ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №4, 2007 Механика

УДК 539.3

К ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Геворкян Г. З., Киракосян Р.М.

Ключевые слова: пластина, ортотропная, нелинейная теория, поперечные сдвиги.
Keywords: Plate, Orthotropic, Nonlinear Theory, Transverse Shears.

Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան
Փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի երկրաչափորեն ոչ գծային ճշգրտված տեսության մասին

[3] մոդելի շրջանակներում արտածվում են փոփոխական հաստության օրթոտրոպ սալերի երկրաչափորեն ոչ գծային տեսության հավասարումները և ձևակերպվում են եզրային պայմանները՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ: Համեմատության նպատակով նշված հավասարումներն ու եզրային պայմանները ստացվում են նաև [4] մոդելի հիման վրա: Որպես օրինակ լուծվում է գծայնորեն փոփոխական հաստության սալ-շերտի խնդիրը հավասարաչափ բաշխված մակերևույթային նորմալ բեռի դեպքում: Դիտարկվում են եզրային պայմանների երկու տարբերակներ: Առաջինում սալ-շերտի երկար կողմերը իրար նկատմամբ չտեղափոխվող հենարաններին ամրացված են հոդակապորեն, իսկ մյուսում՝ ամրակցված են: Ստացված արդյունքների հիման վրա արվում են որակական և քանակական եզրակացություններ:

G.Z. Gevorgyan, R.M. Kirakosyan
On the Geometrically Nonlinear Refined Theory of Variable Thickness Orthotropic Plates

On the base of [3] differential equations and boundary conditions of geometrically nonlinear theory of variable thickness orthotropic plates with the account of transverse shears are obtained. As an example a problem for linear variable thickness orthotropic plate in action of uniformly distributed surface loadings is solved.

На основе модели [3] выведены разрешающие дифференциальные уравнения и сформулированы краевые условия геометрически нелинейной теории ортотропных пластин переменной толщины при учете деформаций поперечных сдвигов. С целью сравнения отмеченные уравнения и краевые условия получены еще и на основе модели [4]. В качестве примера решены задачи ортотропной пластины-полосы линейно-переменной толщины при действии равномерно распределенной поверхностной нагрузки, нормальной к срединной плоскости. Рассмотрены случаи, когда пластина-полоса шарнирно закреплена и защемлена. На основе анализа полученных результатов сделаны качественные и количественные заключения.

Обширную литературу о нелинейных теориях пластин и оболочек и их многочисленных применениях можно найти в [5]– [7].

1. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ рассмотрим ортотропную пластину переменной толщины h, симметричную относительно срединной плоскости. Координатную плоскость xOy совместим со срединной плоскостью пластины, а ось z направим перпендикулярно к ней. Попытаемся получить систему разрешающих дифференциальных уравнений и сформулировать краевые условия геометрически нелинейной теории рассматриваемой пластины при учете деформаций поперечных сдвигов. Будем считать, что:

а) нормальное к срединной плоскости пластины перемещение $u_z = w$ не зависит от координаты z ;

б) влияние нормального напряжения σ_z пренебрежительно мало;

в) по сравнению с единицей малы не только деформации (удлинения и сдвиги), но и углы поворота элементов пластины.

В силу вышеизложенного, во всех исходных соотношениях и уравнениях нелинейной теории упругости сохраним только те нелинейные члены, которые содержат прогиб w и его производные [1]. Тогда общеизвестные выкладки приводят к следующей системе разрешающих уравнений для равновесия дифференциального элемента срединной плоскости [2]:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}=-X_2, \quad \frac{\partial T_y}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial x}=-Y_2$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial w}{\partial x}+S\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial w}{\partial y}+S\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\\&=-Z_2-X_2\frac{\partial w}{\partial x}-Y_2\frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned} \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}=N_x-hX_1, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}=N_y-hY_1$$

Здесь, как обычно, T_x, T_y, S, N_x, N_y и M_x, M_y, M_{xy} –усилия и моменты,

$$\begin{aligned}&X_1=\left(X^+-X^-\right)/2,\ Y_1=\left(Y^+-Y^-\right)/2\\&X_2=X^++X^-,\ Y_2=Y^++Y^-,\ Z_2=Z^++Z^-\end{aligned} \qquad (1.2)$$

Через $X^{\pm}, Y^{\pm}, Z^{\pm}$ обозначены проекции интенсивностей нагрузок на поверхностях $z=+h/2$ и $z=-h/2$ соответственно.

Следуя [3], для тангенциальных перемещений по осям x и y напишем

$$u_x=u+z(a_{55}\varphi-\partial w/\partial x), \quad u_y=\mathrm{v}+z(a_{44}\psi-\partial w/\partial y) \qquad (1.3)$$

Здесь

$$a_{55}\varphi-\partial w/\partial x=\theta_x, \quad a_{44}\psi-\partial w/\partial y=\theta_y \qquad (1.4)$$

–углы поворота нормального элемента пластинки в плоскостях xOz и yOz соответственно, a_{55}, a_{44}– соответствующие коэффициенты сдвигов материала, φ, ψ – искомые функции координат x, y.

С учетом (1.3), (1.4) и обобщенного закона Гука ортотропного тела, для усилий и моментов пластинки в рамках модели [3] получим:

$$T_x=h\left\{B_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left[\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}$$

$$T_y=h\left\{B_{22}\left[\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+B_{12}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}$$

$$S=hB_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (1.5)$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12}\left[B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + B_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right]$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12}\left[B_{22}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + B_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)\right]$$

$$M_{xy} = -\frac{h^3 B_{66}}{12}\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - a_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - a_{44}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

$$N_x = \frac{1}{3h}\left[h^2\left(2\varphi + X_1\right) + 3\left(M_x\frac{\partial h}{\partial x} + M_{xy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right] \tag{1.6}$$

$$N_y = \frac{1}{3h}\left[h^2\left(2\psi + Y_1\right) + 3\left(M_y\frac{\partial h}{\partial y} + M_{xy}\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]$$

В рамках модели [4] отличаются только выражения поперечных сил. Вместо (1.6) имеем:

$$N_x = h\varphi, \quad N_y = h\psi \tag{1.7}$$

С учетом выражений усилий и моментов из (1.1) получим систему пяти дифференциальных уравнений относительно пяти искомых функций u, v, w, φ, ψ. В рамках модели [3] эта система имеет вид:

$$h\left[B_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + B_{12}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + B_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x \partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] + \left\{B_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + B_{12}\left[\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial h}{\partial x} +$$

$$+ B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y} = -X_2$$

$$h\left[B_{22}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + B_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + B_{66}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] + \left\{B_{22}\left[\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + B_{12}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}\frac{\partial h}{\partial y} +$$

$$+ B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x} = -Y_2 \tag{1.8}$$

$$h^2\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] -$$

$$-h\left\{\left[8 + a_{55}h\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left[8 + a_{44}h\left(B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)\right]\frac{\partial \psi}{\partial y}\right\} -$$

$$-2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)-16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi+\frac{\partial h}{\partial y}\psi\right)-$$

$$-12\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial w}{\partial x}+S\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial w}{\partial y}+S\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]=$$

$$=4\left[3\left(Z_2+X_2\frac{\partial w}{\partial x}+Y_2\frac{\partial w}{\partial y}\right)+h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_1}{\partial y}\right)-X_1\frac{\partial h}{\partial x}-Y_1\frac{\partial h}{\partial y}\right]$$

$$h^2\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]+\underline{2}h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x}+2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]-$$

$$-h^2\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+B_{66}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)+a_{44}\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-\underline{2}h\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+a_{44}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right]+\underline{8}\varphi=\underline{8}X_1$$

$$h^2\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\left(B_{12}+2B_{66}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+\underline{2}h\left[\left(B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+2B_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right]-$$

$$-h^2\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)+a_{55}\left(B_{12}+B_{66}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-\underline{2}h\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+a_{55}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]+\underline{8}\psi=\underline{8}Y_1$$

Ради простоты в третьем уравнении системы (1.8) выражения усилий T_x, T_y и S не подставлены.

В рамках модели [4] первые два уравнения системы (1.8) остаются без изменения. Третье уравнение принимает вид:

$$h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial h}{\partial x}\varphi+\frac{\partial h}{\partial y}\psi+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial w}{\partial x}+S\frac{\partial w}{\partial y}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial w}{\partial y}+S\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-Z_2-X_2\frac{\partial w}{\partial x}-Y_2\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1.9}$$

Четвертое и пятое уравнения отличаются от соответствующих уравнений системы (1.8) только тем, что в них вместо подчеркнутых коэффициентов $\underline{2}$ и $\underline{8}$ фигурируют коэффициенты 3 и 12, соответственно.

Разрешающая система дифференциальных уравнений в рамках обеих моделей имеет десятый порядок. В соответствии с этим на каждом краю пластинки следует ставить по пять краевых условий. Приведем некоторые условия для края $x=\text{const}$.

а) Условия свободного края.

По модели [3]

$$B_{11}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]+B_{12}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]=0 \qquad (T_x=0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=0 \qquad (S=0)$$

$$2\varphi+X_1=0 \qquad (N_x=0) \tag{1.10}$$

$$B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-a_{55}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=0 \qquad (M_x=0)$$

$$2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-a_{55}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \quad (M_{xy}=0)$$

В рамках модели [4] третье условие свободного края заменяется условием

$$\varphi=0 \tag{1.11}$$

а остальные остаются без изменений.

б) Условия шарнирно опертого края.

В рамках обеих моделей третье условие свободного края заменяется условием $w=0$, а остальные остаются без изменений.

Заметим, что второе условие (1.10) можно в рамках обеих моделей заменить условием

$$\frac{\partial w}{\partial y}-a_{44}\psi=0 \qquad (u_y=0) \tag{1.12}$$

в) Условия заделанного края:

$$u=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}-a_{55}\varphi=0 \qquad (u_x=0)$$

$$v=0,\ \frac{\partial w}{\partial y}-a_{44}\psi=0 \qquad (u_y=0) \tag{1.13}$$

$$w=0 \qquad\qquad (u_z=0)$$

Возможны и другие условия. Аналогичным образом можно сформулировать условия для края $y=\text{const}$.

Как и следовало ожидать, плоская задача и задача изгиба в геометрически нелинейной постановке не разделяются друг от друга. Это очевидно, поскольку как в дифференциальных уравнениях, так и в краевых условиях участвуют величины и плоской задачи, и задачи изгиба.

2. Рассмотрим пластинку-полосу ширины l, толщина которой вдоль длины не изменяется, а вдоль ширины изменяется по линейному закону

$$h=h_0+h_1x \tag{2.1}$$

Полоса несет равномерно распределенную поверхностную нагрузку интенсивности q, перпендикулярную к срединной плоскости:

$$X_1=X_2=0,\quad Z_2=q \tag{2.2}$$

В рассмотренном случае второе и пятое уравнения системы (1.1) удовлетворяются автоматически, а остальные принимают вид:

$$\frac{dT_x}{dx}=0,\quad \frac{dN_x}{dx}=-q-T_x\frac{d^2w}{dx^2},\quad \frac{dM_x}{dx}=N_x \tag{2.3}$$

Проинтегрировав (2.3), получим:

$$T_x=\text{const},\quad N_x=C_1-qx-T_x\frac{dw}{dx},\quad M_x=C_2+C_1x-\frac{qx^2}{2}-T_xw \tag{2.4}$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Имея в виду (1.6),(1.7), для функции φ получим:

а) в рамках модели [3]–

$$\varphi=\frac{3}{2h^2}\left[C_1h_0-C_2h_1-\frac{qx}{2}\left(2h_0+h_1x\right)-T_x\left(h\frac{dw}{dx}-h_1w\right)\right] \tag{2.5}$$

б) в рамках модели [4]–

$$\varphi=\frac{1}{h}\left(C_1-qx-T_x\frac{dw}{dx}\right) \tag{2.6}$$

Переходим к безразмерным величинам:

$$\begin{gathered}x=l\,\overline{x},\; w=h_0\overline{w},\; h=h_0H,\; s=h_0/l,\; \gamma=h_1/s,\; H=1+\gamma\overline{x},\; \chi=a_{55}B_{11}\\ q=B_{11}\overline{q},\; T_x=B_{11}h_0T,\; N_x=B_{11}h_0N,\; \varphi=B_{11}\overline{\varphi},\; M_x=B_{11}h_0^2M\\ C_1=B_{11}h_0\overline{C}_1,\; C_2=B_{11}h_0^2\overline{C}_2\end{gathered} \tag{2.7}$$

С учетом (2.4)–(2.7) и выражения момента (1.5) приходим к разрешающему дифференциальному уравнению второго порядка относительно прогиба срединной плоскости:

а) по модели [3] –

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{3\chi T}{2H}\right)\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}-\frac{3\chi\gamma T}{H^2}\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}}-\frac{3\overline{T}}{s^2H^3}\left(4-\chi\gamma^2s^2\right)\overline{w}=\\ =\frac{6\overline{q}\,\overline{x}^2}{s^4H^3}-\frac{3\chi\overline{q}}{2s^2H^3}-\frac{3\overline{C}_1}{s^3H^3}\left(4\overline{x}+\chi\gamma^2s^3\right)-\frac{3\overline{C}_2}{s^2H^3}\left(4-\chi\gamma^2s^2\right)\end{gathered} \tag{2.8}$$

б) по модели [4] –

$$\begin{gathered}\left(1+\frac{\chi T}{H}\right)\frac{d^2\overline{w}}{d\overline{x}^2}-\frac{\chi\gamma T}{H^2}\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}}-\frac{12T}{s^2H^3}\overline{w}=\\ =\frac{6\overline{q}\,\overline{x}^2}{s^4H^3}-\frac{\chi\overline{q}}{s^2H^2}-\frac{C_1}{s^3H^3}\left(12\overline{x}+\chi\gamma s^2H\right)-\frac{12\overline{C}_2}{s^2H^3}\end{gathered} \tag{2.9}$$

Задачу будем решать для двух вариантов краевых условий. В одном из них длинные края пластинки-полосы шарнирно закреплены, а в другом защемлены. Расстояние между опорами неизменно. Эти условия имеют вид:

I) шарнирное закрепление–

$$\left.\overline{w}\right|_{\substack{\overline{x}=0\\ \overline{x}=1}}=0,\quad \left.\left(2s^2\overline{C}_2+2s\overline{C}_1\overline{x}-\overline{q}\,\overline{x}^2\right)\right|_{\substack{\overline{x}=0\\ \overline{x}=1}}=0,\quad \left(\left.M_x\right|_{\substack{x=0\\ x=l}}=0\right) \tag{2.10}$$

Из последних двух условий следует:

$$\overline{C}_2=0,\; \overline{C}_1=\frac{\overline{q}}{2s} \tag{2.11}$$

II) защемление. В этом случае первые два условия (2.10) сохраняются, а последние два заменяются следующими условиями:

$$\left(s\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} - \chi\overline{\varphi} \right)\Bigg|_{\substack{\overline{x}=0 \\ \overline{x}=1}} = 0, \qquad \left(u_x \Bigg|_{\substack{x=0 \\ x=l}} = 0 \right) \tag{2.12}$$

С учетом (2.5)-(2.7) эти условия принимают вид:

а) в рамках модели [3]–

$$\left\{ 2s^2 H\left(2H+3\chi T\right)\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} - 6\chi\gamma s^2 T\overline{w} - 3\chi\left[2s\overline{C}_1 - 2\gamma s^2 C_2 - \overline{q}\,\overline{x}\left(2+\gamma\overline{x}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\overline{x}=0 \\ \overline{x}=1}} = 0 \tag{2.13}$$

б) в рамках модели [4]–

$$\left[s^2\left(H+\chi T\right)\frac{d\overline{w}}{d\overline{x}} + \chi\left(\overline{q}\,\overline{x} - s\overline{C}_1\right)\right]\Bigg|_{\substack{\overline{x}=0 \\ \overline{x}=1}} = 0 \tag{2.14}$$

Отметим, что к приведенным условиям нужно добавить условие неизменности расстояния между краями пластинки-полосы, из которого следует:

$$T = \frac{\gamma s^2}{2}\cdot\frac{\int_0^1 (d\overline{w}/dx)^2\,dx}{\ln(1+\gamma)} \tag{2.15}$$

В случае пластинки-полосы постоянной толщины $\gamma = 0$ и (2.15) принимает вид

$$T = \frac{s^2}{2}\cdot\int_0^1 (dw/dx)^2\,dx \tag{2.16}$$

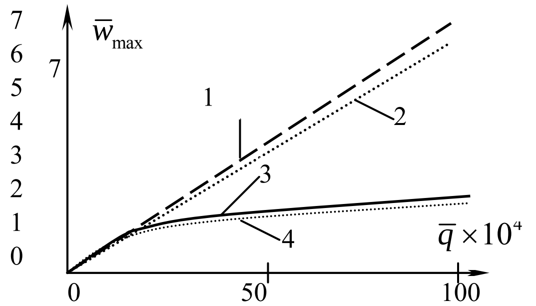
Численное решение задачи удобно реализовать по следующей схеме последовательных приближений, включающей метод коллокаций. Для первого приближения принимается $T_1 = 0$ и по методу коллокаций решается разрешающее уравнение. Имея коэффициенты ряда w_1, удовлетворяющего соответствующим краевым условиям, по формуле (2.15) вычисляется значение T_1'. Для второго приближения принимается $T_2 = (T_1 + T_1')/2$ и после решения этого приближения по формуле (2.15) вычисляется значение T_2'. Для третьего приближения принимается $T_3 = (T_2 + T_2')/2$ и т.д. Таким образом,

$$T_{n+1} = (T_n + T_n')/2,\ T_1 = 0,\ n = 1,2,... \tag{2.17}$$

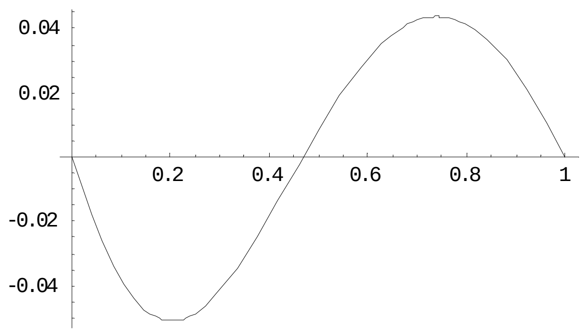
Заметим, что если заданное значение T_n меньше действительного значения T, то $T_n' > T$ и наоборот. Следовательно, действительное значение T всегда будет находиться между начальным T_n и конечным T_n' значениями любого приближения, т.е всегда удовлетворяется одно из следующих неравенств:

$$T_n < T < T_n' \text{ или } T_n > T > T_n' \tag{2.18}$$

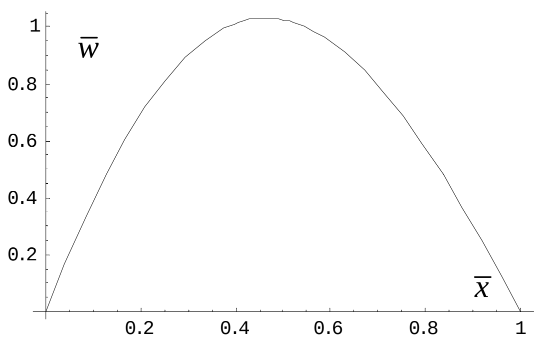
Это обстоятельство обеспечивает большую скорость сходимости. Процесс итерации следует прекращать при достижении желаемого сближения T_n и T_n'. В случае пластинки-полосы постоянной толщины $\gamma = 0,\ H = 1$ и разрешающие уравнения (2.8) и (2.9) становятся уравнениями с постоянными коэффициентами, допускающими аналитически замкнутые решения. Однако это существенно не упрощает решения задачи, поскольку условие (2.16) приводит к сложному трансцендентному уравнению [1], которое можно решать все же численно. Поэтому решение задачи для пластинки-полосы постоянной толщины целесообразно получить как частный случай решения задачи пластинки-полосы переменной толщины, заменив условие (2.15) условием (2.16) и положив $\gamma = 0$.



Фиг. 1. 1– по линейной теории [3], 2 – по линейной теории [4], 3 – по [3] с учетом нелинейности, 4 – по [4] с учетом нелинейности



Фиг.2



Фиг. 3

3. Рассмотрим ортотропные пластинки-полосы постоянной и линейно-переменной толщин. На фиг. 1 приведены графики максимальных прогибов в зависимости от нагрузки $\overline{q}$ по теориям [3] и [4] по линейной теории и с учетом нелинейности .

На фиг. 2 и 3 приведены графики горизонтального перемещения срединной плоскости $\overline{u}$ и прогиба $\overline{w}$ в зависимости от $\overline{x}$ по теории [3]. По теории [4] они качественно не отличаются. Графики фиг. 1–3 построены при $\gamma = 1; s = 0{,}1,\ \chi = 10$ в случае шарнирного закрепления.

В табл. 1 и 2 представлены безразмерные значения некоторых величин, определенных по теориям [3] и [4]. Через $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ обозначены значения безразмерных координат сечений с максимальным прогибом $\overline{w}_{\text{м}}$ и с максимальным отношением w/h соответственно. В последних графах таблиц приведены числа итераций, обеспечивающих точность 0,1%.

Анализ графиков и данных таблиц приводит к следующим заключениям.

1. Во всех рассмотренных случаях учет геометрической нелинейности в рамках теорий [3] и [4] приводит к качественно одинаковым результатам:

а) максимальные прогибы существенно уменьшаются по сравнению с прогибами, полученными по геометрически линейной постановке;

б) эта тенденция сравнительно сильно проявляется в случае шарнирного, чем заделанного крепления краев пластины-полосы к несмещающимся опорам;

в) с уменьшением относительного модуля поперечного сдвига материала (с увеличением параметра χ) как максимальные прогибы $\overline{w}_{\text{л}}$ и $\overline{w}_{\text{н}}$, полученные по геометрически линейной и нелинейной постановкам, так и их отношение $\bar{w}_л / \bar{w}_н$ умеренно растут;

г) значения тангенциального усилия T по обеим теориям практически совпадают и с увеличением параметра χ растут незначительно;

д) числа итераций, обеспечивающих одинаковую точность получения расчетных величин, безразличны по отношению к краевым условиям и по обеим теориям практически совпадают;

е) максимальные значения перемещения $\bar{u}$ в несколько десятков раз меньше максимальных значений $\bar{w}$.

Таблица 1

Шарнирное закрепление					T	$\bar{x}_1$	$\bar{w}_м$	$\bar{x}_2$	$(w/h)_м$	число итер.
по теории [3]	γ=0, s=0,15, q=0,005	χ	0	л	0	0,5	1.5432	0,5	1.5432	0
				н	0.02459	0.5	0.6601	0.5	0.6601	8
			3	л	0	0,5	1.668	0,5	1.668	0
				н	0.02537	0.5	0.6676	0.5	0.6676	8
			10	л	0	0,5	1.960	0,5	1.960	0
				н	0.02684	0.5	0.6815	0.5	0.6815	9
	γ=1, s=0,1, q=0,005	χ	0	л	0	0.4398	2.561	0,3698	1.824	0
				н	0.03747	0.4546	1.009	0.3818	0.7116	8
			3	л	0	0.4383	2.753	0.3676	1.963	0
				н	0.03846	0.4573	1.019	0.3829	0.7177	8
			10	л	0	0.4354	3.203	0.3632	2.290	0
				н	0.04038	0.4628	1.0382	0.3856	0.7291	8
по теории [4]	γ=0, s=0,15, $\bar{q}$ =0,005	χ	0	л	0	0,5	1.5432	0,5	1.5432	0
				н	0.02459	0.5	0.6601	0.5	0.6601	8
			3	л	0	0,5	1.626	0,5	1.626	0
				н	0.02512	0.5	0.6652	0.5	0.6652	8
			10	л	0	0,5	1.821	0,5	1.821	0
				н	0.02618	0.5	0.6754	0.5	0.6754	9
	γ=1, s=0,1, $\bar{q}$ =0,005	χ	0	л	0	0.4398	2.561	0,3698	1.824	0
				н	0.03747	0.4546	1.009	0.3818	0.7116	8
			3	л	0	0,4399	2.695	0.3694	1.919	0
				н	0.03816	0.4571	1.016	0.3832	0.7157	9
			10	л	0	0.4402	3.008	0.3684	2.143	0
				н	0.03958	0.4623	1.031	0.3861	0.7239	9

2. Результаты теорий [2] и [3] количественно мало отличаются друг от друга. Теория [3] по сравнению с теорией [2] приводит к несколько большим значениям максимальных прогибов. В случае шарнирного крепления разница между ними не превышает 6%, а в случае заделки–3%. Причем разница больше для пластин-полос переменной толщины. Это объясняется тем, что влияние изменения напряжения τ_{xz} по толщине для пластин переменной толщины больше, чем для пластин постоянной толщины, а теория [2] это влияние не учитывает.

Разумеется, разница между результатами теорий [2] и [3] для сильно анизотропных пластин переменной толщины и конечных размеров в плане может оказаться существенной.

Таблица 2

Защемление					T	$\overline{x}_1$	$\overline{w}_м$	$\overline{x}_2$	(w/h)	число итер.
по теории [3]	γ=0, s=0,05, q=0,0005	χ	0	л	0	0,5	5.000	0,5	5.000	0
				н	0.01705	0.5	1.663	0.5	1.663	6
			3	л	0	0,5	5.224	0,5	5.224	0
				н	0.01737	0.5	1.693	0.5	1.693	9
			10	л	0	0,5	5.749	0,5	5.749	
				н	0.01814	0.5	1.742	0.5	1.742	10
	γ=1, s=0,05, q=0,001	χ	0	л	0	0.4228	1.626	0.3807	1.161	0
				н	0.01129	0.4200	1.117	0.3848	0.7938	7
			3	л	0	0.4227	1.780	0.3787	1.271	0
				н	0.01214	0.4320	1.172	0.3839	0.8325	7
			10	л	0	0.4224	2.137	0.3747	1.529	
				н	0.01404	0.4374	1.271	0.3831	0.9016	8
по теории [4]	γ=0, s=0,05, $\overline{q}$ =0,0005	χ	0	л	0	0,5	5.000	0,5	5.000	0
				н	0.01705	0.5	1.663	0.5	1.663	6
			3	л	0	0,5	5.149	0,5	5.149	0
				н	0.01726	0.5	1.684	0.5	1.684	6
			10	л	0	0,5	5.5	0,5	5.5	
				н	0.01778	0.5	1.722	0.5	1.722	9
	γ=1, s=0,05, $\overline{q}$ =0,001	χ	0	л	0	0.4227	1.627	0.3807	1.1607	0
				н	0.01129	0.4300	1.117	0.3848	0.7938	7
			3	л	0	0.4236	1.730	0.3802	1.234	0
				н	0.01186	0.4320	1.155	0.3848	0.8203	8
			10	л	0	0.4399	1.970	0.3791	1.405	
				н	1.220	0.4368	0.5664	0.3852	0.8718	8

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 211с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин.М.: Наука, 1987. 360с.
3. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА. 2000. 122с.
4. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
5. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеориздат, 1956. 272с.
6. Муштари Х.М. Нелинейная теория оболочек (сб. научн. тр.). М.: Наука, 1990. 223с.
7. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука, 1997. 272с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.12.2006