$\theta\left(x, y, +h, t\right) = \theta^+\left(x, y, t\right) \tag{1.2}$$

вместе с компонентами вектора перемещения

$$u_j\left(x, y, +h, t\right) = u_j^+\left(x, y, t\right), \qquad j = x, y, z \tag{1.3}$$

или напряжениями

$$\sigma_{jz}\left(x,y,h,t\right)=\sigma_{jz}{}^{+}\left(x,y,t\right),\qquad j=x,y,z \tag{1.4}$$

или с одной из комбинаций следующих смешанных условий:

$$\begin{aligned} &u_z\left(x,y,h,t\right)=u_z{}^{+}\left(x,y,t\right),\\ &\sigma_{jz}\left(x,y,h,t\right)=\sigma_{jz}{}^{+}\left(x,y,t\right),\qquad j=x,y \end{aligned} \tag{1.5}$$

либо

$$\begin{aligned} &u_j\left(x,y,h,t\right)=u_j{}^{+}\left(x,y,t\right),\qquad j=x,y\\ &\sigma_{zz}\left(x,y,h,t\right)=\sigma_{zz}{}^{+}\left(x,y,t\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины и изменение ее температурного поля, предполагая процесс установившимся, поскольку не заданы начальные условия. Не заданы также граничные условия на торцах $x=\pm a,\ y=\pm b$ пластины, поскольку решается внутренняя задача.

Для решения поставленной задачи необходимо найти решение системы уравнений [4]

$$\begin{aligned} &G\nabla^2\vec{u}+\frac{G}{1-2\nu}\mathrm{graddiv}\vec{u}+\vec{X}=\gamma^*\mathrm{grad}\theta+\rho\ddot{\vec{u}}\\ &\nabla^2\theta-\left(\frac{1}{\chi}\right)\dot{\theta}-\eta^*\mathrm{div}\dot{\vec{u}}=-\frac{P}{\chi} \end{aligned} \tag{1.7}$$

удовлетворяющее граничным условиям (1.1), (1.2) и одной из комбинаций условий (1.3)-(1.6).

Перепишем систему (1.7) в координатной форме

$$\begin{aligned} &G\nabla^2u_x+\frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\Delta+X=\gamma^*\frac{\partial\theta}{\partial x}+\rho\ddot{u}_x \qquad \left(x,y,z,X,Y,Z\right)\\ &\nabla^2\theta-\frac{1}{\chi}\dot{\theta}-\eta^*\frac{\partial}{\partial t}\Delta=-\frac{P}{\chi}\\ &\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \Delta=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.8}$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность, $\chi=\lambda^*/c_\varepsilon$ – коэффициент температуропроводности, λ^* – коэффициент теплопроводности, $\gamma^*=\dfrac{2\alpha^*G\left(1+\nu\right)}{1-2\nu}$, α^* – коэффициент линейного расширения, $P=\dfrac{W^*}{\lambda^*}$, W^* – удельная плотность источника теплоты, $\eta^*=\gamma^*\dfrac{T_0}{\lambda^*}$, T_0 – начальная абсолютная температура, c_ε – удельная теплоемкость при постоянной деформации, X,Y,Z – компоненты объемных сил.

Перепишем также связь между компонентами тензора напряжений, вектора перемещения и изменения температуры в виде закона Дюгамеля- Неймана [4]:

$$\sigma_{xx} = 2G\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{2\nu G}{1-2\nu}\Delta - \gamma^*\theta \qquad (x,y,z)$$

$$\sigma_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \qquad (x,y,z) \tag{1.9}$$

Пусть в граничных условиях (1.1)-(1.6) и в уравнениях (1.8) заданные функции имеют соответственно вид:

$$U(x,y,\pm h,t) = U^{\pm}(x,y)\sin\omega t, \quad U = \{u_j, \sigma_{jz}\}, \quad j = x,y,z \tag{1.10}$$

$$X(x,y,z,t) = X_1(x,y,z)\sin\omega t, \quad (X,Y,Z,P) \tag{1.11}$$

Тогда целесообразно представить все неизвестные величины соотношений (1.8),(1.9): компоненты вектора перемещения, тензора напряжений, а также функцию изменения температурного поля в виде:

$$Q(x,y,z,t) = Q_1(x,y,z)\sin\omega t + Q_2(x,y,z)\cos\omega t \quad (Q,\theta) \tag{1.12}$$

Подставив (1.11) - (1.12) в (1.8), получаем

$$G\nabla^2 u_{xk} + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\Delta_k + X_k = \gamma^*\frac{\partial\theta_k}{\partial x} - \omega^2\rho u_{xk} \qquad (x,y,z) \quad k=1,2$$

$$\nabla^2\theta_1 + \frac{\omega}{\chi}\theta_2 + \omega\eta^*\Delta_2 = -\frac{P_1^*}{\chi} \tag{1.13}$$

$$\nabla^2\theta_2 - \frac{\omega}{\chi}\theta_1 - \omega\eta^*\Delta_1 = 0$$

В системе уравнений (1.13) перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1}\frac{z}{l}, \quad \varepsilon = \frac{h}{l}$$

$$u_k = \frac{u_{xk}}{l}, \quad v_k = \frac{u_{yk}}{l}, \quad w_k = \frac{u_{zk}}{l}, \quad k=1,2 \tag{1.14}$$

В результате получаем

$$G\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial\zeta^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial\xi\partial\zeta}\right) + lX_k =$$

$$= \gamma^*\frac{\partial\theta_k}{\partial\xi} - \varepsilon^{-2}\omega^2\rho h^2 u_k$$

$$(\xi,\eta;\ u_k, v_k;\ X_k, Y_k) \qquad X_2 = Y_2 = 0 \qquad (k=1,2)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial\zeta^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial\xi\partial\zeta} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial\eta\partial\zeta} + \varepsilon^{-1}\frac{\partial^2 w_k}{\partial\zeta^2}\right) +$$

$$+ lZ_1 = \gamma^*\varepsilon^{-1}\frac{\partial\theta_k}{\partial\zeta} - \omega^2\rho h^2\varepsilon^{-2}w_k \qquad (k=1,2) \tag{1.15}$$

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\eta^2}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial\zeta^2}+\frac{\omega h^2}{\chi}\varepsilon^{-2}\theta_2+\omega\eta^*\varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+\frac{\partial v_2}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial w_2}{\partial\zeta}\right)=-l\frac{P_1^*}{\chi}$$

$$\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\eta^2}+\varepsilon^{-2}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial\zeta^2}-\frac{\omega h^2}{\chi}\varepsilon^{-2}\theta_1-\omega\eta^* h^2\varepsilon^{-2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi}+\frac{\partial v_1}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial w_1}{\partial\zeta}\right)=0$$

Система уравнений (1.15) сингулярно возмущена геометрическим малым параметром ε. Ее решение складывается из решений внутренней задачи и задачи пограничного слоя. Доказано [1-3, 5, 6], что решение внутренней задачи доминирует во внутренних точках пластины, начиная с расстояния $(1{,}5\div 2)h$ от ее боковой поверхности. Ближе к боковой поверхности к решению внутренней задачи налагается согласованное с ним решение задачи пограничного слоя, которое экспоненциально быстро затухает по мере удаления от боковой поверхности.

Решение внутренней задачи ищется в виде асимптотического разложения:

$$Q_k(x,y,z)=\sum_{s=0}^{S}\varepsilon^{\chi_Q}Q_k^{(s)}(\xi,\,\eta,\,\zeta)\qquad k=1,\,2 \tag{1.16}$$

где Q_k – любая из неизвестных компонентов вектора перемещения u_j, тензора напряжений σ_{ij} и изменение температуры θ, χ_Q – асимптотический порядок соответствующей величины, который для всех перемещений $\chi_u=0$, для всех напряжений $\chi_\sigma=-1$, а для температурной функции $\chi_\theta=-1$ [1-3].

Такие асимптотические порядки впервые введены в [1] для краевых задач полос и пластин с аналогичными (1.1)-(1.6) кинематическими и смешанными граничными условиями.

Представим заданные объемные силы и источник тепла в виде асимптотических разложений

$$X_1(x,y,z)=\sum_{s=0}^{S}l^{-1}\varepsilon^{s-2}X_1^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)\qquad (X,Y,Z)$$
$$P_1^*(x,y,z)=\sum_{s=0}^{S}l^{-2}\varepsilon^{s-3}P_1^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \tag{1.17}$$

Это означает, что объемные силы и источник тепла могут влиять на напряженно-деформированное состояние, начиная с первого шага итерационного процесса, если их асимптотические порядки будут, соответственно, ε^{-2} и ε^{-3}.

Подставив (1.16), (1.17) в (1.14) и приравняв коэффициенты при $\varepsilon^s\ (s=0,1,2,\ldots,S)$ в левых и правых частях уравнений, получим непротиворечивую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.16), что свидетельствует о правильности выбранной асимптотики.

В результате получается система разрешающих уравнений в виде:

$$\frac{\partial^2 u_k^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\omega^2\rho h^2}{G}u_k^{(s)}=R_{uk}^{(s)}\qquad (u_k,v_k)\qquad k=1,2 \tag{1.18}$$

$$R_{uk}^{(s)}=-\frac{1}{G}X_k^{(s)}+\frac{\gamma^*}{G}\frac{\partial\theta_k^{(s-1)}}{\partial\xi}-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 w_k^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial^2 u_k^{(s-2)}}{\partial\eta^2}-\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 v_k^{(s-2)}}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$(\xi,\eta;\ u_k,v_k;\ X_k,Y_k)\qquad k=1,2\qquad X_2^{(s)}=Y_2^{(s)}=0.$$

$$\frac{\partial^2 w_k^{(s)}}{\partial \xi^2} + \omega^2 \rho h^2 \frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} w_k^{(s)} = \beta^* \frac{\partial \theta_k^{(s)}}{\partial \zeta} + R_{wk}^{(s)} \qquad k = 1,2$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\omega h^2}{\chi} \theta_2^{(s)} + \omega \eta^* h^2 \frac{\partial w_2^{(s)}}{\partial \zeta} = R_{\theta 1}^{(s)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2^{(s)}}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega h^2}{\chi} \theta_1^{(s)} - \omega \eta^* h^2 \frac{\partial w_1^{(s)}}{\partial \zeta} = R_{\theta 2}^{(s)}, \qquad \beta^* = \alpha^* \frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$$R_{wk}^{(s)} = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)} Z_k^{(s)} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_k^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v_k^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right) -$$

$$- \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 w_k^{(s-2)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w_k^{(s-2)}}{\partial \eta^2} \right) \quad k = 1,2 \tag{1.19}$$

$$R_{\theta 1}^{(s)} = -\frac{1}{\chi} P_1^{(s)} - \omega \eta^* h^2 \left(\frac{\partial u_2^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 \theta_1^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta_1^{(s-2)}}{\partial \eta^2}$$

$$R_{\theta 2}^{(s)} = \omega \eta^* h^2 \left(\frac{\partial u_1^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{(s-1)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial^2 \theta_2^{(s-2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta_1^{(s-2)}}{\partial \eta^2}.$$

а компоненты тензора напряжений (1.9), с учетом (1.12), (1.14), принимают вид:

$$\sigma_{xxk}^{(s)} = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \frac{\partial w_k^{(s)}}{\partial \zeta} - \gamma^* \theta_k^{(s)} + R_{xxk}^{(s)} \qquad (x, y)$$

$$R_{xxk}^{(s)} = \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \frac{\partial u_k^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{2\nu G}{1-2\nu} \frac{\partial v_k^{(s-1)}}{\partial \eta} \qquad (x, y;\ \xi, \eta;\ u, v)$$

$$\sigma_{xyk}^{(s)} = G \left(\frac{\partial u_k^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v_k^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) \tag{1.20}$$

$$\sigma_{zzk}^{(s)} = \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu} \frac{\partial w_k^{(s)}}{\partial \zeta} - \gamma^* \theta_k^{(s)} + R_{zzk}^{(s)}$$

$$R_{zzk}^{(s)} = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_k^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_k^{(s-1)}}{\partial \eta} \right)$$

$$\sigma_{xzk}^{(s)} = G \left(\frac{\partial u_k^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k^{(s-1)}}{\partial \xi} \right), \qquad \sigma_{yzk}^{(s)} = G \left(\frac{\partial v_k^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_k^{(s-1)}}{\partial \eta} \right), \qquad k = 1,2$$

Таким образом, необходимо найти решение системы уравнений (1.18), (1.19), удовлетворяющее одной из комбинаций граничных условий (1.1)-(1.6) с учетом (1.12).

2. Система уравнений (1.18) состоит из четырех уравнений, которые независимы друг от друга в первом приближении, т. е. они могут быть связаны только после первого шага итерации. Назовем их квазисвязанными уравнениями. Их общие решения имеют вид:

$$u_k^{(s)} = M_{uk}^{(s)} \sin\gamma\zeta + N_{uk}^{(s)} \cos\gamma\zeta + J_{uk}^{(s)}(\zeta)$$

$$J_{uk}^{(s)} = \frac{1}{\gamma}\int_0^\zeta R_{uk}^{(s)}(\tau)\sin\gamma(\zeta-\tau)\,d\tau, \quad \gamma = \omega h\sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (u,v) \quad k=1,2 \tag{2.1}$$

Система (1.19) состоит из четырех уравнений, связанных с первого шага итерации. Ее решение имеет вид:

$$\begin{aligned}
w_1^{(s)} = {} & A_1^{(s)}\mathrm{sh}\alpha_1\zeta\sin\beta_1\zeta + B_1^{(s)}\mathrm{sh}\alpha_1\zeta\cos\beta_1\zeta + C_1^{(s)}\mathrm{ch}\alpha_1\zeta\sin\beta_1\zeta + \\
& + D_1^{(s)}\mathrm{sh}\alpha_1\zeta\cos\beta_1\zeta - \left(A_2^{(s)}\varphi_2 + D_2^{(s)}\psi_2\right)\mathrm{sh}\alpha_2\zeta\sin\beta_2\zeta - \\
& - \left(B_2^{(s)}\varphi_2 - C_2^{(s)}\psi_2\right)\mathrm{sh}\alpha_2\zeta\cos\beta_2\zeta - \left(B_2^{(s)}\psi_2 + C_2^{(s)}\varphi_2\right)\mathrm{ch}\alpha_2\zeta\sin\beta_2\zeta + \\
& + \left(A_2^{(s)}\psi_2 - D_2^{(s)}\varphi_2\right)\mathrm{ch}\alpha_2\zeta\cos\beta_2\zeta + J_{w1}^{(s)}(\zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2^{(s)} = {} & \left(A_1^{(s)}\varphi_1 + D_1^{(s)}\psi_1\right)\mathrm{sh}\alpha_1\zeta\sin\beta_1\zeta + \left(B_1^{(s)}\varphi_1 - C_1^{(s)}\psi_1\right)\mathrm{sh}\alpha_1\zeta\cos\beta_1\zeta + \\
& + \left(B_1^{(s)}\psi_1 + C_1^{(s)}\varphi_1\right)\mathrm{ch}\alpha_1\zeta\sin\beta_1\zeta + \left(D_1^{(s)}\varphi_1 - A_1^{(s)}\psi_1\right)\mathrm{ch}\alpha_1\zeta\cos\beta_1\zeta + \\
& + A_2^{(s)}\mathrm{sh}\alpha_2\zeta\sin\beta_2\zeta + B_2^{(s)}\mathrm{sh}\alpha_2\zeta\cos\beta_2\zeta + C_2^{(s)}\mathrm{ch}\alpha_2\zeta\sin\beta_2\zeta + \\
& + D_2^{(s)}\mathrm{ch}\alpha_2\zeta\cos\beta_2\zeta + J_{w2}^{(s)}(\zeta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1^{(s)} = {} & \frac{A_1^{(s)}}{\beta^*}E_1(\zeta) + \frac{B_1^{(s)}}{\beta^*}L_1(\zeta) + \frac{C_1^{(s)}}{\beta^*}P_1(\zeta) + \frac{D_1^{(s)}}{\beta^*}K_1(\zeta) - \\
& - \frac{1}{\beta^*}\left(A_2^{(s)}\varphi_2 + D_2^{(s)}\psi_2\right)E_2(\zeta) - \frac{1}{\beta^*}\left(B_2^{(s)}\varphi_2 - C_2^{(s)}\psi_2\right)L_2(\zeta) - \\
& - \frac{1}{\beta^*}\left(B_2^{(s)}\psi_2 + C_2^{(s)}\varphi_2\right)P_2(\zeta) + \frac{1}{\beta^*}\left(A_2^{(s)}\psi_2 - D_2^{(s)}\varphi_2\right)K_2(\zeta) + J_{\theta1}^{(s)}(\zeta)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\theta_2^{(s)} = {} & \frac{1}{\beta^*}\left(A_1^{(s)}\varphi_1 + D_1^{(s)}\psi_1\right)E_1(\zeta) + \frac{1}{\beta^*}\left(B_1^{(s)}\varphi_1 - C_1^{(s)}\psi_1\right)L_1(\zeta) + \\
& + \frac{1}{\beta^*}\left(B_1^{(s)}\psi_1 + C_1^{(s)}\varphi_1\right)P_1(\zeta) + \frac{1}{\beta^*}\left(D_1^{(s)}\varphi_1 - A_1^{(s)}\psi_1\right)K_1(\zeta) + \\
& + \frac{A_2^{(s)}}{\beta^*}E_2(\zeta) + \frac{B_2^{(s)}}{\beta^*}L_2(\zeta) + \frac{C_2^{(s)}}{\beta^*}P_2(\zeta) + \frac{D_2^{(s)}}{\beta^*}K_2(\zeta) + J_{\theta2}^{(s)}(\zeta)
\end{aligned}$$

$$E_k(\zeta) = \alpha_k\left(1 + \frac{p}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)\mathrm{ch}\alpha_k\zeta\sin\beta_k\zeta + \beta_k\left(1 - \frac{p}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)\mathrm{sh}\alpha_k\zeta\cos\beta_k\zeta$$

$$L_k(\zeta) = \alpha_k\left(1 + \frac{p}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)\mathrm{ch}\alpha_k\zeta\cos\beta_k\zeta - \beta_k\left(1 - \frac{p}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)\mathrm{sh}\alpha_k\zeta\sin\beta_k\zeta$$

$$P_k(\zeta) = \alpha_k\left(1 + \frac{p}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)\mathrm{sh}\alpha_k\zeta\sin\beta_k\zeta + \beta_k\left(1 - \frac{p}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}\right)\mathrm{ch}\alpha_k\zeta\cos\beta_k\zeta$$

$$K_k(\zeta)=\alpha_k\left(1+\frac{p}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)\operatorname{sh}\alpha_k\zeta\cos\beta_k\zeta-\beta_k\left(1-\frac{p}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)\operatorname{ch}\alpha_k\zeta\sin\beta_k\zeta$$

$$\varphi_k(\alpha_k,\beta_k)=\frac{1}{\Delta_k}\left[\alpha_k^2\left(c+\frac{pq}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)\left(\alpha_k^2-3\beta_k^2+p\right)-\left(c-\frac{pq}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)\left(3\alpha_k^2-\beta_k^2+p\right)\right]$$

$$\psi_k(\alpha_k,\beta_k)=\frac{\alpha_k\beta_k}{\Delta_k}\left[\left(c+\frac{pq}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)\left(3\alpha_k^2-\beta_k^2+p\right)-\left(c-\frac{pq}{\alpha_k^2+\beta_k^2}\right)\left(\alpha_k^2-3\beta_k^2+p\right)\right]$$

$$\Delta_k=\alpha_k^2\left(\alpha_k^2-3\beta_k^2+p\right)^2+\beta_k^2\left(3\alpha_k^2-\beta_k^2+p\right)^2>0\qquad(k=1,2)$$

$J_{wk}^{(s)}(\zeta)$, $J_{\theta k}^{(s)}(\zeta)$ $k=1,2$ – частные решения системы связанных неоднородных (с правой частью) уравнений (1.9), а $\lambda=\pm(\alpha_k\pm i\beta_k)$, $k=1,2$ – решения характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}\lambda^2+p & \lambda^2+p & -\beta^*\lambda & -\beta^*\lambda\\ -r\lambda & 0 & -q & \lambda^2\\ 0 & r\lambda & \lambda^2 & q\\ 0 & \lambda^2+p & 0 & -\beta^*\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$p=\gamma^2\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)},\quad q=\frac{\omega h^2}{\chi},\quad r=\omega\eta^*h^2,\quad \beta^*=\alpha^*\frac{1+\nu}{1-\nu}$$

$$c=q+r\beta \tag{2.3}$$

$$\alpha_k=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\left(p+(-1)^k f\right)^2+\left(c+(-1)^k\varphi\right)^2}-\left(p+(-1)^k f\right)^2}$$

$$\beta_k=\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{\left(p+(-1)^k f\right)^2+\left(c+(-1)^k\varphi\right)^2}+\left(p+(-1)^k f\right)^2}$$

$$f=\sqrt{\frac{\sqrt{\left(p^2+c^2\right)^2+16p^2q(q-c)}+\left(p^2-c^2\right)}{2}}$$

$$\varphi=\operatorname{sgn}(c-2q)\sqrt{\frac{\sqrt{\left(p^2+c\right)^2+16p^2q(q-c)}-\left(p^2-c^2\right)}{2}}\qquad(k=1,2)$$

Общие решения (2.1), (2.2) содержат 16 функций интегрирования $M_{uk}^{(s)}$, $N_{uk}^{(s)}$ (u,v) и $A_k^{(s)}$, $B_k^{(s)}$, $C_k^{(s)}$, $D_k^{(s)}$ $(k=1,2)$, которые однозначно определяются из граничных условий с учетом преобразований (1.10).

Удовлетворив граничным условиям (1.1) (1.3), получаем восемь функций интегрирования

$$M_{uk}^{(s)}=\frac{1}{2\sin\gamma}\left(u_k^{+(s)}-u_k^{-(s)}-J_{uk}^{(s)}(\zeta=1)+J_{uk}^{(s)}(\zeta=-1)\right)$$

$$N_{uk}^{(s)}=\frac{1}{2\cos\gamma}\left(u_k^{+(s)}+u_k^{-(s)}+J_{uk}^{(s)}(\zeta=1)-J_{uk}^{(s)}(\zeta=-1)\right) \tag{2.4}$$

$$(u,v),\quad k=1,2\quad u_2^{\pm(s)}=v_2^{\pm(s)}=0$$

$$u_1^{\pm(0)}=\frac{u_x^{\pm}}{l},\quad u_k^{\pm(s)}=0\quad s>0\quad (x,y,u,v),\quad \sin 2\gamma\neq 0$$

Из (1.1)-(1.3), (2.2) получаем остальные восемь функций интегрирования $A_k^{(s)},\, B_k^{(s)},\, C_k^{(s)},\, D_k^{(s)}\quad k=1,2$ как решения матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} A_1^{(s)} \\ D_1^{(s)} \\ A_2^{(s)} \\ D_2^{(s)} \end{pmatrix}=\left\|a_{ij}^*\right\|_{4\times4}^{-1}\begin{pmatrix} W_1^{+(s)} \\ W_2^{+(s)} \\ \beta^*\theta_{*1}^{-(s)} \\ \beta^*\theta_{*2}^{-(s)} \end{pmatrix}$$

$$a_{11}^*=\operatorname{sh}\alpha_1\sin\beta_1,\qquad a_{12}^*=\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta_1$$

$$a_{13}^*=\psi_2\operatorname{ch}\alpha_2\cos\beta_2-\varphi_2\operatorname{sh}\alpha_2\sin\beta_2,\quad a_{14}^*=-\psi_2\operatorname{sh}\alpha_2\sin\beta_2-\varphi_2\operatorname{ch}\alpha_2\cos\beta_2$$

$$a_{21}^*=\varphi_1\operatorname{sh}\alpha_1\sin\beta_1-\psi_1\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta_1,\qquad a_{22}^*=\psi_1\operatorname{sh}\alpha_1\sin\beta_1+\varphi_1\operatorname{ch}\alpha_1\cos\beta_1$$

$$a_{23}^*=\operatorname{sh}\alpha_2\sin\beta_2,\quad a_{24}^*=\operatorname{ch}\alpha_2\cos\beta_2$$

$$a_{31}^*=E_1(1),\qquad a_{32}^*=K_1(1) \tag{2.5}$$

$$a_{33}^*=\psi_2K_2(1)-\varphi_2E_2(1),\qquad a_{34}^*=-\varphi_2K_2(1)-\psi_2E_2(1)$$

$$a_{41}^*=\varphi_1E_1(1)-\psi_1K_1(1),\qquad a_{42}^*=\psi_1E_1(1)+\varphi_1E_2(1)$$

$$a_{43}^*=E_2(1),\qquad a_{44}^*=K_2(1)$$

$$W_1^{\pm(s)}=\frac{1}{2}\left(u_{z1}^{+(s)}\pm u_z^{-(s)}-J_{w1}^{(s)}(\zeta=1)\mp J_{w1}^{(s)}(\zeta=-1)\right)$$

$$W_2^{\pm(s)}=-\frac{1}{2}\left(J_{w2}^{(s)}(\zeta=1)\pm J_{w2}^{(s)}(\zeta=-1)\right)$$

$$\theta_{*1}^{\pm(s)}=\frac{1}{2}\left(\theta_1^{+(s)}\pm\theta_1^{-(s)}-J_{\theta1}^{(s)}(\zeta=1)\mp J_{\theta1}^{(s)}(\zeta=-1)\right)$$

$$\theta_{*2}^{\pm(s)}=\frac{1}{2}\left(J_{\theta2}^{(s)}(\zeta=1)\pm J_{\theta2}^{(s)}(\zeta=-1)\right)$$

$$\begin{pmatrix} B_1^{(s)} \\ C_1^{(s)} \\ B_2^{(s)} \\ C_2^{(s)} \end{pmatrix}=\left\|b_{ij}^*\right\|_{4\times4}^{-1}\begin{pmatrix} W_1^{-(s)} \\ W_2^{-(s)} \\ \beta^*\theta_{*1}^{+(s)} \\ \beta^*\theta_{*2}^{+(s)} \end{pmatrix}$$

$$b_{11}^{*}=\mathrm{sh}\alpha_1\cos\beta_1,\qquad b_{12}^{*}=\mathrm{ch}\alpha_1\sin\beta_1$$

$$b_{13}^{*}=-\varphi_2\mathrm{sh}\alpha_2\cos\beta_2-\psi_2\mathrm{ch}\alpha_2\sin\beta_2\qquad b_{14}^{*}=\psi_2\mathrm{sh}\alpha_2\cos\beta_2-\varphi_2\mathrm{ch}\alpha_2\sin\beta_2$$

$$b_{21}^{*}=\varphi_1\mathrm{sh}\alpha_1\cos\beta_1+\psi_1\mathrm{ch}\alpha_1\sin\beta_1\qquad b_{22}^{*}=\varphi_1\mathrm{ch}\alpha_1\sin\beta_1-\psi_1\mathrm{sh}\alpha_1\sin\beta_1$$

$$b_{23}^{*}=\mathrm{sh}\alpha_2\cos\beta_2,\qquad b_{24}^{*}=\mathrm{ch}\alpha_2\sin\beta_2$$

$$b_{31}^{*}=L_1(1),\qquad b_{32}^{*}=P_1(1)$$

$$b_{33}^{*}=-\varphi_2L_2(1)-\psi_2P_2(1),\qquad b_{34}^{*}=\psi_2L_2(1)-\varphi_2P_2(1)$$

$$b_{41}^{*}=\varphi_1L_1(1)+\psi_1P_1(1),\qquad b_{42}^{*}=\varphi_1P_1(1)-\psi_1L_1(1)$$

$$b_{43}^{*}=L_2(1),\qquad b_{44}^{*}=P_2(1)$$

Таким образом, решение краевой задачи с граничными условиями (1.1)-(1.3) представляется рекуррентными формулами (1.16), (2.1)-(2.5).

Аналогичным образом можно представить решения краевых задач с граничными условиями (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5) или (1.6).

В качестве примера рассмотрим частный случай: жестко закрепленные лицевые поверхности пластины нагреваются периодически

$$u_j(x,y,\pm h,t)=0,\quad j=x,y,z,\quad \theta(x,y,\pm h,t)=\theta_1^{\pm}(x,y)\sin\omega t \tag{2.6}$$

Компоненты тензора напряжений, вектора перемещения и температурная функция определяются по формулам (1.16), (1.20), (2.1), (2.2), (2.3), где функции интегрирования с асимптотической точностью первого шага итерации имеют вид:

$$M_{uk}=N_{uk}=M_{vk}=N_{vk}=0,\qquad k=1,2 \tag{2.7}$$

$$A_2=-A_1I_1-D_1S_1,\qquad D_2=A_1I_2+D_1S_2$$

$$I_1=\frac{1}{\Delta_A}[\mathrm{sh}\alpha_1\sin\beta_1\mathrm{ch}\alpha_2\cos\beta_2+\left(\varphi_1\mathrm{sh}\alpha_1\sin\beta_1-\psi_1\mathrm{ch}\alpha_1\cos\beta_1\right)\times$$
$$\times\left(\varphi_2\mathrm{ch}\alpha_2\cos\beta_2+\psi_2\mathrm{sh}\alpha_2\sin\beta_2\right)]$$

$$S_1=\frac{1}{\Delta_A}[\mathrm{ch}\alpha_1\cos\beta_1\mathrm{ch}\alpha_2\cos\beta_2+\left(\varphi_1\mathrm{ch}\alpha_1\cos\beta_1+\psi_1\,\mathrm{sh}\,\alpha_1\sin\beta_1\right)\times$$
$$\times\left(\varphi_2\mathrm{ch}\alpha_2\cos\beta_2-\psi_2\mathrm{sh}\alpha_2\sin\beta_2\right)]$$

$$I_2=\frac{1}{\Delta_A}[\mathrm{sh}\alpha_1\sin\beta_1\mathrm{sh}\alpha_2\sin\beta_2+\left(\varphi_1\mathrm{sh}\alpha_1\sin\beta_1-\psi_1\mathrm{ch}\alpha_1\cos\beta_1\right)\times$$
$$\times\left(\varphi_2\mathrm{sh}\alpha_2\sin\beta_2-\psi_2\mathrm{ch}\alpha_2\cos\beta_2\right)]$$

$$S_2=\frac{1}{\Delta_A}[\mathrm{ch}\alpha_1\cos\beta_1\,\mathrm{sh}\,\alpha_2\sin\beta_2+\left(\varphi_1\mathrm{ch}\alpha_1\cos\beta_1-\psi_1\mathrm{sh}\alpha_1\sin\beta_1\right)\times$$
$$\times\left(\varphi_2\mathrm{sh}\alpha_2\sin\beta_2-\psi_2\mathrm{ch}\alpha_2\cos\beta_2\right)]$$

$$\Delta_A=\psi_2\left(\mathrm{sh}^2\alpha_2\sin^2\beta_2+\mathrm{ch}^2\alpha_2\cos^2\beta_2\right)\neq 0$$

$$A_1=-\frac{\beta^{*}H_1}{2}\frac{\theta_1^{+}-\theta_1^{-}}{G_1H_2-G_2H_1},\qquad D_1=\frac{\beta^{*}G_1}{2}\frac{\theta_1^{+}-\theta_1^{-}}{G_1H_2-G_2H_1}$$

$$G_1H_2-G_2H_1\neq 0$$

$$G_1 = \varphi_1 E_1 - \psi_1 K_1 - E_2 I_1 + K_2 I_2, \qquad H_1 = \varphi_1 K_1 + \psi_1 E_1 - E_2 S_1 + K_2 S_2$$

$$G_2 = E_1 + \left(\varphi_2 E_2 - \psi_2 K_2\right) I_1 - \left(\varphi_2 K_2 + \psi_2 E_2\right) I_2$$

$$H_2 = K_1 + \left(\varphi_2 E_2 - \psi_2 K_2\right) S_1 - \left(\varphi_2 K_2 + \psi_2 E_2\right) S_2$$

$$B_2 = B_1 I_3 + C_1 S_3, \qquad C_2 = -B_1 I_4 - C_1 S_4$$

$$E_k = E_k(1), \quad L_k = L_k(1), \quad P_k = P_k(1), \quad K_k = K_k(1), \quad k = 1,2 \tag{2.8}$$

$$I_3 = \frac{1}{\Delta_B}[\operatorname{sh}\alpha_1 \cos\beta_1 \operatorname{ch}\alpha_2 \sin\beta_2 + \left(\varphi_1 \operatorname{sh}\alpha_1 \cos\beta_1 + \psi_1 \operatorname{ch}\alpha_1 \sin\beta_1\right) \times$$
$$\times \left(\varphi_2 \operatorname{ch}\alpha_2 \sin\beta_2 - \psi_2 \operatorname{sh}\alpha_2 \cos\beta_2\right)]$$

$$S_3 = \frac{1}{\Delta_B}[\operatorname{ch}\alpha_1 \sin\beta_1 \operatorname{ch}\alpha_2 \sin\beta_2 + \left(\varphi_1 \operatorname{ch}\alpha_1 \sin\beta_1 - \psi_1 \operatorname{sh}\alpha_1 \cos\beta_1\right) \times$$
$$\times \left(\varphi_2 \chi\eta\alpha_2 \sin\beta_2 - \psi_2 \operatorname{sh}\alpha_2 \cos\beta_2\right)]$$

$$I_4 = \frac{1}{\Delta_B}[\operatorname{sh}\alpha_1 \cos\beta_1 \operatorname{ch}\alpha_2 \cos\beta_2 + \left(\varphi_1 \operatorname{sh}\alpha_1 \cos\beta_1 + \psi_1 \operatorname{ch}\alpha_1 \sin\beta_1\right) \times$$
$$\times \left(\varphi_2 \operatorname{sh}\alpha_2 \cos\beta_2 + \psi_2 \operatorname{sh}\alpha_2 \sin\beta_2\right)]$$

$$S_4 = -\frac{1}{\Delta_B}[\operatorname{ch}\alpha_1 \sin\beta_1 \operatorname{sh}\alpha_2 \cos\beta_2 + \left(\varphi_1 \operatorname{ch}\alpha_1 \sin\beta_1 - \psi_1 \operatorname{sh}\alpha_1 \cos\beta_1\right) \times$$
$$\times \left(\varphi_2 \operatorname{sh}\alpha_2 \cos\beta_2 + \psi_2 \operatorname{ch}\alpha_2 \sin\beta_2\right)]$$

$$\Delta_B = \psi_2 \left(\operatorname{sh}^2\alpha_2 \cos^2\beta_2 + \operatorname{ch}^2\alpha_2 \sin^2\beta_2\right) \neq 0$$

$$B_1 = -\frac{\beta^* H_3}{2} \frac{\theta_1^+ + \theta_1^-}{G_3 H_4 - G_4 H_3}, \qquad C_1 = \frac{\beta^* G_3}{2} \frac{\theta_1^+ + \theta_1^-}{G_3 H_4 - G_4 H_3}$$

$$G_3 = \varphi_1 L_1 + \psi_1 P_1 + L_2 I_3 - P_2 I_4, \qquad H_3 = \varphi_1 P_1 - \psi_1 L_1 + L_2 S_3 - P_2 S_4$$

$$G_4 = L_1 - \left(\varphi_2 L_2 + \psi_2 P_2\right) I_3 + \left(\varphi_2 P_2 - \psi_2 L_2\right) I_4$$

$$H_4 = P_1 - \left(\varphi_2 L_2 + \psi_2 P_2\right) S_3 + \left(\varphi_2 P_2 - \psi_2 L_2\right) S_4$$

Из-за громоздкости формул точность вычислений ограничена первым шагом итерационного процесса.

Заметим, что выведенные рекуррентные формулы (1.16), (1.20), (2.1)-(2.5) позволяют получить аналитические решения поставленных краевых задач с любой асимптотической точностью с помощью компьютера за считанные минуты.

Приведенные решения получены при ограничениях (1.10)-(1.12), наложенных на граничные условия (1.1)-(1.6) и на заданные в уравнениях (1.8) функции.

Указанных ограничений можно избежать, заменив все заданные в (1.1)-(1.6), (1.8) функции их образами преобразования Фурье [7]

$$Q^{\pm}\left(x,y,z,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}Q_1^{\pm}\left(x,y,z,\omega\right)\sin\omega t\,d\omega$$

$$Q_1^{\pm}\left(x,y,z,\omega\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}Q^{\pm}\left(x,y,z,t\right)\sin\omega t\,dt$$

$$\left(Q^{\pm},X,Y,Z,P;\quad Q_1^{\pm},X_1,Y_1,Z_1,P_1^{*}\right) \tag{2.9}$$

а неизвестные величины: компоненты вектора перемещения, а также температурную функцию искать в виде

$$Q\left(x,y,z,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[Q_1\left(x,y,z,\omega\right)\sin\omega t+Q_2\left(x,y,z,\omega\right)\cos\omega t\right]d\omega \tag{2.10}$$

и соответственно,

$$\begin{gathered}\dot{Q}\left(x,y,z,t\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[Q_1\left(x,y,z,\omega\right)\cos\omega t-Q_2\left(x,y,z,\omega\right)\sin\omega t\right]\omega d\omega\\ \ddot{Q}\left(x,y,z,t\right)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[Q_1\left(x,y,z,\omega\right)\sin\omega t+Q_2\left(x,y,z,\omega\right)\cos\omega t\right]\omega^2 d\omega\end{gathered} \tag{2.11}$$

Такие представления оставляют в силе все выведенные формулы для образов искомых величин. После решения краевых задач возникнет необходомость возвратиться к оригиналам искомых величин, применив обратное преобразование Фурье.

Таким образом, асимптотический метод, примененный в [2,3] для решения неклассических краевых задач для анизотропных слоистых пластин и оболочек, можно применить и для решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости, заранее представив неизвестные величины их образами преобразования Фурье.

Работа выполнена при поддержке гранта INTAS-06-100017-8886.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л. А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука, 1997. 414с.
2. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд. “Гитутюн”, 2005. 468с.
3. Агаловян Л. А., Геворкян Р. С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271-278.
4. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
5. Агаловян Л. А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвуз. сб. научн. тр. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С. 51-58.
6. Геворкян Р. С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв.АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. С. 3-15.
7. Бейтман Г., Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований Т.1. М.: Наука, 1966. 344с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
20.09.2006