ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 60, №4, 2007 Механика

УДК 539.3, 624.04

СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ И ВНУТРЕННЕЙ ТРЕЩИНОЙ

Бабоян А.А., Багдасарян А.В.

Ключевые слова: полуплоскость, отверстие, трещина, напряжение, перемещение.
Key words: half-plane, opening, crack, tension, displacement.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ Բաղդասարյան

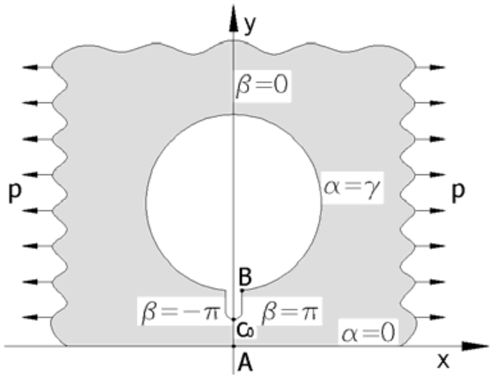
Համաչափ խնդիր կլոր անցքով և ներքին ճաքով թուլացված կիսահարթության համար

Բերվում է կլոր անցքով և կիսահարթության եզրին ուղղահայաց ուղղաձիգ ներքին ճաքով թուլացված կիսահարթության համար առաձգականության տեսության խնդրի լուծումը: Անցքի և կիսահարթության եզրերին, ինչպես նաև ճաքի ափերին ազդում են սիմետրիկ բաշխված նորմալ բեռնվածքներ: Անվերջության վրա կիսահարթությունը ձգվում է հավասարաչափ բաշխված p ինտենսիվության բեռնվածքով (նկար-1):

A.H. Babloyan, A.V. Baghdasaryan

Symmetric Problem of Elasticity Theory for a Half-Plane Weakened with a Round Opening and an Internal Crack

The article presents the solution of a symmetric problem of elasticity theory for an elastic half-plane weakened by a round opening and a rectilinear internal crack, the latter being perpendicular to the edge of the half-plane. Symmetrically distributed normal loadings are given at the edges of the opening, the half-plane and banks of the split. On the infinity the half-plane spreads by equally distributed loadings with ***p*** intensity (fig.1) **.**



Фиг.1

Приводится решение задачи теории упругости для упругой полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и внутренней прямолинейной трещиной, перпендикулярной к границе полуплоскости. Трещина начинается от края отверстия и продолжается до точки $\mathbf{c_0}$. На границах отверстия, полуплоскости и на берегах трещины задаются симметрично распределенные нормальные нагрузки. На бесконечности полуплоскость растягивается равномерно распределенными нагрузками интенсивности **p** (фиг.1).

Задачу будем решать методом Фурье с использованием биполярной системы координат [1].

$$x = \frac{a\sin\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad x + iy = ai\operatorname{cth}\frac{\alpha + i\beta}{2} \tag{1}$$

Граничные условия для половины области будут:

$$\begin{gathered} a\sigma_\alpha(0,\beta) = f_1(\beta), \quad a\sigma_\alpha(\gamma,\beta) = f_2(\beta), \quad (0 \le \beta \le \pi) \\ \tau_{\alpha\beta}(0,\beta) = 0, \quad \tau_{\alpha\beta}(\gamma,\beta) = 0, \quad (0 \le \beta \le \pi), \quad \tau_{\alpha\beta}(\alpha,\pi) = 0, \quad (0 \le \alpha \le \gamma) \end{gathered} \tag{2}$$

$$a\sigma_\beta(\alpha,\pi) = f_0(\alpha), \quad (c_0 \le \alpha \le \gamma), \quad \mathrm{v}(\alpha,\pi) = \mathrm{v}_0, \quad (0 \le \alpha \le c_0) \tag{3}$$

Бигармоническую функцию Эйри ищем в виде

$$g\Phi(\alpha,\beta) = \Phi_0(\alpha,\beta) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\beta)\cos\delta_m\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(\alpha)\cos n\beta \tag{4}$$

Функции Φ_0, $a_m(\beta)$ и $b_n(\alpha)$, а также формулы для напряжений и перемещений приведены в работах [–3]. Удовлетворяя граничным условиям и рассматривая полученные соотношения как неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка, после ряда преобразований, для определения неизвестных коэффициентов в (4) получим бесконечные системы:

$$\chi_n X_n + \sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)} = (-1)^n \int_0^{\pi} [w_1(\beta) + w_2(\beta)] \cos n\beta \, \mathrm{d}\beta -$$
$$-\frac{\pi(-1)^n}{2}\left[\frac{d_n(0) - d_n(\gamma)}{n+1} \operatorname{cth}\frac{(n+1)\gamma}{2} + d_n(0) + d_n(\gamma)\right] \quad (n = 1, 2, ...)$$
$$\eta_n Y_n + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)} = (-1)^n \int_0^{\pi} [w_1(\beta) - w_2(\beta)] \cos n\beta \, \mathrm{d}\beta -$$
$$-\frac{\pi(-1)^n}{2}\left[\frac{d_n(0) + d_n(\gamma)}{n+1} \operatorname{th}\frac{(n+1)\gamma}{2} + d_n(0) - d_n(\gamma)\right] \quad (n = 1, 2, ...) \tag{5}$$

где

$$\chi_1 = 1, \quad \chi_n = \frac{\operatorname{sh}(n\gamma) + n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2-1)[\operatorname{ch}(n\gamma) - \operatorname{ch}\gamma]}, \quad (n = 2, 3, ...)$$
$$\eta_1 = \frac{\gamma - \operatorname{th}\gamma}{4}, \quad \eta_n = \frac{\operatorname{sh}(n\gamma) - n\operatorname{sh}\gamma}{(n^2-1)[\operatorname{ch}(n\gamma) + \operatorname{ch}\gamma]}, \quad (n = 2, 3, ...) \tag{6}$$
$$\Delta(m,n) = \delta_m{}^4 + 2(n^2+1)\delta_m{}^2 + (n^2-1)^2$$

Постоянные X_0, Y_0 будем определять из уравнений

$$\pi\Big(d_0(0) + d_0(\gamma) + X_0\left[\operatorname{ch}\gamma + 1 + \gamma\operatorname{cth}(\gamma/2)\right]\Big) +$$
$$+\sum_{m=2,4,6}^{\infty} \frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)} = \int_0^{\pi} [w_1(\beta) + w_2(\beta)] \, \mathrm{d}\beta$$
$$\pi\Big(d_0(0) - d_0(\gamma) + Y_0\left[\operatorname{ch}\gamma - 1 - \gamma\operatorname{th}(\gamma/2)\right]\Big) +$$
$$+\sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{8Z_m\delta_m}{\gamma\Delta(m,n)} = \int_0^{\pi} [w_1(\beta) - w_2(\beta)] \, \mathrm{d}\beta \tag{7}$$

Соответствующие (5)–(7) обозначения приведены в работе [3]. Нормы систем (5) не превосходят $2/\pi$. Из смешанных граничных условий (3) получаются парные тригонометрические уравнения. С использованием результатов [4,5] эти парные уравнения сводятся к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

$$2A_m + \sum_{k=1}^{\infty} a_{m,k} A_k = b_m, \quad (m = 1, 2, ...) \tag{8}$$

где $$a_{m,k} = kN_k \int_c^{\pi} z_m(\cos\theta) z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{m,k}\right| = 0(m^{-0.5}) \tag{9}$$

$$b_m = m\int_0^c F_1(\theta) z_m(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta - m\int_c^\pi F_2(\theta) z_m(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$z_m(x) = P_m(x) - P_{m+1}(x), \quad y_m(x) = P_m(x) + P_{m+1}(x) \tag{10}$$

$$F_1(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{g_1'(x)\sin(x/2)\,d x}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}, \quad F_2(\theta)\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\pi \frac{g_2(z)\sin(x/2)\,d x}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}}$$

$$A_m = \frac{2\delta_m{}^2 Z_m}{\gamma(1+\delta_m{}^2)}, \quad g_1'(x) = -\frac{2\mu\,\mathrm{v}_0}{1-\nu}\operatorname{sh}\alpha + \frac{\pi}{2}[b_0'(\alpha) + b_0'''(\alpha)]$$

$$g_2(x) = \Phi_0''(\alpha,\pi) - w_0''(\alpha) + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n b_n''(\alpha)$$

С использованием бесконечных систем (8) вычисляются значения следующих рядов:

$$\sum_{m=1}^\infty m^{-1} A_m \cos(mx) = 2g_1(0) - \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\left\{\int_c^x \frac{F_2(\theta)\operatorname{ctg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty A_k N_k \int_c^\pi \frac{z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} - \int_0^c \frac{F_1(\theta)\operatorname{ctg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}}\right\} \quad (c \le x \le \pi) \tag{11}$$

$$\sum_{m=1}^\infty A_m(1+N_m)\cos(mx) = 2^{-1/2}\cos\frac{x}{2}\left\{-\frac{K_I}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} - \int_x^c \frac{F_1'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \right.$$

$$\left. \sum_{k=1}^\infty k^2 A_k N_k \int_x^c \frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \int_c^\pi \frac{F_2'(\theta)\operatorname{ctg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}\right\} + g_2(\pi) \tag{12}$$

где коэффициент интенсивности напряжений –

$$K_I = \sum_{k=1}^\infty k A_k N_k \cos c - F_1(c) + F_2(c) \tag{13}$$

Доказательство регулярности уравнений (8) приведено в работах [4,5].

С использованием значений рядов (11) и (12) легко вычисляются значения контактных напряжений в области $(0 \le \alpha < c)$ и нормальных перемещений $\mathrm{v}(\alpha,0)$ в области $(c_0 \le \alpha \le \gamma, \beta = 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1967. 402 с.
2. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.: ГТТИ, 1950.
3. Баблоян А.А., Багдасарян А.В. Симметричная задача для полуплоскости, ослабленной круглым отверстием и трещиной. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3.С.15–22.
4. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983.488 с.
5. Баблоян А.А. Контактные и смешанные задачи для однородных и составных тел. /Докторская диссертация. – Ленинград: 1979, 346 с.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию 23.05.2007