

УДК 539.3

ЗАДАЧА ИЗГИБА ПЛАСТИН С РАВНОМЕРНО-НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ,
КОГДА ДВА ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ КРАЯ ПЛАСТИНКИ ШАРНИРНО
ЗАКРЕПЛЕНЫ, А ДВА ДРУГИХ СВОБОДНЫ

Василян Н.Г.

Ключевые слова: пластина, перемещение, перерезывающие силы, прогиб, точность.

Key words: plate, displacement, intersecting forces, flexure, exactness.

Ն.Գ. Վասիլյան

Հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ, երկու եզրը հողակապորեն ամրացված մյուս երկուսը ազատ, սալի ծոման խնդիրը

Այս աշխատանքում դիտարկված է հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ հաստատուն հաստությամբ իզոտրոպ սալի ծոմանը, որի երկու եզրը հողակապորեն ամրացված են մյուս երկուսը ազատ: Լուծված է խնդիրը ըստ Կիրխոֆի տեսության և ըստ ճշգրտված տեսության և համեմատված են արդյունքները տեղափոխությունների և կտրող ուժի համար: Ըստ արդյունքների սալի ծոման դեպքում տեղափոխության մեծագույն արժեքը ստացվում է ըստ Կիրխոֆի տեսության հարաբերական հաստության ճշտությամբ, ի տարբերություն շատ խնդիրների, որտեղ ստացվում է հարաբերական հաստության քառակուսու ճշտությամբ:

N.G.Vasilyan

The solution of bending plates problem with uniformly normal load, which two opposite edges of the plate jointly supported, other two edges are free

This article is about the solution of plates bending problem with uniformly normal load, when two opposite edges of the plate jointly supported, other two edges are free is received. The problem is solved both by Kirchhoff theory and by improved theory. The results for displacements and intersecting forces are compared. As a result, we received, that maximal flexure of the plate for the concerned problem has order exactness relative thickness by the theory of Kirchgov in compare with majority of problems for which order exactness is quadrate relative thickness.

В статье получено решение задач изгиба пластин с равномерно-нормальной нагрузкой, когда два противоположных края пластинки шарнирно закреплены, а два других свободны. Задача решена по теории Кирхгофа и по уточненной теории. Сравниваются результаты для перемещений и перерезывающих сил. В результате получаем, что максимальный прогиб пластинки по теории Кирхгофа для рассматриваемой задачи имеет точность порядка относительной толщины в отличие от большинства задач, для которых точность – порядок квадрата относительной толщины. Перемещение в центре пластинки имеет точность квадрата относительной толщины.

1. Пусть прямоугольная пластинка постоянной толщины $2h$ в декартовой системе координат занимает область: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$.

Принимается справедливое допущение теории пластин Кирхгофа.

Согласно теории Кирхгофа уравнение изгиба пластины имеет вид

$$D\Delta^2 w = q \quad (1.1)$$

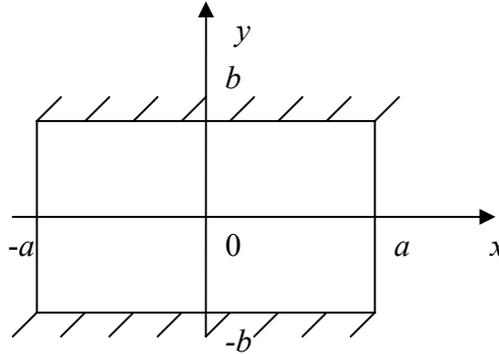
Предполагается, что две кромки пластинки шарнирно закреплены

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (1.2)$$

а две другие свободны

$$\begin{aligned}
M_x = 0 & \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \right) \\
N_x = 0 & \quad \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \right)
\end{aligned}
\quad \text{при } x = \pm a \quad (1.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.



Фиг.1

Решение этой задачи приводится во многих монографиях и, в частности, в [1]. В книге С.П. Тимошенко [2] написано: «Прямоугольная пластинка, свободно опертая по двум противоположным сторонам (в теории Кирхгофа условие свободного опирания и шарнирного закрепления не отличаются) и удовлетворяющая произвольным краевым условиям по двум другим краям была в свое время исследована М. Леви (1877) и Э. Эстеваном (1900)».

Решение задачи в этой системе координат, когда $q(x, y) = \text{const}$, будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos \lambda_n y \quad (1.4^*)$$

чтобы удовлетворить условиям шарнирного закрепления (1.2), $q(x, y)$ разложим в ряд:

$$q = q_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos} \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \quad (1.4^{**})$$

где $a_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}$.

Подставляя (1.4^{*}) и (1.4^{**}) в (1.1) и удовлетворяя (1.3) условиям, получим решение

$$w = w_0 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left[1 + \frac{\nu S_n}{(1-\nu)\delta_n} \text{ch} \lambda_n x + \frac{\nu \text{sh} \lambda_n a}{\delta_n} \lambda_n x \text{sh} \lambda_n x \right] \cos \lambda_n y \quad (1.4)$$

где

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2b}, \quad w_0 = \frac{64q_0 b^4}{D\pi^5}, \quad \alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^5} \quad (1.5)$$

$$S_n = (1 + \nu) \operatorname{sh} \lambda_n a - (1 - \nu) \lambda_n a \operatorname{ch} \lambda_n a \quad (1.6)$$

$$\delta_n = (3 + \nu) \operatorname{sh} \lambda_n a \operatorname{ch} \lambda_n a - (1 - \nu) \lambda_n a$$

Из (1.4) при $\nu=0$ получается решение рассматриваемой пластинки для цилиндрического изгиба

$$w_* = w_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{5b^2}\right) \quad (1.7)$$

и w_0 есть максимальный прогиб пластинки при цилиндрическом изгибе. Известно, что сумма этого ряда равна

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \frac{5\pi^5}{1536} \quad (1.8)$$

В случае удлиненного прямоугольника

$$\frac{a}{b} \gg 1, \quad \operatorname{ch} \lambda_n a, \operatorname{sh} \lambda_n a \approx \frac{1}{2} e^{\lambda_n a} \quad (1.9)$$

Из (1.4) получается следующая приближенная формула для прогиба на кромке $x = a$:

$$w(a, y) \approx w_0 \left[1 + \frac{\nu(1 + \nu)}{(3 + \nu)(1 - \nu)}\right] \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{5b^2}\right) \quad (1.10)$$

Максимальное отличие от цилиндрического изгиба не зависит от y и имеет место при $\nu=0.5$

$$\frac{w(a, y)}{w_*} = \frac{10}{7} \approx 1.43 \quad (1.11)$$

Из функции прогиба (1.4) можно получить и остальные расчетные формулы пластинки. В частности, выражение для перерезывающего усилия в угловой точке имеет вид:

$$N_y(a, b) = q_0 b \left[1 + \frac{16\nu}{(1 - \nu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2\lambda_n a - (1 - \nu)\lambda_n a}{(2n - 1)^2 \delta_n}\right] \quad (1.12)$$

Отсюда, в приближении (1.9) получается

$$N_y(a, b) \approx \frac{(1 + 3\nu)}{(1 - \nu)} q_0 b \quad (1.13)$$

2. Рассмотрим теперь задачу изгиба прямоугольной пластинки на основе уточненной теории. Для данной задачи особое значение имеет уточнение граничных условий свободного края. Так как теория Кирхгофа на свободном краю вместо трех условий равенства нулю изгибающего, крутящего моментов и перерезывающих усилий, удовлетворяет двум условиям равенства нулю изгибающего момента обобщенного перерезывающего усилия, уравнение изгиба пластинки имеет вид [3]:

$$\Delta \Phi = -\frac{3}{4h} q, \quad -D \Delta w + \frac{8\chi h^3}{3(1 - \nu)} \Delta \Phi - \frac{4h}{3} \Phi = 0, \quad \Delta \Psi - \frac{1}{\chi h^2} \Psi = 0 \quad (2.1)$$

где $\chi=2/5$ соответствует уравнениям теории С.А. Амбарцумяна, $\chi=1/3$ – уравнениям теории Э.Рейснера. Искомые в теории С.А. Амбарцумяна функции φ_1, φ_2 ,

характеризующие поперечные сдвиги [4], выражаются через функции Φ , Ψ следующим образом:

$$\varphi_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (2.2)$$

Функции θ_1 , θ_2 , характеризующие углы поворота в теории Э.Рейснера [5], выражаются через функции Φ , Ψ следующим образом:

$$\theta_1 = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right), \quad \theta_2 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{3G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

Осредненные граничные условия шарнирного закрепления относительно искомым функций w , Φ , Ψ имеют вид [3]:

$$w = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2\chi}{G} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (2.4)$$

Условия равенства нулю изгибающего, крутящего момента и перерезывающих усилий на свободном краю записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{2\chi}{G} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\chi}{G} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (2.5)$$

Решение системы уравнений (2.1), удовлетворяющее граничным условиям шарнирного закрепления (2.4), имеет вид:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cos \lambda_n y, \quad \Phi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \cos \lambda_n y \quad (2.6)$$

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \sin \lambda_n y$$

Подставляя (2.6) в (2.1) и используя разложение

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n y, \quad a_n = \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} \quad (2.7)$$

получим следующую последовательность систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\varphi_n'' - \lambda_n^2 \varphi_n = -\frac{3}{4h} q_0 a_n,$$

$$f_n'' - \lambda_n^2 f_n + \frac{4h}{3D} \varphi_n = -\frac{2\chi h^2}{(1-\nu)D} q_0 a_n \quad (2.8)$$

$$\psi_n'' - \frac{1 + \chi h^2 \lambda_n^2}{\chi h^2} \psi_n = 0$$

Общее решение первого уравнения системы (2.8) получается в виде

$$\varphi_n = D_n \operatorname{ch} \lambda_n x + C_n \operatorname{sh} \lambda_n x + \frac{3a_n}{4h\lambda_n^2} q_0 \quad (2.9)$$

После подстановки (2.9) во второе уравнение системы (2.8) находим общее решение для

$$f_n = A_n \operatorname{ch} \lambda_n x + B_n \operatorname{sh} \lambda_n x - \frac{2h}{3\lambda_n D} (C_n x \operatorname{ch} \lambda_n x + D_n x \operatorname{sh} \lambda_n x) + \frac{q_0 a_n}{D \lambda_n^4} \left(1 + \frac{2\chi}{1-\nu} \lambda_n^2 h^2\right) \quad (2.10)$$

Общим решением третьего уравнения системы (2.8) будет

$$\psi_n = F_n \operatorname{sh} p_n x + G_n \operatorname{ch} p_n x \quad (2.11)$$

где

$$p_n = (\sqrt{\chi} h)^{-1} \sqrt{1 + \chi \lambda_n^2 h^2} \quad (2.12)$$

3. Произвольные постоянные $A_n, B_n, C_n, D_n, F_n, G_n$ должны определяться из граничных условий на кромках $x = \pm a$ (2.5). Их нахождение упростится, если вместо условия при $x = -a$ использовать условия симметрии относительно оси $x = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad \Psi = 0 \quad (3.1)$$

Условие (3.1) можно получить из условий скользящего контакта, приведенных в [3]. С учетом (2.6), условия (3.1) принимают вид

$$f_n' = 0, \quad f_n''' = 0, \quad \psi_n = 0 \quad (3.2)$$

Подстановка (2.10), (2.11) в (3.2) дает

$$C_n = B_n = G_n = 0 \quad (3.3)$$

Подставляя (2.9), (2.10), (2.11) в (2.6) и удовлетворяя граничным условиям на краю $x = a$ (2.5), получим выражения для неизвестных коэффициентов:

$$F_n = -(\operatorname{sh} p_n a)^{-1} \operatorname{sh} \lambda_n a D_n, \quad A_n = \frac{2h}{3D\lambda_n^2} D_n \left(\lambda_n a \operatorname{cth} \lambda_n a - \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \quad (3.4)$$

$$D_n = -\frac{3q_0 \nu a_n}{2h\lambda_n^2 \operatorname{cth} \lambda_n a} \left\{ 3 + \nu + 4\lambda_n^2 \chi h^2 - (1-\nu)\lambda_n a \left[\operatorname{cth} \lambda_n a - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \operatorname{th} \lambda_n a \right] - \right.$$

$$\left. -4h\lambda_n \sqrt{\chi(1+\lambda_n^2 h^2 \chi)} \frac{\operatorname{th} \lambda_n a}{\operatorname{th} p_n a} \right\}^{-1}$$

Используя (3.4) в выражениях (2.9)-(2.11), а затем в (2.6), можно найти все расчетные формулы для пластинки. В частности, в приближении (1.9) прогиб пластинки на краю $x = a$ определяется следующим образом:

$$w(a, y) \approx \frac{q_0}{D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^4} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ 3 + \nu + 4\lambda_n^2 \chi h^2 - \nu \lambda_n a - \right. \right. \quad (3.5)$$

$$\left. \left. -4h\lambda_n \sqrt{\chi(1+\lambda_n^2 h^2 \chi)} \operatorname{cth} p_n a \right\}^{-1} + 1 + \frac{2\chi h^2 \lambda_n^2}{1-\nu} \right] \cos \lambda_n y$$

Из приведенного решения для $q = \text{const}$ с использованием разложения (2.7) легко получить решение для частных случаев заданной нагрузки. Например, когда $q = q_0 \cos \lambda_1 y$, то $a_1 = q_0$ и $a_n = 0$ при $n > 1$, или $q = q_0 (\cos \lambda_1 y + \alpha \cos \lambda_2 y)$, то $a_1 = q_0$, $a_2 = \alpha q_0$ и $a_n = 0$ при $n > 2$. Пусть теперь $q = q_N \cos \lambda_N y$, тогда $a_n = 0$ при $n < N$, и $a_N = q_N$ при $n > N$. Если принять

$$q = q_0 \cos \lambda_1 y, \quad h^2/b^2 \ll 1 \quad (3.6)$$

то формула прогиба будет иметь вид:

$$w(a, y) = \frac{16q_0 b^4}{\pi^4 D} \left[1 + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)} + \frac{2\pi\sqrt{\chi}\nu(1+\nu)}{b(1-\nu)(3+\nu)^2} \frac{h}{b} \right] \cos \frac{\pi y}{2b} \quad (3.7)$$

отсюда получится следующее выражение для максимального прогиба пластинки в середине края $y = 0$:

$$w(a, 0) \approx \frac{16q_0 b^4}{\pi^4 D} \left[1 + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu)(3+\nu)} \left(1 + \frac{2\pi\sqrt{\chi}}{(3+\nu)} \frac{h}{b} \right) \right] \quad (3.8)$$

В приближении (1.9) выражение перерезывающего усилия в угловой точке пластины имеет вид:

$$N_y(a, b) \approx \frac{2q_0 b}{\pi} \left[1 - \frac{\nu \left(\frac{\pi\sqrt{\chi}}{2} \frac{h}{b} - 1 \right)}{\pi\sqrt{\chi} \frac{h}{b} (3+\nu)} \left(1 + \frac{2\sqrt{\chi}\pi}{3+\nu} \frac{h}{b} \right) \right] \quad (3.9)$$

Прогиб в центре пластины по теории Кирхгофа, учитывая (1.9), имеет следующий вид:

$$w(0, 0) \approx \frac{64q_0 b^4}{D\pi^5} \quad (3.10)$$

По уточненной теории прогиб пластины можно вычислить по приближенной формуле

$$w(0, 0) \approx \frac{q_0}{D} \frac{64b^4}{\pi^5} \left(1 + \frac{\pi^2 \chi}{2(1-\nu)} \frac{h^2}{b^2} \right) \quad (3.11)$$

При принятом выше допущении (3.6) прогиб пластины в центре имеет вид

$$w_0(0, 0) \approx \frac{64q_0 b^4}{D\pi^5} \quad (3.12)$$

По большинству решения задач уточненная теория приводит к появлению дополнительных членов порядка h^2/b^2 . В формулах (3.8) и (3.9) для рассматриваемой задачи после пренебрежения h^2/b^2 остаются также члены порядка h/b .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.
2. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. М.: Гостехиздат, 1957. 536с.
3. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. /В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел", посв. 80-летию С.А.Амбарцумяна. Ереван: "Гитутюн", 2002. С.67-88.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
5. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. //Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С. 46-58.
6. Жилин П.А. О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин.// Изв. РАН. МТТ.1992. №3. С.48-64с.