ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №4, 2007 Механика

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Багдоев А.Г., Варданян А.В., Варданян С.В.

Ключевые слова: нестационарная, смешанная, граничная, штамп, полупространство.
Keywords: unsteady, mixed, boundary, punch, halfspace.

Ա.Գ. Բագդոև, Ա.Վ. Վարդանյան, Ս.Վ. Վարդանյան

Առաձգական կիսատարածության համար ոչ ստացիոնար խառը եզրային խնդրի լուծումը

Դիտարկվում է իզոտրոպ առաձգական կիսատարածության համար խառը եզրային խնդիր: Ենթադրվում է, որ մի եզրն ազատ է լարումներից, իսկ մյուս եզրում տրված են տեղափոխությունները: Խնդիրը Լապլասի և Ֆուրյեի ձևափոխությունների միջոցով բերվում է երեք հավասարումից բաղկացած Վիներ-Հոպֆի հավասարումների համակարգի: Վերջիններս բերվում են երեք հատ Ֆրեդհոլմի տիպի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի, որը լուծվում է թվային եղանակով: Ստացված են լարումների ինտենսիվությունների գործակիցները:

A.G. Bagdoev, A.V. Vardanyan, S.V. Vardanyan

The solution of non stationary mixed boundary value problem for elastic half space

The problems of solution of elastic half space motion parameters when on its boundary are given mixed conditions in stresses and displacements forms are considered. The solution is obtained by method of integral transforms Laplace and Fourier and solution of three Winner-Hopf equations, which is carried out to system of Fredholm integral equations. The numerical solution is done. The stress intensity coefficients are calculated.

Рассматривается задача определения напряжений на границе упругого полупространства по заданным перемещениям. Решение находится методом интегральных трансформант Лапласа и Фурье, оно приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа, которая решается путем приведения к системе трех интегральных уравнений Фредгольма. Получены численные решения.

1. Постановка задачи и ее сведение к системе Винера-Хопфа. Рассматривается задача движения изотропного, упругого полупространства $z \geq 0$, на границе которого $z = 0$ вдоль полуплоскости $x \geq 0$ заданы перемещения $u_{1,2,3}$, а вне нее граница свободна от напряжений. Эта задача является обобщением задачи [1,2] о передаче перемещений от пластины, контактирующей с полупространством, с учетом граничного условия также и для нормального перемещения. Решение рассматриваемых динамических смешанных граничных задач для полупространства получается методом интегральных преобразований, приводится к системе трех уравнений Винера-Хопфа, или, что то же самое, к векторной задаче Гильберта, которая сводится к системе [3-7] трех интегральных уравнений Фредгольма. Дается численное решение задачи путем обращения интегральных преобразований [8] с определением коэффициентов интенсивности напряжений. В ходе решения используется известная особенность около края, разделяющего граничные условия, которая известна из решения соответствующей статической плоской задачи теории упругости [9]. Динамические задачи о дифракции сдвиговых волн на полубесконечных включениях и конечных трещин другими методами решены в работах [10-12]. Плоская динамическая задача, подобная пространственной задаче [1], решена в [13]. Пространственные стационарные динамические задачи о штампе исследованы другим подходом в [16].

Уравнения теории упругости имеют вид $x_1 = x,\, x_2 = y,\, x_3 = z$,

$$\left(a^2-b^2\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+b^2\Delta u_j=\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

где по повторяющимся индексам суммируется от 1 до 3, $j=1{,}2{,}3$, Δ есть оператор Лапласа, *a, b* есть скорости продольных и поперечных волн.

Граничные условия имеют вид $\left(z=0,|y|<\infty\right)$,

$$\sigma_{zz}=0, \sigma_{xz}=0,\ \sigma_{yz}=0,\ -\infty<x<0 \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &u_1=-P\delta\left(x-\xi'\right)\delta\left(y-\eta'\right)H\left(t\right),\ u_2=-Q\delta\left(x-\xi'\right)\delta\left(y-\eta'\right)H\left(t\right)\\ &u_3=-R\delta\left(x-\xi'\right)\delta\left(y-\eta'\right)H\left(t\right) \qquad\qquad 0<x<\infty \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $\delta(x)-$ дельта-функция Дирака, $H(t)-$ единичная функция Хевисайда, $P,Q,R,\xi',\eta'-$ постоянные. Это есть задача определения функции Грина, из решения которой можно получить решение общей задачи для произвольных условий для $u_{1,2,3}$. $U^{o}_{1,2,3}(t,x,y)$, обозначая полученные далее решения задач (1.2), (1.3)

$$U_j=PU_j^P\left(t,x-\xi',y-\eta'\right)+QU_j^Q+RU_j^R,\ j=1{,}2{,}3$$

соответственно, для перемещений при $z=0$, в виде

$$\begin{aligned} U_j(t,x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{t}\Bigg\{&\frac{\partial U_1^0\left(\tau,\xi'',\eta''\right)}{\partial\tau}U_j^P\left(t-\tau,x-\xi'',y-\eta''\right)+\\ &+\frac{\partial U_2^0\left(\tau,\xi'',\eta''\right)}{\partial\tau}U_j^Q\left(t-\tau,x-\xi'',y-\eta''\right)+\\ &+\frac{\partial U_3^0\left(\tau,\xi'',\eta''\right)}{\partial\tau}U_j^R\left(t-\tau,x-\xi'',y-\eta''\right)\Bigg\}d\tau d\xi'' d\eta'' \end{aligned}$$

В заключительной части статьи приводится также решение для включаемых при $t=0$ постоянных перемещений на поверхности $z=0,\ x>0$, заданных на прямоугольнике, вне которого перемещения отсутствуют. Обозначая через $\overline{U}_j$ преобразование Лапласа по t от u_j, а через $\overline{\overline{U}}_j$ преобразование Фурье по x,y от $\overline{U}_j\Big|_{z=0}$, можно написать решение в виде:

$$\overline{U}_j=\sum_{1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{U}}{}_j^{(n)}\left(\overline{\alpha},\overline{\beta}\right)\exp\left(\overline{\alpha}ix+\overline{\beta}iy+\overline{\gamma}_n iz\right)d\overline{\alpha}d\overline{\beta} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получим соотношения

$$\overline{\gamma}_n=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2}-\overline{\alpha}^2-\overline{\beta}^2},\ s=-i\omega,\ c_1=a,\ c_2=b \tag{1.5}$$

где $s-$ параметр преобразования Лапласа, и

$$\overline{\overline{U}}{}_2^{(1)}=\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)},\ \overline{\alpha}\overline{\overline{U}}{}_1^{(2)}+\overline{\beta}\overline{\overline{U}}{}_2^{(2)}+\overline{\gamma}_2\overline{\overline{U}}{}_3^{(2)}=0,\ \overline{\overline{U}}{}_3^{(1)}=\frac{\overline{\gamma}_1}{\overline{\alpha}}\overline{\overline{U}}{}_1^{(1)} \tag{1.6}$$

Подставляя (1.4) в граничные условия (1.2), (1.3) и обращая преобразования Фурье по x,y, можно получить:

$$i\bar{\bar{U}}_1^{(1)}\frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2-\bar{\gamma}_2^2+\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2}+i\bar{\bar{U}}_1^{(2)}\bar{\gamma}_2+\frac{i\bar{\alpha}\sigma_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2 i\rho}=\frac{\tau_{xz}^-}{b^2\rho}$$

$$i\bar{\bar{U}}_2^{(1)}\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\frac{4\bar{\gamma}_1\bar{\gamma}_2-\bar{\gamma}_2^2+\bar{\alpha}^2+\bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2}+i\bar{\bar{U}}_2^{(2)}\bar{\gamma}_2+\frac{i\bar{\beta}\sigma_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2 i\rho}=\frac{\tau_{yz}^-}{b^2\rho}$$

$$\bar{\bar{U}}_3^{(2)}=-\frac{\bar{\gamma}_2^2-\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}^2}{2\bar{\gamma}_2\bar{\alpha}}\bar{\bar{U}}_1^{(1)}+\frac{\sigma_{zz}^-}{2b^2\bar{\gamma}_2 i\rho}$$

$$\bar{\bar{U}}_1^{(1)}+\bar{\bar{U}}_1^{(2)}=P\varphi_0+U_1^+,\ \frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\bar{\bar{U}}_1^{(1)}+\bar{\bar{U}}_2^{(2)}=Q\varphi_0+U_2^+ \tag{1.7}$$

$$\bar{\bar{U}}_3^{(1)}+\bar{\bar{U}}_3^{(2)}=R\varphi_0+U_3^+,\ \frac{\bar{\gamma}_2^2-\bar{\alpha}^2-\bar{\beta}^2}{2\bar{\alpha}}\bar{\bar{U}}_1^{(1)}-\bar{\alpha}\bar{\bar{U}}_1^{(2)}-\bar{\beta}\bar{\bar{U}}_2^{(2)}=0$$

$$\varphi_0=-\frac{\exp\left(-i\bar{\alpha}\xi'-i\bar{\beta}\eta'\right)}{4\pi^2 s}$$

$$U_{1,2,3}^+=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{0}dx\int_0^{\infty}e^{-st-i\bar{\alpha}x-i\bar{\beta}y}U_{1,2,3}\left(t,x,y,0\right)dt \tag{1.8}$$

$$\tau_{xz,yz}^-,\ \sigma_{zz}^-=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_0^{\infty}dx\int_0^{\infty}e^{-st-i\bar{\alpha}x-i\bar{\beta}y}\tau_{xz,yz},\sigma_{zz}dt$$

где индекс (+) означает функции, аналитические в верхней полуплоскости $\bar{\alpha}$, а индекс (-) – функции, аналитические в нижней полуплоскости.

2. Решение системы Винера-Хопфа. Исключая из (1.7) функции $\bar{\bar{U}}_{1,2,3}$, можно получить систему трех уравнений Винера–Хопфа, которая после введения обозначений в безразмерных переменных величинах

$$\bar{\alpha}=\frac{\omega}{\alpha}\eta,\ \bar{\beta}=\frac{\omega}{\alpha}\lambda,\ \bar{\gamma}_{1,2}=\frac{\omega}{\alpha}\gamma_{1,2},\ \gamma_1=\sqrt{1-\eta^2-\lambda^2},\ \gamma_2=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-\eta^2-\lambda^2}$$

в матричной форме примет вид:

$$A\Phi^+ + B\Phi^- + C=0 \tag{2.1}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0\\ a_1 f & a_0 & 0\\ a_3\eta & a_3\lambda & -1\end{pmatrix},\ B=\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & \chi\lambda\\ 0 & 1 & \chi\eta\\ 0 & 0 & a_2\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$\Phi^+=\gamma_1^+\begin{pmatrix}U_1^+\\ U_2^+\\ U_3^+\end{pmatrix},\ \Phi^-=\frac{ia}{b^2\rho\omega\gamma_1^-}\begin{pmatrix}\tau_{yz}^-\\ \tau_{xz}^-\\ -\sigma_{zz}^-\end{pmatrix},\ C=\gamma_1^+ A\begin{pmatrix}P\\ Q\\ R\end{pmatrix}\varphi_0 \tag{2.3}$$

$$\gamma_1^{\pm}(\eta)=\sqrt{\sqrt{1-\lambda^2}\pm\eta}$$

$$\gamma_2 a_0(\eta)=\left(4\gamma_1\gamma_2-3\gamma_2^2+\eta^2+\lambda^2\right)\lambda\eta$$

$$\gamma_2 a_1(\eta)=4\gamma_1\gamma_2\lambda^2+\left(\gamma_2^2-\lambda^2\right)^2+\eta^2\left(\gamma_2^2+\lambda^2\right) \tag{2.4}$$

$$\gamma_2 a_1(\eta)f(\eta)=4\gamma_1\gamma_2\eta^2+\left(\gamma_2^2-\eta^2\right)^2+\lambda^2\left(\gamma_2^2+\eta^2\right)$$

функции a_0, a_1, f зависят от λ как от параметра. Кроме того, в (2.2)

$$a_2=\frac{b^2}{\gamma_2 a^2}\left(\gamma_1\gamma_2+\eta^2+\lambda^2\right),\ \gamma_2 a_3=\frac{b^2}{a^2}\left(2\gamma_1\gamma_2-\gamma_2^2+\eta^2+\lambda^2\right)$$

$$\gamma_2\chi=\frac{b^2}{a^2}\left(2\gamma_1\gamma_2-\gamma_2^2+\eta^2+\lambda^2\right) \tag{2.5}$$

Система Винера-Хопфа (2.1) запишется в виде задачи Гильберта

$$\Phi^+=G\Phi^-+g \tag{2.6}$$

где

$$G=-A^{-1}B,\ g=-\gamma_1^+\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}\varphi_0 \tag{2.7}$$

Следует отметить, что в первоначальной переменной $\overline{\alpha}$ матрица $G(\overline{\alpha})$ имеет в знаменателе множители $\left(\overline{\alpha}-\frac{\omega}{C_R}\right)\left(\overline{\alpha}+\frac{\omega}{C_R}\right)$, где C_R есть скорость волн Релея. Однако, как показано в [14,15], параметр ω в преобразовании Лапласа может быть предположен комплексным с малой положительной мнимой частью, и поэтому $G(\overline{\alpha})$ для действительных $\overline{\alpha}$ не имеет особенностей. Эти факты относятся также к точкам ветвления $\pm\frac{\omega}{a},\pm\frac{\omega}{b}$. Переходя к безразмерной переменной η, можно интегрирование по ξ проводить вблизи отмеченных точек $\pm\frac{a}{C_R},\pm 1,\pm\frac{a}{b}$ в комплексной плоскости, и снова $G(\xi)$ не имеет особенностей и теория [3] применима.

Решение уравнения (2.6) можно найти в виде [3]

$$\Phi(\eta)=\frac{X(\eta)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{X^+(\xi)\right\}^{-1}\frac{g(\xi)}{\xi-\eta}d\xi \tag{2.8}$$

где матрицы $X=X^+X^-$ удовлетворяют однородной задаче Гильберта

$$X^+=GX^- \tag{2.9}$$

или в форме факторизации

$$G=X^+\left(X^-\right)^{-1} \tag{2.10}$$

Как показано в [3], задача определения X^- может быть приведена к системе интегральных уравнений Фредгольма

$$X^{-}(\eta)-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G^{-1}(\eta)G(\xi)-E}{\xi-\eta}X^{-}(\xi)\,d\xi=\gamma(\eta) \tag{2.11}$$

где матрица $\gamma(\eta)$ представляет собой аналитическое поведение $X^{-}(\eta)$ для больших η.

3. Численное решение граничных задач. Таким образом, нужно факторизовать матрицу $G(\eta)$, которая на прямой $(-\infty,\infty)$ удовлетворяет условию H, но проверив ее поведение для $\eta\approx\infty$.

Из (2.4), (2.5) получится

$$a_0\approx\frac{2\frac{b^2}{a^2}-1}{i}\lambda\,\mathrm{sgn}\,\eta,\; a_1\approx i|\eta|$$
$$a_1 f\approx\frac{2\frac{b^2}{a^2}-1}{i}|\eta|,\;\; a_2\approx\frac{\frac{b^2}{a^2}+1}{2i|\eta|} \tag{3.1}$$
$$a_3\approx\frac{b^2}{a^2 i|\eta|},\;\chi=\frac{b^2}{a^2 i|\eta|}$$

и из (2.2) получится

$$A\approx\begin{pmatrix} 2\frac{1+\frac{b^2}{a^2}}{i}\lambda\,\mathrm{sgn}\,\eta & i|\eta| & 0\\ 2\frac{1+\frac{b^2}{a^2}}{i}|\eta| & 2\frac{1+\frac{b^2}{a^2}}{i|\eta|}\lambda & -1\\ \frac{b^2}{a^2 i}\mathrm{sgn}\,\eta & 2\frac{1+\frac{b^2}{a^2}}{i|\eta|}\lambda & -1\end{pmatrix},\;\; B\approx\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{b^2}{a^2 i|\eta|}\lambda\\ 0 & 1 & \frac{b^2}{a^2 i}\mathrm{sgn}\,\eta\\ 0 & 0 & \frac{1+\frac{b^2}{a^2}}{2i|\eta|}\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Отсюда можно получить, учитывая, что из (2.7) в основном порядке члены с λ не дадут вклада в G.

$$G(\eta)\approx\frac{1}{2\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)}\begin{pmatrix}0 & 1 & -i\frac{b^2}{a^2}\mathrm{sgn}\,\eta\\ 2-2\frac{b^2}{a^2} & 0 & 0\\ 0 & -i\frac{b^2}{a^2}\mathrm{sgn}\,\eta & -1\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Как видно, матрица $G(\eta)$ имеет разрыв первого рода при $\eta=\pm\infty$, который следует устранить. Согласно [3] можно получить особенность решения системы (2.1), вводя $\kappa=\frac{1}{\eta}$ при $\kappa=\pm 0$, изучая уравнение

$$\left|G^{-1}(+0)G(-0)-\overline{\lambda}E\right|=0 \tag{3.4}$$

Тогда, с учетом (3.3) получится

$$\overline{\lambda}_1 = 1,\ \overline{\lambda}_2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2},\ \overline{\lambda}_3 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tag{3.5}$$

и если полагать $\overline{\lambda} = e^{2\pi s_2}$, особенность решения будет [3]

$$\eta^{-\frac{1}{2}},\ \eta^{-\frac{1}{2}\mp is_2},\ s_2 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tag{3.6}$$

что соответствует, после обратного преобразования по x, особенности при $x \approx 0,\ x^{-1/2},\ x^{-1/2 \pm is_2}$, последняя известна для решения плоской задачи о штампе [9].

Из (2.1) можно в раскрытом виде записать, полагая $\left(\tau_{yz}^-, \tau_{xz}^-, \sigma_{zz}^-\right) = \frac{\omega}{a}\left(\overline{\tau}_{yz}^-, \overline{\tau}_{xz}^-, \overline{\sigma}_{zz}^-\right)$,

$$a_0 U_1^+ \gamma_1^+ + a_1 U_2^+ \gamma_1^+ - \frac{\overline{\tau}_{yz}^- \gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + a_3\lambda \frac{\overline{\sigma}_{zz}^- \gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + P\varphi_0 a_0 \gamma_1^+ + Q\varphi_0 a_1 \gamma_1^+ = 0$$

$$a_1 f U_1^+ \gamma_1^+ + a_0 U_2^+ \gamma_1^+ - \frac{\overline{\tau}_{xz}^- \gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + a_3\eta \frac{\overline{\sigma}_{zz}^- \gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + a_1 f P\varphi_0 \gamma_1^+ + Q\varphi_0 a_0 \gamma_1^+ = 0 \tag{3.7}$$

$$a_3 \eta U_1^+ \gamma_1^+ + a_3 \lambda U_2^+ \gamma_1^+ - U_3^+ \gamma_1^+ +$$

$$+ a_2 \frac{\overline{\sigma}_{yz}^- \gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + P\varphi_0 a_3 \eta \gamma_1^+ + Q\varphi_0 \lambda a_3 \gamma_1^+ - R\varphi_0 \gamma_1^+ = 0$$

В силу (3.1) для $|\eta| \sim \infty$ в первом уравнении в основных порядках получится

$$U_2^+ \gamma_1^+ + \frac{i\overline{\tau}_{yz}^-}{b^2 \rho \gamma_1^-} + \gamma_1^+ \varphi_0 Q = 0 \tag{3.8}$$

Отсюда видно, что задача для компонент перемещений и напряжений по оси y разделяется от задачи для соответствующих компонент по осям x, z, причем для первой задачи в соответствии с первым корнем в (3.5), имеет место непрерывное на оси η значение коэффициента для $U_2^+ \gamma_1^+$, $\frac{\overline{\tau}_{yz}^-}{\gamma_1^-}$ при $|\eta| \approx \infty$, и получится порядок этих решений $\frac{1}{\eta}$, т.е. для τ_{yz} особенность $x^{-\frac{1}{2}}$. Оставшиеся два уравнения для $|\eta| \approx \infty$ дают при удерживании только слагаемых, влияющих на особенность, после отбрасывания свободных членов с φ_0

$$2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) U_1^+ \gamma_1^+ - \frac{\overline{\tau}_{xz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-} - i\frac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn}\eta \frac{\overline{\sigma}_{zz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-} = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \frac{\overline{\sigma}_{zz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-} + \frac{b^2}{a^2 i}\operatorname{sgn}\eta\, U_1^+ \gamma_1^+ - U_3^+ \gamma_1^+ = 0$$

Отсюда получаются уравнения

$$U_1^+\gamma_1^+ - i\frac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn}\eta U_3^+\gamma_1^+ = \frac{1}{2}\frac{\overline{\tau}_{xz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$\frac{b^2}{a^2} i\operatorname{sgn}\eta U_1^+\gamma_1^+ + U_3^+\gamma_1^+ = \frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\overline{\sigma}_{zz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-} \quad (3.9)$$

Обозначая [12]

$$\left(U_1^+ \pm iU_3^+\right)\gamma_1^+ = V_{1,2}^+, \quad \frac{\overline{\tau}_{xz}^- \pm i\overline{\sigma}_{zz}^-}{2b^2 i\rho\gamma_1^-}\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right) = \Omega_{1,2}^- \quad (3.10)$$

можно из (3.9) получить скалярные уравнения

$$V_1^+ - \frac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn}\eta V_1^+ = \Omega_1^-, \quad V_2^+ + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{sgn}\eta V_2^+ = \Omega_2^- \quad (3.11)$$

Каждое уравнение является скалярной однородной задачей Гильберта с разрывными коэффициентами при $\frac{1}{\eta} = \pm 0$:

$$V_1^+\overline{g}(\eta) = \Omega_1^-, \; V_2^+\overline{g}(-\eta) = \Omega_2^- \quad (3.12)$$

Отношения коэффициентов в левых частях в точке $\frac{1}{\eta} = -0$ к их значениям в точке $\frac{1}{\eta} = +0,$ будут соответственно, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, причем для $|\eta| \approx \infty$ выражение $\left(\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)^{2is_2} = e^{2is_2\left(\ln\left|\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right| + i\arg\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}\right)}$, $\arg\frac{\gamma_1^-}{\gamma_1^+}$ изменится при движении от $\eta = -\infty$ до $\eta = \infty$, от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ и отношение указанного выражения при $\eta = -\infty$ к значению при $\eta = \infty$ будет $e^{2\pi s_2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, поэтому, умножив (3.11), соответственно, на $\left(\gamma_1^- / \gamma_1^+\right)^{\pm 2is_2}$, получим непрерывные коэффициенты $\overline{g}_1(\pm\eta) = \overline{g}(\pm\eta)\left(\gamma_1^- / \gamma_1^+\right)^{\pm 2is_2}$ уравнений (3.12) для функций $\tilde{\phi}^+, \tilde{\psi}^+, \Omega_{3,4}^-$ где

$$V_1^+ = \tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2}, \; V_2^+ = \tilde{\psi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2}$$
$$\Omega_1^- = \Omega_3^-\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2}, \; \Omega_2^- = \Omega_4^-\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2} \quad (3.13)$$

Приведенные соотношения об изменении аргументов степеней $\gamma_1^\pm$ после формулы (3.12) наглядны для размерных функций $\overline{\gamma}_1^\pm(\overline{\alpha}) = \sqrt{\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \overline{\beta}^2} \pm \overline{\alpha}}$, для которых $\overline{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2} - \overline{\beta}^2}$ значения находятся в верхней и нижней полуплоскостях, и остаются в силе для безразмерных функций $\gamma_1^{\pm}(\eta)$.

Из (3.10), (3.13) можно получить

$$U_1^+\gamma_1^+ = \frac{1}{2}\tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2} + \frac{1}{2}\tilde{\psi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2}, \quad U_3^+\gamma_1^+ = \frac{1}{2i}\tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2} - \frac{1}{2i}\tilde{\psi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2} \quad (3.14)$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\bar{\tau}_{xz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-} = \Omega_3^-\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2} + \Omega_4^-\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2}, \quad \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{\bar{\sigma}_{zz}^-}{b^2\rho\gamma_1^-} = \Omega_3^-\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2} - \Omega_4^-\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2}$$

и подставить в исходную систему (3.7), которую следует записать для функций $\tilde{\phi}^+, \tilde{\psi}^+, \Omega_{3,4}^-$ и преобразовать подобно преобразованию для больших η системы (3.9).

Первое уравнение (3.7) дает, с учетом того, что U_2^+ и $\bar{\tau}_{yz}^-$ не заменяются,

$$\frac{1}{2}a_0\tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2} + \frac{1}{2}a_0\tilde{\psi}\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2} + a_1U_2^+\gamma_2^+ - \frac{\bar{\tau}_{yz}^-\gamma_1}{b^2 i\rho\gamma_1^-} - a_3\lambda\frac{i\gamma_1}{2}\Omega_3^-\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2} +$$

$$+a_3\lambda\frac{i\gamma_1}{2}\Omega_4^-\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2} + P\varphi_0a_0\gamma_1^+ + Q\varphi_0a_1\gamma_1^+ = 0 \quad (3.15)$$

Так же, как при выводе (3.9), следует подставить из третьего уравнения (3.7) первое слагаемое во второе уравнение и получить

$$\left(a_2a_1f - a_3^2\eta^2\right)U_1^+\gamma_1^+ + a_3\eta U_3^+\gamma_1^+ + \left(a_0a_2 - a_3^2\eta\lambda\right)U_2^+\gamma_1^+ = \frac{\bar{\tau}_{xz}^-\gamma_1a_2}{b^2 i\rho\gamma_1^-} +$$

$$+\left(a_3^2\eta^2 - a_1f\right)P\varphi_0\gamma_1^+ + \left(a_3^2\eta\lambda - a_0\right)Q\varphi_0\gamma_2^+ - a_3\eta R\varphi_0\gamma_1^+ \quad (3.16)$$

Следует совместно решать систему (3.15), (3.16) и третье уравнение (3.7), причем последние два уравнения в переменных (3.10), (3.13) примут вид:

$$\frac{1}{2}\tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2}\left(a_2a_1f - a_3^2\eta^2 + \frac{a_3\eta}{i}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2}\left(a_2a_1f - a_3^2\eta^2 - \frac{a_3\eta}{i}\right) +$$

$$+\left(a_0a_2 - a_3^2\eta\lambda\right)\gamma_1^+U_2^+ = \frac{\gamma_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\Omega_3^-\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2}a_2 + \frac{\gamma_2}{\frac{b^2}{a^2}+1}\Omega_4^-\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2}a_2 +$$

$$+\left(a_3^2\eta^2 - a_1f\right)P\varphi_0\gamma_1^+ + \left(a_3^2\eta\lambda - a_0\right)Q\varphi_0\gamma_1^+ - a_3\eta R\varphi_0\gamma_1^+ \quad (3.17\text{а})$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\phi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2}\left(a_3\eta - \frac{1}{i}\right) + \frac{1}{2}\tilde{\psi}^+\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2}\left(a_3\eta + \frac{1}{i}\right) +$$

$$+a_3\lambda\gamma_1^+U_2^+ = -\frac{\gamma_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\frac{a_2}{i}\Omega_3^-\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2} + \frac{\gamma_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\frac{a_2}{i}\Omega_4^-\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2} - \quad (3.17\text{в})$$

$$-a_3\eta P\varphi_0\gamma_1^+ - a_3\lambda Q\varphi_0\gamma_1^+ + R\varphi_0\gamma_1^+$$

далее следует к (3.17а) прибавить и вычесть, умноженное на i, (3.17в), тогда получится система

$$\frac{1}{2}\tilde{\phi}^{+}\left(\gamma_1^{+}\right)^{-2is_2}\left(a_2a_1f-a_3^2\eta^2-1\right)+\frac{1}{2}\tilde{\psi}^{+}\left(\gamma_1^{+}\right)^{2is_2}\left(a_2a_1f-a_3^2\eta^2+2ia_3\eta+1\right)+$$

$$+\left(a_0a_2-a_3^2\eta\lambda+ia_3\lambda\right)\gamma_1^{+}U_2^{+}=\frac{2\gamma_2}{(b/a)^2+1}\Omega_4^{-}\left(\gamma_1^{-}\right)^{2is_2}a_2+ \tag{3.18а}$$

$$+\left(a_3^2\eta^2-a_1f-ia_3\eta\right)P\varphi_0\gamma_1^{+}+\left(a_3^2\eta\lambda-a_0-ia_3\lambda\right)Q\varphi_0\gamma_1^{+}+\left(i-a_3\eta\right)R\varphi_0\gamma_1^{+}$$

$$\frac{1}{2}\tilde{\phi}^{+}\left(\gamma_1^{+}\right)^{-2is_2}\left(a_2a_1f-a_3^2\eta^2+2\frac{a_3\eta}{i}+1\right)+\frac{1}{2}\tilde{\psi}^{+}\left(\gamma_1^{+}\right)^{2is_2}\left(a_2a_1f-a_3^2\eta^2-1\right)+$$

$$+\left(a_0a_2-a_3^2\eta\lambda-ia_3\lambda\right)\gamma_1^{+}U_2^{+}=\frac{2a_2\gamma_2}{(b/a)^2+1}\Omega_3^{-}\left(\gamma_1^{-}\right)^{-2is_2}+ \tag{3.18в}$$

$$+\left(a_3^2\eta^2-a_1f+ia_3\eta\right)P\varphi_0\gamma_1^{+}+\left(a_3^2\eta^2-a_0+ia_3\lambda\right)Q\varphi_0\gamma_1^{+}-\left(i+a_3\eta\right)R\varphi_0\gamma_1^{+}$$

Система (3.15), (3.18а), (3.18в) связывает векторы

$$\phi_1^{+}=\begin{pmatrix}\tilde{\phi}^{+}\\ \tilde{\psi}^{+}\\ \bar{U}_2^{+}\gamma_1^{+}\end{pmatrix},\quad \phi_1^{-}=\begin{pmatrix}\Omega_3^{-}\\ \Omega_4^{-}\\ \dfrac{\bar{\tau}_{yz}^{-}}{b^2 i\rho\gamma_1^{-}}\end{pmatrix} \tag{3.19}$$

При $|\eta|\approx\infty$ из (3.18а) выпадает $\tilde{\phi}^{+}$, а из (3.18в) выпадает $\tilde{\psi}^{+}$, что согласуется с (3.9). Систему (3.18а), (3.18в), (3.15) можно записать в виде:

$$A_1\phi_1^{+}+B_1\phi_1^{-}+C_1=0 \tag{3.20}$$

где

$A_1=\left(a_{ij}\right),\ B_1=\left(b_{ij}\right),\ i,j=1,2,3$

$$a_{11}=\frac{1}{2}\left(a_2a_1f-a_3^2\eta^2-1\right)\left(\gamma_1^{+}\right)^{-2is_2},\ a_{12}=\frac{1}{2}\left(a_2a_1f-a_3^2\eta^2+2ia_3\eta+1\right)\left(\gamma_1^{+}\right)^{2is_2}$$

$$a_{13}=a_0a_2-a_3^2\eta\lambda+ia_3\lambda,\quad a_{21}=\frac{1}{2}\left(a_2a_1f-a_3^2\eta^2-2ia_3\eta+1\right)\left(\gamma_1^{+}\right)^{-2is_2}$$

$$a_{22} = \frac{1}{2}\left(a_0 a_1 f - a_3^2\eta^2 - 1\right)\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2}, \quad a_{23} = a_0 a_2 - a_3^2\eta\lambda - ia_3\lambda$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}a_0\left(\gamma_1^+\right)^{-2is_2}, \quad a_{32} = \frac{1}{2}a_0\left(\gamma_1^+\right)^{2is_2}, \ a_{33} = a_1, \ b_{11} = 0$$

$$b_{12} = -\frac{2a_2\gamma_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2}, \ b_{13} = 0, \ b_{21} = -\frac{2a_2\gamma_1}{\frac{b^2}{a^2}+1}\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2}, \ b_{22} = 0 \qquad (3.21)$$

$$b_{23} = 0, \ b_{31} = -\frac{a_3\lambda i\gamma_1}{2}\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2}, \ b_{32} = \frac{a_3\lambda i\gamma_1}{2}\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2}, \ b_{33} = -\gamma_1$$

$$C_1 = -\varphi_0\gamma_1^+\begin{pmatrix} a_3^2\eta^2 - a_1 f - ia_3\eta & a_3^2\eta\lambda - a_0 - ia_3\lambda & -a_3\eta + i \\ a_3^2\eta^2 - a_1 f + ia_3\eta & a_3^2\eta\lambda - a_0 + ia_3\lambda & -a_3\eta - i \\ -a_0 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

Систему (3.20) можно привести к задаче Гильберта (2.6), (2.7), где следует у всех векторов и матриц ставить нижний номер 1. При этом, как следует из вышеприведенных исследований для $|\eta| \approx \infty$, матрица $G_1(\eta)$ непрерывна на всей оси с нулевым индексом и постоянная на бесконечности. Тогда, согласно [3], можно для $X_1^-(\eta)$ получить систему интегральных уравнений Фредгольма:

$$X_1^-(\eta) - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_1^-(\eta)G_1(\xi) - E}{\xi - \eta}X_1^-(\xi)d\xi = \gamma(\eta) \qquad (3.22)$$

причем можно считать матрицу $\gamma(\eta)$ постоянной, $\gamma(\eta) = E$, где $\mathbf{G_1} = -\mathbf{A_1^{-1}B_1}$. Выбираются в безразмерной переменной интегрирования ξ пределы (-5, 5) и для η интервал (-5,5) и проводится численное интегрирование системы (3.22), (3.21) по программе Mathematica 5, причем получены элементы матрицы 3-го порядка $\mathbf{X_1^-}(\eta)$. Для проверки точности выбора интервала по ξ (-5, 5) взят также интервал интегрирования (-10, 10), причем результаты расчетов $\mathbf{X_1^-}(\eta)$ для интервала по η (-5, 5) оказались близкими к полученным выше. Затем из алгебраической системы $\mathbf{X_1^+} = \mathbf{G_1X_1^-}$ найдены $\left\{\mathbf{X_1^+}\right\}^{-1}$. Тогда можно найти по аналогии с (2.8) $\mathbf{\Phi_1^-}(\eta) = \frac{\mathbf{X_1^-}(\eta)}{\mathbf{2\pi i}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathbf{X_1^+}(\xi)\right\}^{-1}\frac{\mathbf{g}(\xi)}{\xi-\eta}\mathbf{d}\xi$. Учитывая это значение, а также (3.14), (3.19), можно провести обратное преобразование Лапласа и Фурье, и при $z = 0, x > 0$ получить напряжения в виде:

$$\frac{a}{b^2\rho}\begin{pmatrix}\tau_{xz}\\ \sigma_{zz}\\ \dfrac{2\tau_{yz}}{\dfrac{b^2}{a^2}+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}s^2ds\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\eta e^{-\frac{s}{\alpha}\eta x-\frac{s}{\alpha}\lambda y}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\xi e^{\frac{s}{\alpha}\xi\xi'}e^{\frac{s}{\alpha}\lambda\eta'}X_1^-(\eta)\bullet$$

$$\bullet\frac{2}{\dfrac{b^2}{a^2}+1}\frac{\gamma_1^-(\eta)}{\xi-\eta}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2} & \left(\gamma_1^-\right)^{2is_2}\\ \dfrac{1}{i}\left(\gamma_1^-\right)^{-2is_2} & -\dfrac{1}{i}\left(\gamma_1^-\right)^{2is_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\Omega}_3^-\\ \tilde{\Omega}_4^-\end{pmatrix}\\ \dfrac{\tilde{\tau}_{yz}}{b^2 i\rho\gamma_1^-}\end{pmatrix}\tag{3.23}$$

$$\begin{pmatrix}\tilde{\Omega}_3^-\\ \tilde{\Omega}_4^-\\ \dfrac{\tilde{\tau}_{yz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-}\end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi^2}\left\{X_1^+(\xi)\right\}^{-1}\gamma_1^+(\xi)\begin{pmatrix}P\\ Q\\ R\end{pmatrix}\tag{3.24}$$

Вычисляя первый интеграл, а затем интеграл от $\delta\left(t-\frac{\eta x}{a}+\frac{\xi'\xi}{a}-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}\right)$, можно получить при $z=0$ напряжения под штампом в виде двукратных интегралов. В случае $z=0$, $x>0$, $x\approx 0$, получится решение вблизи края

$$\eta_0=\frac{t+\dfrac{\xi'\xi}{a}-\lambda\dfrac{y-\eta_1}{a}}{x}a,\ \gamma_1^-(\eta_0)\approx i\eta_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a}{b^2\rho}\begin{pmatrix}\tau_{xz}\\ \sigma_{zz}\\ \dfrac{2}{\dfrac{b^2}{a^2}+1}\tau_{yz}\end{pmatrix}=\frac{1}{2\pi^3}\frac{1}{\dfrac{b^2}{a^2}+1}\mathrm{Re}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}iI_1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}iI_2\\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}I_1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}I_2\\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}iI_3\end{pmatrix}\tag{3.25}$$

где

$$I_{1,2}=i^{\mp 2is_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{-5}^{5}d\lambda\int\limits_{-5}^{5}d\xi\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi'}{a}\xi\right)^{-\frac{1}{2}\mp is_2}\tilde{\Omega}_{3,4}^-$$

$$I_3=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_{-5}^{5}d\lambda\int\limits_{-5}^{5}d\xi\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi'}{a}\xi\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\tilde{\tau}_{yz}^-}{b^2 i\rho\gamma_1^-}$$

и согласно свойствам преобразования Лапласа

$$t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi'}{a}\xi>0 \tag{3.26}$$

проведены расчеты по формулам (3.22)-(3.25), причем вычислены интегралы, в которых опущен $\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$. Расчеты интегралов проводятся на компьютере по вышеуказанной программе.

Для значений $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3},\ y=0,\ t=0.1,\ \frac{\xi'}{at}=0.2,\ \frac{\eta'}{at}=0.2$ результаты расчетов для $I_{1,2,3}$ коэффициентов при (P,Q,R) даны в табл. 1.

Таблица 1

	P	**Q**	**R**
I_1	-11384.5-37286.9 ***i***	-5410440 -914067 ***i***	-1593.92+654.23 ***i***
I_2	-104.866+120.574 ***i***	-2964.81+31720.2 ***i***	-69.0587+26.5321 ***i***
I_3	-13757.5+4982.91 ***i***	-118745.-160854 ***i***	84065.1 +508648 ***i***

В случае заданных граничных перемещений вместо (1.2), (1.3) в виде

$$z=0,\ \tau_{xz}=0,\ \tau_{yz}=0,\ \sigma_{zz}=0,\ -\infty<x<0$$

$$(u_1,u_2,u_3)=-(P,Q,R)H(\eta_1-|y|)H(\xi_0-x)H(t)$$

$$0<x<\infty$$

где η_1, ξ_0 – постоянные, получится в (1.7)

$$\varphi_0=-\frac{\exp(-i\overline{\beta}\eta_1)-\exp(i\overline{\beta}\eta_1)}{4\pi^2 s\overline{\alpha}\overline{\beta}}\{1-\exp(-i\overline{\alpha}\xi_0)\}$$

Следует отметить, что граничные значения $u_{1,2,3}$ на линиях $x=\xi_0$, $|y|=\eta_1$ имеют разрывы, однако всегда можно их слегка сгладить, полагая, например,

$$H(\xi_0-x)\approx(\xi_0-x)_+^\alpha,\ \text{где}\ (\xi_0-x)_+^\alpha=\begin{cases}(\xi_0-x)^\alpha, x<\xi_0\\ 0, x>\xi_0\end{cases}$$

есть известная обобщенная функция, и в пределе полагать $\alpha=0$. При этом вся процедура решения не меняется, только в результирующих формулах следует в φ_0 под интегралами сделать соответствующие изменения, которые в силу сходимости интегралов в указанном предельном переходе вблизи края $z=0,\ x\approx 0,\ |y|<\infty$ снова дадут решение, полученное в работе.

Тогда, повторяя все выкладки, можно показать, что $X_1^-(\eta)X_1^+(\eta)$ будут прежними, а при $z=0, x\approx 0$, из (2.3), в котором делится на $-s^2$, экспонента в интеграле по λ заменяется на $\left\{e^{-\frac{s}{a}\lambda(y-\eta_1)}-e^{\frac{s}{a}\lambda(y+\eta_1)}\right\}$ и ставится $\frac{1}{\lambda}$, в (3.24) добавится множитель $\frac{1}{\xi}\left(e^{\xi_0 \frac{s}{a}\xi}-1\right)$, получится

$$a^3\,\frac{\frac{b^2}{a^2}+1}{2b^2\rho}\begin{pmatrix}\tau_{xz}\\ \sigma_{zz}\\ \frac{2}{\frac{b^2}{a^2}+1}\tau_{yz}\end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Re}\begin{pmatrix}\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}\left(I_4-I_4'\right)+\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}\left(I_5-I_5'\right)\right)\\ \frac{1}{\pi}\left(-i\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}+is_2}\left(I_4-I_4'\right)+i\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-is_2}\left(I_5-I_5'\right)\right)\\ \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(I_6-I_6'\right)\end{pmatrix} \qquad (3.27)$$

$$I_{4,5}=\int_{-5}^{5}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_{-5}^{5}\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi_0}{a}\xi\right)^{-\frac{1}{2}\mp is_2}\frac{1}{2}(-1)^{\mp is_2}\,\tilde{\Omega}_{3,4}^{-}\frac{d\xi}{\xi}$$

$$I_6=\int_{-5}^{5}\frac{d\lambda}{\lambda}\int_{-5}^{5}\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}+\frac{\xi_0}{a}\xi\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\tilde{\tau}_{yz}^{-}}{b^2\rho i\gamma_1^{-}}d\xi$$

при этом , $I_{4,5,6}'$ получатся заменой η_1 на $-\eta_1$.

Третью граничную задачу можно задать в виде условий (1.2) и $u_{1,2,3}=-\left(P,Q,R\right)H\left(\eta_1-|y|\right)H(t),\ \mathbf{x}>\mathbf{0}$.

Тогда

$$\varphi_0=-\frac{e^{-i\overline{\beta}\eta_0}-e^{i\overline{\beta}\eta_0}}{4\pi^2\overline{\alpha}\overline{\beta}s}$$

В видоизмененном интеграле (3.23) имеется единственный полюс [12] $\xi=0$ и получится

$$\begin{pmatrix}\Omega_3^{-}\\ \Omega_4^{-}\\ \frac{\tau_{yz}^{-}}{b^2\rho i\gamma_1^{-}}\end{pmatrix}=\frac{X_1^{-}(\eta)}{\eta}\left\{X_1^{+}(0)\right\}^{-1}\gamma_1^{+}(0)\begin{pmatrix}P\\ Q\\ R\end{pmatrix}$$

Тогда в (3.27) следует считать $I_{4,5}\to I_{7,8}$, $I_{4,5}'\to I_{7,8}'$, $I_6\to I_9$, $I_6'\to I_9'$,

$$I_{7,8}=\int_{-5}^{5}\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}\mp is_2}\frac{1}{2}(-1)^{\mp is_2}\,\tilde{\tilde{\Omega}}_{3,4}^{-}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$I_{7,8}'$ получатся заменой η_1 на $-\eta_1$.

$$I_9=\int_{-5}^{5}\left(t-\lambda\frac{y-\eta_1}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\overline{\overline{\tau}}_{yz}^{-}}{b^2\rho i\gamma_1^{-}}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_3 \\ \tilde{\Omega}_4 \\ \dfrac{\tilde{\tau}_{yz}^{-}}{b^2\rho i\gamma_1^{-}} \end{pmatrix} = 2\pi i\left\{X_1^{+}(0)\right\}^{-1}\gamma_1^{+}(0)\begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$$

В виде таких же квадратур получится и решение вдоль всей полуплоскости $z=0$, $x>0$, при этом в случае наличия вместо множителя $\mathbf{H(t)}$ произвольной функции $f(t)$ в (1.3) для компонент смещения $U_{1,2,3}$ решение для напряжений найдется из полученных выше в форме свертки, а затем из уравнения движения системы численно может быть найден закон его движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А.Г., Мартиросян А.Н., Погосян С.М. Решение смешанной динамической задачи для упругого полупространства// Докл. НАН РА. 2005. Т.105. № 4. С. 46-53.
2. Петросян С.З. Об одном классе смешанных задач для неоднородного по степенному закону упругого полупространства. /Кандидатская диссертация. Институт механики НАН Армении. Ереван. 2002.
3. Векуа Н.П. Система сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 379с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511с.
5. Plemelj J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe, Monatsch. für Math. und Phzs. XIX, 1908, 211-245.
6. Hilbert D. Grundzuge der Integralgluchungen. Drittles Abschuft. 1912. Leipzig-Berlin.
7. Гахов Ф.Д. Краевая задача Римана для систем функций // УМН. 1952.Т.7. Вып. 4. С. 3-54.
8. Багдоев А.Г. Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т.27. №2. С. 15-23.
9. Adrian Loghin, Paul F. Joseph Asymptotic solution for mixed mode loading of cracks and wedges in power law hardening materials // Engineering Fracture Mechanics. 68. 2001. 1511-1534.
10. Саркисян В.С., Караханян И.М. Дифракция сдвиговых упругих гармонических волн на полубесконечных включениях // В сб.: Проблемы механики тонких деформируемых тел. Ереван: Изд-во НАН Армении. 2002. С. 266-280.
11. Агаян К.Л., Григорян Э. Х.., Джилавян С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С. 35-47.
12. Hakobyan V.N., Sahakyan A.V., Sargsyan A.H. The plane deformation state of elastic plane with finite rigid inclusion under harmonic loading.// V International conference October 1-7, Goris, 2005, The problems of dynamics of interaction of deformable media, 61-65pp.
13. Флитман Л.М. Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 4. С. 497-505.
14. Baker B.R. Dynamic stresses created by a moving crack // Trans. ASME Ser. E. J. Applied Mechanics. 1962. Vol. 29. №3.
15. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1949. 635с.

16. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.10.2006